Ю . М . К о н о н о в

ПРО СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНОГО ОБЕРТАННЯ НЕСИМЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
вул. Генерала Батюка, 19, 84116, Донецька область, м. Слов'янськ, Україна;
e-mail: kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Abstract. The conditions of asymptotic stability of uniform rotation of an asymmetric heavy rigid body in a resisting medium are obtained in the form of a system of three inequalities. A rigid body has a fixed point with a center of mass located on the third main axis and its rotation is supported by a constant moment directed along this axis. The obtained stability conditions were analytically evaluated. It is shown that these conditions under the action of the overturning moment are reduced to three inequalities, and under the action of the restoring moment - to two ones. The conditions on the values of the constant moment and moment of inertia of the third principal axis are obtained. They are sufficient under the action of the restoring moment for the asymptotic stability of the uniform rotation of a rigid body in a medium with resistance. At a sufficiently large constant moment, regardless of the action of the overturning or restoring moment, the asymptotic stability is observed if the rotation of the rigid body occurs around the axis of the greatest moment of inertia and the smallest of the doubled ones. Small dynamic and dissipative asymmetries do not qualitatively affect the stability of the uniform rotation in an resistive medium of an almost symmetric top. A generalization of the obtained stability conditions is given for the case of presence of a cavity in a solid body with an ideal incompressible fluid which moves potentially. It is shown that in the absence of dissipation, the obtained stability conditions coincide with the known ones.

Key words: dynamic asymmetry of a rigid body, resisting medium, asymptotic stability.

Вступ.

Інтерес до даної задачі пов'язаний з тим, що при русі (польоті) конкретних твердих тіл у середовищі з опором при значенні кутової швидкості підкручення $\omega \approx \Gamma / A$ на прямолінійній ділянці їх польоту може виникнути різке збільшення кута атаки, де – Γ перекидаюча або відновлювальна пара сил тиску повітря на тверде тіло; A – екваторіальний момент. В роботі [14] показано, що причиною такого збільшення якраз є мала динамічна несиметрія твердого тіла, що призводить до появи додаткового інтервалу нестійкості, довжина якого прямує до нуля при прямуванні до нуля величини дебалансу. У роботах [2, 14, 19] розглянуто кілька прикладів рухів твердих тіл з малою несиметрією і запропоновано алгоритм вивчення систем з малою несиметрією. В даний час існує досить велика кількість робіт, в яких описуються різні дослідження динаміки твердого тіла, що обертається у середовищі з опором [1, 4 – 10, 12, 14 – 16, 18, 20 – 22]. Найбільш повний огляд літератури щодо цієї задачі представлено в роботах [9, 16, 20, 21]. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної задачі. В роботі [21] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Строгий підхід, оснований на процедурі усереднення, застосовується до тіл з довільними еліпсоїдами інерції. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). В статті [18] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією повільно змінного в часі крутного моменту. У статті [8] отримано умови глобальної асимптотичної стійкості стаціонарних обертань несиметричного твердого тіла навколо центру мас в полі постійного зовнішнього і дисипативного моментів. За допомогою квазі-координат в роботі [7] розглядається вільний обертальний рух твердого тіла в лінійно-в'язкому середовищі. Статтю [4] присвячено побудові точного розв'язку задачі про вільне обертання осесиметричного твердого тіла з урахуванням моменту в'язкого тертя, який лінійно залежить від кутової швидкості тіла. В роботі [15] за допомогою чисельних методів досліджено еволюцію обертання твердого тіла під дією суми постійного і дисипативного збурюючих моментів. Більш загальні рівняння руху тіла, що обертається у середовищі з опором, отримано в [1]. У статті [12] розглянуто задачу про рух несиметричного твердого тіла відносно центру мас у середовищі з опором. Дано якісний опис фазових траєкторій, наведено деякі їх характеристики і кількісні оцінки.

