

А. С. Хорошун

**ПРО ГЛОБАЛЬНУ ПОЗИЦІЙНУ СТАБІЛІЗАЦІЮ ОДНОЛАНКОВОГО
МАНІПУЛЯТОРА ІЗ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИМ З'ЄДНАННЯМ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

Abstract. The control is proposed for the rotation of electric motor which provides the globally asymptotic stabilization of arbitrary position of a single-link manipulator with the nonlinear elastic joint. It is shown that such control is robust. The way of the region of robustness estimation in the space of system parameters of the mechanical system is suggested. The obtained results are illustrated in the example of the concrete system.

Key words: one-link manipulator, nonlinear elastic joint, underactuated mechanical system, dynamic surface control, low-pass filter, slow-fast system.

Вступ.

Відомо, що однією з причин виникнення вібрацій у маніпуляторах промислових робіт є пружність з'єднань між керуючим приводом і керованою ланкою. Це може бути викликано деформацією елементів трансмісії, таких як ремені передачі чи довгі вали, наприклад, під час швидкого їх руху чи під час великих навантажень. Зазвичай, такі малі збурення ігноруються при моделюванні механічних систем, проте цілий ряд експериментів довели, що це може призводити до некоректності моделей, в тому числі до значних порушень у бажаних режимах їх функціонування [3]. Зокрема, можливе виникнення явища резонансу, що призведе до руйнування частин механізму. Адекватними моделями, які враховують вищезазначені зауваження, є механічні моделі, де пружність трансмісії моделюється торсіонними пружинами у кожному із з'єднань [4, 15, 17] та ін. Сила, що виникає внаслідок деформації пружини, вважається лінійно залежною від зміщення. Спеціальною заміною змінних математична модель, яка відповідає механічній моделі, що розглядається, може бути зведена до лінійного вигляду [5]. Цей факт дозволяє застосовувати потужний апарат побудови бажаного керування, розроблений для лінійних систем диференціальних рівнянь. Разом із високою адекватністю таких механічних моделей для певних задач це робить їх актуальними і широкоживаними. Слід зауважити, що більшої адекватності математична модель набуває, якщо враховувати ефект затухання коливань, а також нелінійний характер згадуваної сили. Це стає критичним, коли розглядаються великі навантаження чи інші пограничні режими функціонування механічної моделі. В цьому випадку звести відповідну математичну модель до лінійного вигляду неможливо.

Аналіз літератури, в тому числі оглядової статті, яка вийшла відносно нещодавно [12], показує, що в більшості постановок розглядається лінійна залежність сили пружності пружини, якою моделюється трансмісія, від зміщення. У пункті 5 даної роботи показано, що динаміка моделі може бути суттєво різною в залежності від того, чи враховуються при моделюванні нелінійні члени залежності сили пружності пружини від зміщення. Їх неврахування може зменшити адекватність моделі та призвести до розбіжностей між реальною та прогнозованою поведінкою системи, що моделюється.

Нелінійність пружності трансмісії розглядалася в [2, 13, 18]. Як було зазначено в [2], «...кубічний член в механізмі передачі обертаючого моменту є важливим з огляду на експериментальні результати, що вказують на явище стрибкоподібного резонансу. Це явище, яке визначається із дослідів, проявилось в областях, в яких відбулися сильні вібрації ланки робота. Ці області резонансу часто пропускалися і було показано, що їх наявність тісно пов'язана з членом кубічної гнучкості [19]». Також в [12] зазначено: «Таким чином, алгоритм на основі моделі, що явно включає в себе складні нелінійні члени, які, як показано, можуть бути причиною певних небажаних фізичних ефектів (тобто резонансу стрибка), повинен працювати краще, ніж алгоритм, який не включає ці члени». В цій же роботі відмічена відсутність повноти розгляду таких задач. Саме цим пояснюється вибір нелінійної моделі в даній роботі. Виходячи зі слабкої вивченості нелінійної моделі одноланкового маніпулятора із пружним з'єднанням, побудова керування, яке забезпечує бажану динаміку такої моделі, становить значний інтерес і є новою.