В основу даної роботи покладено статті [5, 6]. В роботі [6] проведено дослідження впливу дисипативного і двох постійних моментів на стійкість стаціонарних рухів дзиги Лагранжа. Перший момент постійний в інерціальній системі відліку, а другий – в неінерціальній, тобто в системі відліку, яка пов'язана з тілом. У статті [6] розглянуто тільки постійний момент в інерціальній системі відліку. Дана робота узагальнює задачу, яку розглянуто в [5] на випадок рівномірного обертання динамічно несиметричного твердого тіла з несиметричною дисипацією з урахуванням неінерціального постійного моменту. Тверде тіло має нерухому точку з центром мас, який розташовано на третій головній осі, а його обертання підтримується постійним моментом, спрямованим по цій осі. За критерієм Льєнара-Шіпара в іннорному вигляді отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором. Ці умови записано у вигляді системи трьох нерівностей, які співпали з нерівностями, отриманими на підставі підходу [5, 6]. Проведено аналітичні дослідження цих нерівностей. Показано, що при дії перекидального моменту, умови стійкості визначаються трьома нерівностями, а при дії відновлювального моменту – тільки двома. Отримано умови на величини постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості рівномірного обертання твердого тіла у середовищі з опором. Показано, що при досить великому постійному моменті буде спостерігатися асимптотична стійкість для відновлювального моменту, якщо обертання твердого тіла відбувається навколо осі найбільшого моменту інерції і найменшого з подвоєних. Мала динамічна і дисипативна несиметрії якісно не впливають на стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором майже симетричної дзиґи. Дано узагальнення отриманих умов стійкості на випадок наявності в твердому тілі порожнини з ідеальної нестисливої рідини, що здійснює потенціальний рух. Показано, що при відсутності дисипації отримані умови стійкості збігаються з відомими .

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо важке динамічно несиметричне тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої точки. На тверде тіло діє дисипативний момент $\boldsymbol{M}_d = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(D_1, D_2, D_3)$; $D_i > 0$ $i = \overline{1, 3}$), що моделює опір середовища, і постійний момент $\boldsymbol{M}_q = Q\boldsymbol{k}$, спрямований по третій головній осі інерції твердого тіла, який підтримує сталу кутову швидкість власного обертання. Будемо також вважати, що на цій осі знаходиться центр мас твердого тіла. Тут $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість твердого тіла, Q – довільна постійна.

Рівняння руху твердого тіла мають вигляд [6]

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + Q\boldsymbol{k} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}\,; \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0\,, \tag{1.2}$$

де $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор інерції твердого тіла для нерухомої точки; $V = \Gamma(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\gamma})$ – потенціальна енергія ($\Gamma = mgc$, m – маса твердого тіла, c – відстань від нерухомої точки до центру мас твердого тіла, g – прискорення вільного падіння); $\boldsymbol{k}$ – одиничний вектор третьої головної осі; $\boldsymbol{\gamma}$ – одиничний вектор висхідної вертикалі.

Рівняння (1.1) виражає теорему про зміну кінетичного моменту $\boldsymbol{J\omega}$, а рівняння (1.2) – умова сталості вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в інерціальній системі відліку.

Проектуючи рівняння руху твердого тіла (1.1) – (1.2) на головній осі інерції твердого тіла для нерухомої точки, отримаємо:

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= \Gamma\gamma_2 - D_1\omega_1; \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 &= -\Gamma\gamma_1 - D_2\omega_2; \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= Q - D_3\omega_3; \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 + \omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2 &= 0; \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_3\gamma_1 - \omega_1\gamma_3 &= 0; \\ \dot{\gamma}_3 + \omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1 &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Система (1.3) – (1.4) допускає розв'язки

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0\,;\ \gamma_3 = 1\,;\ \omega_1 = \omega_2 = 0\,;\ \omega_3 = \omega = Q/D_3\,; \tag{1.5}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0\,;\ \gamma_3 = -1\,;\ \omega_1 = \omega_2 = 0\,;\ \omega_3 = \omega = Q/D_3\,, \tag{1.6}$$

які відповідають рівномірним обертанням твердого тіла з кутовою швидкістю ω навколо вертикально розташованої третьої головної осі. При цьому розв'язку (1.5) відповідає випадок «сплячого» вовчка, на який діє перекидаючий момент ($\Gamma > 0$, центр мас перебуває вище нерухомої точки ($c > 0$)), а розв'язку (1.6) – випадок статично врівноваженого вовчка, на який діє відновлювальний момент ($\Gamma < 0$, центр мас знаходиться нижче нерухомої точки ($c < 0$)). Таким чином, розв'язку (1.5) відповідає випадок $\Gamma > 0$, а розв'язку (1.6) – $\Gamma < 0$.

§2. Асимптотична стійкість розв'язків (1.5) – (1.6).

Припускаючи в збуреному русі $\gamma_3 = \pm 1 + \delta$, $\omega_3 = \omega + \sigma$ (знак плюс відповідає розв'язку (1.5), а знак мінус – (1.6)) і зберігаючи для інших змінних їх колишні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega - \Gamma\gamma_2 + D_1\omega_1 &= 0; \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega + \Gamma\gamma_1 + D_2\omega_2 &= 0; \\ J_3\dot{\sigma} + D_3\sigma &= 0; \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 + \omega_2 - \omega\gamma_2 &= 0; \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_1 - \omega\gamma_1 &= 0; \\ \dot{\delta} &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

При динамічній ($J_2 = J_1$) і дисипативній ($D_2 = D_1$) симетрії рівняння (2.1) – (2.2) співпадають з рівняннями роботи [6], в якій треба покласти $P = 0$. У зв'язку з цим всі основні властивості рівнянь цієї роботи переносяться і на рівняння (2.1) – (2.2), а саме: характеристичне рівняння системи (2.1) – (2.2) завжди має один нульовий корінь, обумовлений наявністю геометричного інтегралу $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ і один негативний корінь $-D_3/J_3$; перше і друге рівняння системи (2.1) і системи (2.2) відокремлюються від інших рівнянь. Розв'язки (1.5) – (1.6) асимптотично стійкі, якщо всі корені характеристичного рівняння мають від'ємну дійсну частину і нестійкі, якщо хоча б один корінь має додатну дійсну частину. Асимптотична стійкість по змінній γ_3 випливає з асимптотичної стійкості по змінним γ_1, γ_2 і геометричного інтегралу.

Виключивши із системи (2.1) – (2.2) їх похідні, отримаємо:

$$\begin{aligned} &J_2\ddot{\gamma}_1 + D_2\dot{\gamma}_1 + \Gamma_1\gamma_1 - J\omega\dot{\gamma}_2 - \tilde{D}_2\gamma_2 = 0; \\ &J_1\ddot{\gamma}_2 + D_2\dot{\gamma}_2 + \Gamma_2\gamma_2 + J\omega\dot{\gamma}_1 + \tilde{D}_1\gamma_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тут

$$\Gamma_1 = \left(J_3 - J_1\right)\omega^2 - \Gamma; \;\; \Gamma_2 = \left(J_3 - J_2\right)\omega^2 - \Gamma; \;\; \tilde{D}_i = D_i\omega \quad (i = 1,2);$$

$$J = J_1 + J_2 - J_3 > 0.$$

Основна відмінність отриманих рівнянь (2.3) від аналогічних рівнянь робіт [5, 6] полягає в тому, що через динамічні ($J_2 \neq J_1$) і дисипативні ($D_2 \neq D_1$) несиметрії неможливо спростити ці рівняння шляхом введення комплексної функції. Слід також зазначити, що система рівнянь (2.3) описує рух лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що перебуває під дією сил довільної структури: дисипативних, потенційних, гіроскопічних і циркуляційних [5, 6].

Характеристичне рівняння для системи (2.3) буде мати вигляд:

$$a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{2.4}$$

де

$$a_4 = J_1J_2 > 0; \; a_3 = J_1D_1 + J_2D_2 > 0; \; a_2 = (2J_1J_2 - J_3J)\omega^2 - (J_1 + J_2)\Gamma + D_1D_2;$$

$$a_1 = (J_1D_2 + J_2D_1)\omega^2 - (D_1 + D_2)\Gamma; \tag{2.5}$$

$$a_0 = D_1D_2\omega^2 + \Big[\left(J_3 - J_1\right)\omega^2 - \Gamma\Big]\Big[\left(J_3 - J_2\right)\omega^2 - \Gamma\Big] =$$

$$= (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)\omega^4 + (\tilde{J}\Gamma + D_1D_2)\omega^2 + \Gamma^2; \quad \tilde{J} = J_1 + J_2 - 2J_3.$$

Для динамічно симетричного твердого тіла ($J_2 = J_1$) і симетричної дисипації ($D_2 = D_1$) рівняння (2.4) набуде вигляду

$$\left(J_1\lambda^2 + D_1\lambda + \Gamma_1\right)^2 + \left(J\lambda + D_1\right)^2\omega^2 = 0,$$

з якого випливає, що воно не має дійсних коренів.