При застосуванні торсіонної пружини для моделювання пружного з'єднання, положення керуючого приводу (тобто кут зміщення валу електродвигуна, що здійснює керування) не співпадає із положенням керованої ланки. Зауважимо, що кількість ступенів свободи в такій моделі є більшою, ніж кількість входів керування. Цей факт дозволяє віднести її до класу так званих «малоприводних» механічних систем (ММС). Системи керування, що відносяться до такого класу, мають кращі енергетичні, масовогабаритні та вартісні показники у порівнянні із звичайними системами керування, де кожному ступеню свободи відповідає вхід керування. ММС широко використовуються для моделювання реальних процесів у таких областях як робототехніка, космонавтика, морська справа, дослідження гнучких, мобільних, локомотивних систем, в багатьох інших (див. [8 – 10] та бібліографію там). Одним із методів, який ефективно застосовується для побудови керування, що забезпечує потрібний режим функціонування механічних об'єктів, які описуються нелінійними системами диференціальних рівнянь, є так зване (ДКП) динамічне керування по поверхні (англ. dynamic surface control) [14, 16]. Особливістю цього методу є те, що керування, яке побудовано з його допомогою, забезпечує збіжність траєкторій досліджуваної системи диференціальних рівнянь не до бажаних траєкторій, а до деяких наперед заданих, вздовж яких і відбувається прямування траєкторій системи до бажаних. Застосування даної методики до аналізу математичних моделей маніпуляторів із урахуванням нелінійності пружності трансмісії, які, як було зазначено, відносяться до класу ММС, дозволить значною мірою розв'язати труднощі, що пов'язані із нелінійністю сили торсіонної пружини, а також заповнити існуючі пробіли як у загальній теорії ММС, так і в теорії моделювання маніпуляторів. Маловивченим є питання робастності побудованого керування, тобто малої зміни траєкторій руху системи при малій зміні її параметрів і, також, побудова областей такої робастності у просторі параметрів. Слід зазначити, що питання наявності неточних параметрів у реальних механічних системах є природним [6, 7, 11], якщо врахувати, що параметри визначаються, зазвичай, шляхом розрахунків або з дослідів, а отже наближено, і тому теоретичні побудови, що потребують точних значень параметрів, взагалі кажучи, є марними. Таким чином, з вищезазначеного випливає, що розробка нових та вдосконалення існуючих моделей маніпуляторів та режимів їх керування з урахуванням пружності з'єднань, наявності нелінійних членів у виразі, що описує залежність сили пружності трансмісії від зміщення, а також наявності неточних значень параметрів в контексті розвитку теорії ММС є, без сумніву, актуальною задачею сучасної теоретичної механіки і має важливе прикладне значення.

Таким чином, головні цілі даної роботи полягають в наступному:

1) розвинути метод ДКП побудови керування для ММС шляхом специфічного вибору параметрів і констант фільтрів, що дозволить уникнути зростання порядку допоміжної системи, а також явища значного ускладнення вигляду як допоміжної системи диференціальних рівнянь, так і закону керування, так званого явища «вибуху членів» (англ. explosion of terms);

2) побудувати закон обертання електродвигуна, який забезпечить глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху моделі одноланкового маніпулятора із нелінійно пружним з'єднанням до заданої програмної траєкторії, що задається співвідношенням $q_1 = \Theta$; $\dot{q}_1 = 0$, у той час, як електродвигун припинить обертатися, враховуючи

нелінійну залежність сили пружності трансмісії від зміщення та наявність неточностей в параметрах моделі;

3) побудувати в явному вигляді функцію Ляпунова, яка дозволяє довести бажані динамічні характеристики моделі, що досліджується, при запропонованому керуванні;

4) довести робастність керування та визначити область робастності у просторі параметрів системи.

1. Постановка задачі.