Для того, щоб всі нулі рівняння (2.4) лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Льєнара – Шіпара, записаного в іннорному вигляді [3] (див. с. 34), необхідно і достатньо, щоб:

1) були додатні всі коефіцієнти a_i (або половина цих коефіцієнтів);

2) були іннорно додатними матриці Δ_3^e, Δ_1^e, тобто

$$I_3=\left|\Delta_3^e\right|=\begin{vmatrix}a_4 & a_2 & a_0\\ 0 & a_3 & a_1\\ a_3 & a_1 & 0\end{vmatrix}=(a_2a_3-a_1a_4)a_1-a_0a_3^2>0;\;\; I_{1=}\left|\Delta_1^e\right|=a_3>0.$$

Таким чином, умови асимптотичної стійкості розв'язків (1.5) – (1.6) запишуться так:

$$a_0>0; \tag{2.6}$$

$$a_1>0; \tag{2.7}$$

$$(a_2a_3-a_1a_4)a_1-a_0a_3^2>0. \tag{2.8}$$

Умови стійкості (2.6) – (2.8) можна отримати на підставі підходу робіт [5, 6]. Для цього скористаємося тим, що на межі області стійкості рівняння (2.4) має чисто уявний корінь $\lambda=i\mu$ ($\mu\in R$). У цьому випадку рівняння (2.4) набуде вигляду:

$$\mu^2(a_4-a_2)+a_0+i\mu(a_1-a_3\mu^2)=0. \tag{2.9}$$

З рівності нулю коефіцієнтів при уявній частині рівняння (2.9) випливає, що

$$\mu_1=0,\;\; \mu_{2,3}=a_1/a_3>0\,. \tag{2.10}$$

Підставивши (2.10) в (2.9) і скориставшись тим, що, наприклад, при $Q=0$ ($\omega=0$) розв'язки (1.5) – (1.6) завідомо нестійкі, отримаємо умови асимптотичної стійкості розв'язків (1.5) – (1.6) у вигляді (2.6) – (2.8).

З нерівностей (2.6) – (2.8) видно, що при частковій дисипації ($D_1=D_2=0,\ D_3\neq 0$) асимптотична стійкість неможлива, тому що нерівності (2.7) і (2.8) невірні ($a_1=a_2=0$). Слід зазначити, що в цьому випадку рівняння (2.4) співпадає з характеристичним рівнянням [10] (див. с. 738), що отримано для несиметричного твердого тіла, яке рівномірно обертається навколо вертикалі з кутовою швидкістю $\omega_3=$ $=\omega=\text{const}$.

Нерівності (2.6) – (2.8), з урахуванням позначень (2.5), можна переписати так:

$$\begin{gathered}\left[(J_3-J_1)\omega^2-\Gamma\right]\left[(J_3-J_2)\omega^2-\Gamma\right]=\\ =(J_3-J_1)(J_3-J_2)\omega^4+(\tilde{J}\Gamma+D_1D_2)\omega^2+\Gamma^2>0;\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$(J_1D_2+J_2D_1)\omega^2-(D_1+D_2)\Gamma>0; \tag{2.12}$$

$$\Gamma\left(\tilde{b}_2J\omega^2+\tilde{b}_0\right)>0. \tag{2.13}$$

Тут

$$\tilde{b}_2=J_2(J_3-2J_2)D_1^2+(J_1(J_3-2J_2)+J_2(J_3-2J_1))D_1D_2+J_1(J_3-2J_1)D_2^2;$$

$$\tilde{b}_0=\left[(J_1-J_2)^2\Gamma-(D_1+D_2)(J_1D_2+J_2D_1)\right]D_1D_2\,.$$

Розв'язавши нерівності (2.11) – (2.13) відносно Γ, отримаємо:

$$\begin{gathered}\{\Gamma<\Gamma_1\}\cup\{\Gamma>\Gamma_2\}\;\text{ при }\;\omega^2>4D_1D_2\big/\left(J_1-J_2\right)^2;\\ \Gamma\in R\;\text{ при }\;\omega^2<4D_1D_2\big/\left(J_1-J_2\right)^2;\end{gathered} \tag{2.14}$$