Розглянемо конструкцію моделі одноланкового маніпулятора із пружним з'єднанням (рис. 1).

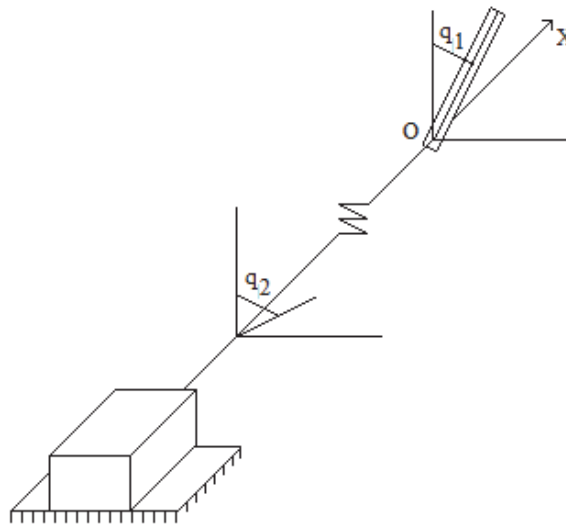


Рис. 1

Маніпулятор може здійснювати обертання у вертикальній площині навколо осі OX у ту чи іншу сторону. Обертання задається електродвигуном і передається до маніпулятора через трансмісію, пружність якої моделюється торсіонною пружиною. Вісь ротора електродвигуна співпадає з віссю OX . Позначимо через q_1 кут відхилення маніпулятора від вертикалі і через q_2 – кут відхилення від вертикалі валу електродвигуна. Зауважимо, що через пружність трансмісії ці кути співпадають лише в окремих станах моделі.

Керування маніпулятором відбувається шляхом обертання електродвигуна, тому керуючим параметром в системі вважаємо момент електромагнітних сил, які прикладено до ротора зі сторони статора. Задача керування полягає в тому, щоб забезпечити глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху одноланкового маніпулятора із пружним з'єднанням до заданої програмної траєкторії, яка задається співвідношеннями $q_1 = \Theta$; $\dot{q}_1 = 0$ у той час, як електродвигун, що здійснює керування, припинить обертатися.

2. Рівняння руху.

Введемо позначення: m – маса ланки маніпулятора; l – відстань від точки O до центру мас ланки маніпулятора; g – прискорення вільного падіння; b_1 та b_2 – коефіцієнти демпфування при обертанні ланки маніпулятора та валу електродвигуна, відповідно; J_1 – момент інерції ланки маніпулятора відносно осі OX ; J_2 – момент інерції валу електродвигуна; Δ – момент електромагнітних сил, прикладених до ротора електродвигуна зі сторони статора. Жорсткість K пружини вважаємо нелінійно за-

лежною від зміщення: $K = K_1(q_1 - q_2) + K_2(q_1 - q_2)^3$, де K_1 і K_2 – коефіцієнти жорсткості.

Використовуючи метод Лагранжа, рівняння руху моделі одноланкового маніпулятора із пружним з'єднанням отримаємо у вигляді ([5])

$$\begin{aligned} J_1\ddot{q}_1 + b_1\dot{q}_1 + mgl\sin(q_1) + K_1(q_1 - q_2) + K_2(q_1 - q_2)^3 &= 0; \\ J_2\ddot{q}_2 + b_2\dot{q}_2 - K_1(q_1 - q_2) - K_2(q_1 - q_2)^3 &= \Delta. \end{aligned} \quad (1)$$

Вважаємо, що деякі параметри моделі задані неточно, тобто вони неперервно залежать від числового векторного параметра, який належить замкненій множині. Під «параметрами моделі» розуміються числові величини, від яких залежать коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (1). В такому випадку, систему диференціальних рівнянь (1) будемо розглядати у вигляді

$$\begin{aligned} J_1(p)\ddot{q}_1 + b_1(p)\dot{q}_1 + m(p)gl(p)\sin(q_1) + K_1(q_1 - q_2) + K_2(q_1 - q_2)^3 &= 0; \\ J_2\ddot{q}_2 + b_2\dot{q}_2 - K_1(q_1 - q_2) - K_2(q_1 - q_2)^3 &= \Delta, \end{aligned} \quad (2)$$

де $p \subseteq P \subset R^n$, $n \in N$.