$$\Gamma < \frac{(J_1 D_2 + J_2 D_1)}{D_1 + D_2}\omega^2; \tag{2.15}$$

$$\Gamma > -b_0/b_2 \ \text{ при } \ \Gamma > 0; \tag{2.16}$$

$$\Gamma < -b_0/b_2 \ \text{ при } \ \Gamma < 0, \tag{2.17}$$

де

$$b_2 = (J_1 - J_2)^2 D_1 D_2 > 0;$$

$$b_0 = \Big[J_2(J_3 - 2J_2)D_1^2 + (J_1(J_3 - 2J_2) + J_2(J_3 - 2J_1))D_1 D_2 +$$
$$+J_1(J_3 - 2J_1)D_2^2 \Big] J\omega^2 - (D_1 + D_2)D_1 D_2 (J_1 D_2 + J_2 D_1);$$

$$\Gamma_{1,2} = -\frac{\omega^2}{2}\left(\tilde{J}\omega \mp \sqrt{(J_1 - J_2)^2 \omega^2 - 4D_1 D_2} \right).$$

Таким чином, необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла запишуться у вигляді трьох нерівностей (2.11) – (2.13). При дії перекидального моменту ($\Gamma > 0$) ці умови мають вигляд (2.14) – (2.16), а при дії відновлювального моменту ($\Gamma < 0$) вони спрощуються і записуються у вигляді двох нерівностей (2.11) або (2.14) і (2.17), тому що в цьому випадку нерівність (2.15) завжди вірна.

Так як

$$J_2(J_3 - 2J_2)D_1^2 + (J_1(J_3 - 2J_2) + J_2(J_3 - 2J_1))D_1 D_2 + J_1(J_3 - 2J_1)D_2^2 =$$
$$= -(J_1 D_2 + J_2 D_1)\big[(2J_1 - J_3)D_2 + (2J_2 - J_3)D_1\big],$$

то коефіцієнт b_0 можна спростити

$$b_0 = -(J_1 D_2 + J_2 D_1)\Big[2(J_1 D_2 + J_2 D_1)J\omega^2 + (D_1 + D_2)\Big(D_1 D_2 - J_3 J\omega^2\Big)\Big] = -(J_1 D_2 + J_2 D_1)\times$$
$$\times\Big\{\big[(2J_1 - J_3)D_2 + (2J_2 - J_3)D_1\big]J\omega^2 + (D_1 + D_2)D_1 D_2\Big\}. \tag{2.18}$$

Як видно з першої рівності в (2.18) при $\omega^2 < D_1 D_2/(J_3 J)$ коефіцієнт $b_0 < 0$ і при $\Gamma < 0$ нерівність (2.17) виконано.

Ліву частину нерівності (2.11) при $\omega^2 < D_1 D_2/(J_3 J)$ можна обмежити знизу наступним виразом:

$$(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)\omega^4 + (\tilde{J}\Gamma + D_1 D_2)\omega^2 + \Gamma^2 > J_1 J_2 \omega^4 + \tilde{J}\Gamma\omega^2 + \Gamma^2, \tag{2.19}$$

так як

$$\big[(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) + J_3 J\big]\omega^4 + \tilde{J}\Gamma + \Gamma^2 = J_1 J_2 \omega^4 + \tilde{J}\Gamma\omega^2 + \Gamma^2 .$$

З (2.19) слідує, що ліва частина нерівності (2.11) при $\Gamma < 0$ і $\tilde{J} < 0$ $(J_3 > (J_1 + J_2)/2)$ буде додатною. Звідки випливає виконання нерівності (2.11) при $\omega^2 < D_1 D_2/(J_3 J)$ і $J_3 > (J_1 + J_2)/2$.

Отже, при дії відновлювального моменту ($\Gamma < 0$), постійного моменту $Q < D_3\sqrt{D_1 D_2 / J_3 J}$ і моменту інерції $J_3 > \left(J_1 + J_2\right)/2$, розв'язок (1.6) буде асимптотично стійким.

З нерівностей (2.11) – (2.13) також слідує, що при $\Gamma < 0$ розв'язок (1.6) буде асимптотично стійким при достатньо великій величині кутової швидкості ω, тобто моменту Q і виконанні наступних нерівностей на момент інерції третьої головної осі:

$$J_1 < J_3 < 2J_1;$$
$$J_2 < J_3 < 2J_2.$$

Це означає, що при $\Gamma < 0$ обертання твердого тіла повинно відбуватися навколо осі найбільшого моменту інерції і найменшого з подвоєних моментів інерції.

Для динамічно симетричного твердого тіла ($J_2 = J_1$) і симетричної дисипації ($D_2 = D_1$) нерівності (2.11) – (2.13) набувають вигляду

$$\left((J_3 - J_1)\omega^2 - \Gamma\right)^2 + D_1^2\omega^2 > 0; \tag{2.20}$$

$$J_1\omega^2 > \Gamma; \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} &(J_3 - 2J_1)^2\omega^2 + D_1^2 < 0 \quad (\Gamma > 0); \\ &(J_3 - 2J_1)^2\omega^2 + D_1^2 > 0 \quad (\Gamma < 0). \end{aligned} \tag{2.22}$$

З нерівностей (2.20) – (2.22) видно, що асимптотична стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла можлива тільки при дії довільного відновлювального моменту $\Gamma < 0$. Цей результат також випливає з роботи [6].

Розглянемо вплив малої динамічної і дисипативної несиметрії на умови стійкості (2.11) – (2.13). Для цього представимо J_2 і D_2 у вигляді

$$J_2 = J_1\left(1 + \varepsilon\right); \;\; D_2 = D_1\left(1 + \varepsilon_1\right), \tag{2.23}$$

де $|\varepsilon| \ll 1,\; |\varepsilon_1| \ll 1$.

Підставивши (2.23) в (2.11) – (2.13), з точністю до першого степеня ε і ε_1, отримаємо:

$$\begin{aligned} &\Gamma < J_1\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\omega^2; \\ &\Gamma\left(2 + \varepsilon + \varepsilon_1\right)\left[\left(J_3 - 2J_1\right)^2\omega^2 + D_1^2\right] + 2D_1^2\varepsilon_1 - 4J_1\left(J_3 - 2J_1\right)\omega^2\varepsilon < 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

З нерівностей (2.24) випливає, що для статично врівноваженої дзиги ($\Gamma < 0$) перша нерівність завжди виконана, а друга нерівність буде виконана при досить малих ε і ε_1, а для «сплячої» дзиги ($\Gamma > 0$) цього зробити для другої нерівності неможливо.

Таким чином, у середовищі з опором мала динамічна і дисипативна несиметрія ($|\varepsilon| \ll 1,\; |\varepsilon_1| \ll 1$) якісно не впливають на асимптотичну стійкість рівномірного обертання майже симетричної дзиги.

§3. Випадок відсутності дисипативного і постійного моментів.

У разі відсутності дисипативного ($D_1 = D_2 = D_3 = 0$) і постійного ($Q = 0$) моментів система рівнянь (1.3) – (1.4) допускає розв'язки (1.5) – (1.6), де $\omega_3 = \omega = \text{const}$.

Характеристичне рівняння (2.4) в цьому випадку набуде вигляду

$$a_4\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_0 = 0\,. \qquad (3.1)$$

Тут

$$a_4 = J_1J_2 > 0\,; \quad a_2 = (2J_1J_2 - J_3J)\omega^2 - (J_1 + J_2)\Gamma\,;$$

$$a_0 = \left[(J_3 - J_1)\omega^2 - \Gamma\right]\left[(J_3 - J_2)\omega^2 - \Gamma\right] = (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)\omega^4 + \tilde{J}\Gamma\omega^2 + \Gamma^2.$$