Зауваження 1. Вважаємо, що область P містить тільки допустимі значення параметрів. Допустимими вважаємо ті значення параметрів, при яких не виникає протиріч із фізичною природою величин, що входять до складу моделі, тобто з невід'ємністю мас, довжин, осьових моментів інерції, коефіцієнтів жорсткості та демпфування тощо.

Нехай $\tau = \sqrt{(K_1/J_2)} t$ – узагальнений час. Тоді, позначивши

$$v = \frac{\Delta}{K_1}, \quad B_1(p) = \frac{b_1(p)}{\sqrt{K_1 J_2}}, \quad B_2 = \frac{b_2}{\sqrt{K_1 J_2}}, \quad K = \frac{K_2}{K_1}, \quad J(p) = \frac{J_2}{J_1(p)}, \quad \varepsilon(p) = \frac{m(p)gl(p)}{K_1},$$

отримаємо безрозмірну систему диференціальних рівнянь, де диференціювання відбувається по узагальненому часу τ , яка еквівалентна системі диференціальних рівнянь (2):

$$\begin{aligned} J^{-1}(p)\ddot{q}_1 + B_1(p)\dot{q}_1 + \varepsilon(p)\sin(q_1) + (q_1 - q_2) + K(q_1 - q_2)^3 &= 0; \\ \ddot{q}_2 + B_2\dot{q}_2 - (q_1 - q_2) - K(q_1 - q_2)^3 &= v. \end{aligned} \quad (3)$$

Перетворимо керування та координати за такими правилами:

$$\begin{aligned} v &= u + B_2\dot{q}_2 - (q_1 - q_2) - K(q_1 - q_2)^3; \\ \eta_1 &= q_1; \quad \eta_2 = \dot{q}_1; \quad \eta_3 = q_2; \quad \eta_4 = \dot{q}_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді система диференціальних рівнянь (3) матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2; \\ \dot{\eta}_2 &= -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \eta_3) - KJ(p)(\eta_1 - \eta_3)^3 - \varepsilon(p)J(p)\sin(\eta_1); \\ \dot{\eta}_3 &= \eta_4; \quad \dot{\eta}_4 = u. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, що реалізація задачі керування еквівалентна побудові керування u , яке забезпечить глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги $\eta_1 = \Theta$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = \hat{\eta}_3$, $\eta_4 = 0$ системи диференціальних рівнянь (5), де $\hat{\eta}_3$ – деяке рівноважне значення змінної η_3 , до якої вона прямує при реалізації задачі керування.

3. Побудова керування.

Для побудови керування використаємо техніку, що була запропонована в [16], так зване динамічне керування по поверхні.

Нехай $\tilde{\eta}_3$ – бажана траєкторія, до якої прямує змінна η_3 при керуванні u . Позначимо величину S_1 наступним чином:

$$S_1 = \eta_3 - \bar{\eta}_3, \quad (6)$$

де $\bar{\eta}_3$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_3$, тобто

$$\tau_1 \dot{\bar{\eta}}_3 + \bar{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3; \quad \bar{\eta}_3(0) = \tilde{\eta}_3(0), \quad (7)$$