При відсутності дисипації маємо критичний випадок з одним нульовим коренем. В цьому випадку з аналізу першого наближення слідують тільки необхідні умови стійкості розв'язків (1.5) – (1.6). Необхідні і достатні умови локалізації нулів рівняння (3.1) на уявній осі мають вигляд [3] (див. с.48):

$$a_2 > 0;\ a_0 > 0;\ a_2^2 - 4\,a_4\,a_0 > 0\,,$$

або

$$\left[J_1J_2 - (J_3 - J_2)(J_3 - J_1)\right]\omega^2 - (J_1 + J_2)\Gamma > 0\,; \qquad (3.2)$$

$$\left[(J_3 - J_1)\omega^2 - \Gamma\right]\left[(J_3 - J_2)\omega^2 - \Gamma\right] > 0; \qquad (3.3)$$

$$\begin{gathered}\left[\left[J_1J_2 - (J_3 - J_2)(J_3 - J_1)\right]\omega^2 - (J_1 + J_2)\Gamma\right]^2 - \\ -4J_1J_2\left[(J_3 - J_1)\omega^2 - \Gamma\right]\left[(J_3 - J_2)\omega^2 - \Gamma\right] > 0.\end{gathered} \qquad (3.4)$$

Як вже зазначалося раніше в другому параграфі, при $D_1 = D_2 = 0$, рівняння (2.4) співпадає з характеристичним рівнянням, яке отримано в монографії [10] (див. с. 738) для твердого тіла, що рівномірно обертається ($\omega_3 = \omega = \text{const}$) з триосним еліпсоїдом інерції. У цій монографії отримано також і необхідні умови стійкості (3.2) – (3.4), з яких при $J_2 = J_1$ і $\Gamma > 0$ випливає критерій Маєвського.

Слід зауважити, що аналогічну систему нерівностей (3.2) – (3.4) отримано в роботі [17] за умови правильності польоту снаряда з круговою циліндричною порожниною, яка повністю заповнена ідеальною однорідною нестисливою рідиною. Порожнина має плоску діафрагму, а рідина здійснює потенціальний рух. Еліпсоїд інерції снаряда і приєднаних мас рідини є триосним. В цьому випадку під J_1, J_2 і J_3 слід розуміти суму моментів інерції твердого тіла і відповідних моментів інерції еквівалентного твердого тіла, а під величиною Γ – перекидальна пара сил тиску повітря на снаряд [13, 17]. Як наголошується в роботах [11, 13] порожнина може бути довільною з центром мас на третій головній осі, еліпсоїд приєднаної маси рідини – триосним і рідина повинна здійснювати потенціальний рух. На підставі всього вищесказаного, можна стверджувати, що результати досліджень асимптотичної стійкості рішень (1.5) – (1.6), які було проведено у другому параграфі, можуть бути застосовані до несиметричного твердого тіла з порожниною, яка цілком заповнена ідеальною однорідною, нестисливою рідиною, що робить потенціальний рух, в припущенні, що еліпсоїд інерції твердого тіла і приєднаних мас рідини є триосним.

Висновок.

На підставі критерію Льєнара – Шіпара в іннорному вигляді отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором. Тверде тіло має нерухому точку. Центр мас твердого тіла розташований на третій головної осі і його обертання підтримується постійним моментом, спрямованим по цій осі. Умови стійкості записано у вигляді системи трьох нерівностей, які співпали з нерівностями, отриманими на основі підходу [5, 6]. Проведено аналітичні дослідження цих нерівностей. Показано, що при дії перекидального моменту умови стійкості визначаються трьома нерівностями, а при дії відновлювального моменту – двома. Отримано умови на величини постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості рівномірного обертання твердого тіла у середовищі з опором. Якщо обертання твердого тіла буде відбуватися навколо осі найбільшого моменту інерції і найменшого з подвоєних, то при дії відновлювального моменту, при досить великому постійному моменті, буде спостерігатися асимптотична стійкість. Мала динамічна і дисипативна несиметрія якісно не впливають на стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором майже симетричного твердого тіла. У разі відсутності дисипації і постійного моменту отримані необхідні умови стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла збігаються з відомими умовами і узагальнюють умови Маєвського для симетричного твердого тіла. За умови, що еліпсоїд інерції несиметричного твердого тіла і приєднаної маси рідини є триосним, проведена аналогія між отриманими умовами стійкості для твердого тіла і твердого тіла з порожниною, повністю заповненою ідеальної нестисливої рідиною, яка здійснює безвихровий рух. Показано, що при відсутності дисипації, отримані умови стійкості збігаються з відомими.

Дослідження виконані при частковій підтримці програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки, проект № 0119U100042.