де τ_1 – довільна додатня як завгодно мала константа. Продиференціювавши (6) за часом, отримаємо, враховуючи (5), що $\dot{S}_1 = \dot{\eta}_3 - \dot{\bar{\eta}}_3 = \eta_4 - \dot{\bar{\eta}}_3$, звідки випливає, що якщо змінна η_4 асимптотично прямує до

$$\tilde{\eta}_4 = -c_1 S_1 + \dot{\bar{\eta}}_3, \quad (8)$$

де $c_1 > 0$ деяка константа, то величина S_1 асимптотично прямує до 0 незалежно від свого початкового значення. Діючи аналогічно, позначимо величину S_2 наступним чином:

$$S_2 = \eta_4 - \bar{\eta}_4, \quad (9)$$

де $\bar{\eta}_4$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_4$, тобто

$$\tau_2 \dot{\bar{\eta}}_4 + \bar{\eta}_4 = \tilde{\eta}_4; \quad \bar{\eta}_4(0) = \tilde{\eta}_4(0), \quad (10)$$

де τ_2 – довільна додатня як завгодно мала константа. Продиференціювавши (9) за часом, отримаємо, враховуючи (5), що $\dot{S}_2 = \dot{\eta}_4 - \dot{\bar{\eta}}_4 = u - \dot{\bar{\eta}}_4$.

Обравши керування

$$u = -c_2 S_2 + \dot{\bar{\eta}}_4, \quad (11)$$

де $c_2 > 0$ – деяка константа, забезпечимо асимптотичне прямування до нуля величини S_2 при довільному її початковому значенні. Нехай

$$z_1 = \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 \quad (12)$$

та

$$z_2 = \bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4 \quad (13)$$

– похибки фільтрів. Тоді з (6) та (12) отримаємо, що

$$S_1 + z_1 = \eta_3 - \bar{\eta}_3 + \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 = \eta_3 - \tilde{\eta}_3. \quad (14)$$

Аналогічно, з (9) та (13) отримаємо, що

$$S_2 + z_2 = \eta_4 - \bar{\eta}_4 + \bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4 = \eta_4 - \tilde{\eta}_4. \quad (15)$$

Враховуючи співвідношення (7), (8), (12) та (14) і вибираючи $c_1 = 1/\tau_1$, перетворимо (15) наступним чином:

$$S_2 + z_2 = \eta_4 - \tilde{\eta}_4 = \eta_4 + c_1 S_1 - \dot{\bar{\eta}}_3 = \eta_4 + \frac{S_1}{\tau_1} + \frac{z_1}{\tau_1} = \eta_4 + \frac{1}{\tau_1} (\eta_3 - \tilde{\eta}_3). \quad (16)$$

Тоді, вибираючи $c_2 = 1/\tau_2$ і враховуючи (10), (13), (16), з (11) отримаємо вираз для керування:

$$u = -c_2 S_2 + \dot{\bar{\eta}}_4 = -c_2 S_2 - \frac{z_2}{\tau_2} = -\frac{1}{\tau_2} (S_2 + z_2) = -\frac{\eta_4}{\tau_2} - \frac{\eta_3}{\tau_1 \tau_2} + \frac{\tilde{\eta}_3}{\tau_1 \tau_2}. \quad (17)$$

Таким чином, оскільки τ_1 і τ_2 можуть бути довільними додатними як завгодно малими константами, то система диференціальних рівнянь (5) при керуванні (17) є різномповною і має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2; \quad \dot{\eta}_2 = -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \eta_3) - KJ(p)(\eta_1 - \eta_3)^3 - \varepsilon(p)J(p)\sin(\eta_1); \\ \dot{\eta}_3 &= \eta_4; \quad \tau_2\dot{\eta}_4 = -\eta_4 - \frac{\eta_3}{\tau_1} + \frac{\tilde{\eta}_3}{\tau_1}.\end{aligned}\quad (18)$$

Нехай $\tilde{\eta}_3 = \Theta_1$, де Θ_1 – розв’язок рівняння

$$(\Theta - \Theta_1) + K(\Theta - \Theta_1)^3 + \varepsilon(p)\sin(\Theta) = 0. \quad (19)$$

Оскільки величина $Q = \left(\frac{1}{3K}\right)^3 + \left(\frac{\varepsilon(p)}{2K}\sin(\Theta)\right)^2$ додатня для всіх $p \in P$, то рівняння (19) має один дійсний корінь, який може визначитися за формулою Кардано:

$$\Theta_1 = \Theta - \sqrt[3]{-\frac{\varepsilon(p)}{2K}\sin(\Theta) + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{\varepsilon(p)}{2K}\sin(\Theta) - \sqrt{Q}}.$$

Виберемо константи фільтрів $\tau_1 = \tau_2 = 1$. Тоді керування (17) має вигляд

$$u = -\eta_4 - \eta_3 + \Theta_1, \quad (20)$$

а система диференціальних рівнянь (18) –

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2; \\ \dot{\eta}_2 &= -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \eta_3) - KJ(p)(\eta_1 - \eta_3)^3 - \varepsilon(p)J(p)\sin(\eta_1); \\ \dot{\eta}_3 &= \eta_4; \quad \dot{\eta}_4 = -\eta_4 - \eta_3 + \Theta_1.\end{aligned}\quad (21)$$

Зауважимо, що при іншому виборі значення $\tilde{\eta}_3$ та констант фільтрів отримаємо інший вигляд керування (17). При зменшенні величин τ_1 та τ_2 пришвидшиться прямування траєкторій системи (18) до бажаних рівноважних значень, проте збільшиться амплітуда коливань керованих величин. Отже, вибір констант фільтрів в кожному конкретному випадку залежить від задачі керування. Методика побудови відповідної функції Ляпунова та доведення стійкості бажаного стану рівноваги при цьому не зміниться. Тому вибір констант фільтрів рівними одиниці в даній роботі зумовлений простотою викладення матеріалу.

4. Дослідження стійкості.

Враховуючи (19), перетворимо друге рівняння системи диференціальних рівнянь наступним чином:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_2 &= -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \eta_3) - KJ(p)(\eta_1 - \eta_3)^3 - \varepsilon(p)J(p)\sin(\eta_1) = \\ &= -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \eta_3 - (\Theta - \Theta_1)) - J(p)(\Theta - \Theta_1) - \\ &- 3KJ(p)(\eta_1 - \eta_3)^2(\Theta - \Theta_1) + 3KJ(p)(\eta_1 - \eta_3)(\Theta - \Theta_1)^2 - KJ(p)(\Theta - \Theta_1)^3 - \\ &- KJ(p)(\eta_1 - \eta_3 - (\Theta - \Theta_1))^3 - \varepsilon(p)J(p)(\sin(\eta_1) - \sin(\Theta)) - \varepsilon(p)J(p)\sin(\Theta) = \\ &= -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \Theta - \eta_3 + \Theta_1) - KJ(p)(\eta_1 - \Theta - \eta_3 + \Theta_1)^3 - \\ &- \varepsilon(p)J(p)(\sin(\eta_1) - \sin(\Theta)) - 3KJ(p)(\eta_1 - \Theta - \eta_3 + \Theta_1)^2(\Theta - \Theta_1) -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6KJ(p)(\eta_1 - \eta_3)(\Theta - \Theta_1)^2 + 3KJ(p)(\Theta - \Theta_1)^3 + 3KJ(p)(\eta_1 - \eta_3)(\Theta - \Theta_1)^2 = \\
& = -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \Theta - \eta_3 + \Theta_1) - \\
& -KJ(p)(\eta_1 - \Theta - \eta_3 + \Theta_1)^3 - \varepsilon(p)J(p)(\sin(\eta_1) - \sin(\Theta)) - \\
& -3KJ(p)(\eta_1 - \Theta - \eta_3 + \Theta_1)^2(\Theta - \Theta_1) - 3KJ(p)(\eta_1 - \Theta - \eta_3 + \Theta_1)(\Theta - \Theta_1)^2.
\end{aligned}$$

Тоді, заміною змінних

$$x = \eta_1 - \Theta - \eta_3 + \Theta_1; \quad y = \eta_2; \quad \varphi = \eta_3 - \Theta_1; \quad \psi = \eta_4, \quad (22)$$