РЕЗЮМЕ. Отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного абсолютно твердого тіла у середовищі з опором у вигляді системи трьох нерівностей. Обертання твердого тіла підтримується постійним моментом, який спрямовано по третій головній осі. Аналітично проведено оцінку цих нерівностей. Показано, що при дії перекидального моменту ці умови зводяться до трьох нерівностей, а при дії відновлювального моменту – до двох. Отримано умови на величини постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості рівномірного обертання твердого тіла у середовищі з опором. Якщо обертання тіла відбувається навколо осі найбільшого моменту інерції і найменшого з подвоєних, то для відновлювального моменту при досить великому постійному моменті спостерігається асимптотична стійкість. Дано узагальнення отриманих умов стійкості в разі наявності в тілі порожнини з ідеальною нестисливою рідиною, яка здійснює безвихровий рух.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динамічно несиметричне абсолютно тверде тіло, середовище з опором, асимптотична стійкість.

1. *Асланов В.С.* Движение вращающегося тела в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 2. – С. 27 – 39.
2. *Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А.* Динамика систем связанных твёрдых тел. Т. 9. Задачи и методы: математика, механика, кибернетика. – Киев: Наук. думка, 2012. – 395 с.
3. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем – Москва: Наука, 1979. – 304 с.
4. *Иванова Е.А.* Точное решение задачи о вращении осесимметричного твердого тела в линейной вязкой среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 6. – С. 15 – 30.
5. *Карапетян А.В., Лагутина И.С.* О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1998. – № 5. – С. 29 – 33.
6. *Карапетян А.В.* О стационарных движениях волчка Лагранжа с возбуждением в сопротивляющейся среде // Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2000. – № 5. – С. 39 – 43.
7. *Кривцов А.М.* Описание движения осесимметричного твердого тела в линейно-вязкой среде при помощи квазикоординат // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 4. – С. 23 – 29.
8. *Леонов Г.А., Морозов А.В.* О глобальной устойчивости стационарных вращений твердого тела // Прикл. математика и механика. – 1992. – **56**, № 6. – С. 993 – 997.
9. *Лещенко Д.Д.* Эволюция вращения твердого тела, близких к случаю Лагранжа // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. – 1998. – **2,** № 6. – С. 32 – 37.
10. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – Москва: Физматгиз, 1961. – 824 с.

11. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – Москва: Наука, 1965. – 440 с.
12. *Пузырев В.Е., Суйков А.С.* О движении твердого тела вокруг центра масс при частичной диссипации энергии // Механика твердого тела. Межвед. сборник науч. трудов. – 2009. – Вып. 39. – С. 157 – 166.
13. *Румянцев В.В.* Устойчивость движения твердого тела с полостями, наполненными жидкостью // Тр. Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. 27 января – 3 февраля 1960 г. (Обзорные доклады). Изд-во АН СССР. – Москва, Ленинград. – 1962. – С. 57 – 71.
14. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 166 с.
15. *Тронин К.Г.* Численное исследование вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Нелинейная динамика. – 2005. – **1**, № 2. – С. 209 – 213.
16. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция движения твердого тела относительно центра масс. – Москва – Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. – 308 с.
17. *Четаев Н.Г.* Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого заполнена идеальной жидкостью // Прикл. математика и механика. – 1957. – **21,** № 2. – С. 157 – 168.
18. *Akulenko L.D., Zinkevich Ya.S., Kozachjenko T.A., Leshenko D.D.* The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque // J. of Appl. Mathem. and Mech.– 2017. – **81,** N 2. – P. 79 – 84.
19. *Bolgrabskaya I.* Stabiliti of permanent rotations of inter-connected rigid bodies system with small asymmetry // Multibody system dynamics. – 2001. – **6**. – P. 56 – 72.
20. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid Body Dynamics (De Gruyter Studies in Mathematical Physics, 52). – Berlin: Higher Education Press, 2019 – 520 p.
21. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D.* Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. – New York: Springer, 2017. – 260 p.
22. *Ge Z.M., Wu M. H.* The Stability of Motion of Rigid Body about a Fixed Point in the Case of Euler with Various Damping Torques // Trans. Can. Soc. Mech. Eng. – 1988. – **12**, N 3. – P. 165 – 171.

Надійшла 01.04.2020 Затверджена до друку 18.03.2021