яка, очевидно, є невинродженою, система диференціальних рівнянь (21) може бути представлена у вигляді

$$\begin{aligned}
& \dot{x} = y - \psi; \\
& \dot{y} = -B_1(p)J(p)y - J(p)x - KJ(p)x^3 - 3KJ(p)(\Theta - \Theta_1)x^2 - \\
& -3KJ(p)(\Theta - \Theta_1)^2x - \varepsilon(p)J(p)(\sin(x + \varphi + \Theta) - \sin(\Theta)); \\
& \dot{\varphi} = \psi; \quad \dot{\psi} = -\psi - \varphi.
\end{aligned} \quad (23)$$

Розглянемо скалярну функцію $V(x, y, \varphi, \psi, p): R^4 \times R^n \rightarrow R$ наступного вигляду:

$$V(x, y, \varphi, \psi, p) = \frac{1}{2}(x, y, \varphi, \psi)M(p)(x, y, \varphi, \psi)^T + 2 \int_0^x f(\xi, p) d\xi, \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned}
f(\xi, p) &= J(p)\xi + KJ(p)\xi^3 + 3KJ(p)(\Theta - \Theta_1)\xi^2 + \\
& + 3KJ(p)(\Theta - \Theta_1)^2\xi + \varepsilon(p)J(p)(\sin(\xi + \Theta) - \sin(\Theta));
\end{aligned}$$

$$M(p) = \begin{pmatrix} (B_1(p)J(p))^2 & B_1(p)J(p) & 0 & 0 \\ B_1(p)J(p) & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & F(p) + G(p) & G(p) \\ 0 & -2 & G(p) & F(p) \end{pmatrix};$$

$$G(p) = 1 + \frac{4(1 - \varepsilon(p))(1 + \varepsilon(p)J(p))^2 + B_1^2(p)\varepsilon^2(p)J^3(p)}{4B_1(p)J(p)(1 - \varepsilon(p))};$$

$$F(p) = \max \left\{ 1 + \frac{4 - G(p) + \sqrt{(4 - G(p))^2 + 4(G^2(p) + 4G(p))}}{2}, \right.$$

$$\left. G(p) + 1 + \max \left\{ 0, \frac{\frac{(B_1(p)J(p))^2}{2} \Delta_1(p) - \frac{(B_1(p)J(p) + 2)}{2} \Delta_2(p) + \varepsilon(p)J(p)\Delta_3(p)}{B_1^2(p)J^3(p)(1 - \varepsilon(p))} \right\} \right\};$$

$$\Delta_1(p) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{B_1(p)\varepsilon(p)J^2(p)}{2} & \frac{(B_1(p)J(p))^2}{2} \\ -B_1(p)J(p) & 1 + \varepsilon(p)J(p) & \frac{B_1(p)J(p) + 2}{2} \\ 1 + \varepsilon(p)J(p) & -G(p) & \varepsilon(p)J(p) \end{pmatrix};$$

$$\Delta_2(p) = \det \begin{pmatrix} -B_1(p)J^2(p)(1 - \varepsilon(p)) & \frac{B_1(p)\varepsilon(p)J^2(p)}{2} & \frac{(B_1(p)J(p))^2}{2} \\ 0 & 1 + \varepsilon(p)J(p) & \frac{B_1(p)J(p) + 2}{2} \\ \frac{B_1(p)\varepsilon(p)J^2(p)}{2} & -G(p) & \varepsilon(p)J(p) \end{pmatrix};$$

$$\Delta_3(p) = \det \begin{pmatrix} -B_1(p)J^2(p)(1 - \varepsilon(p)) & 0 & \frac{(B_1(p)J(p))^2}{2} \\ 0 & -B_1(p)J(p) & \frac{B_1(p)J(p) + 2}{2} \\ \frac{B_1(p)\varepsilon(p)J^2(p)}{2} & 1 + \varepsilon(p)J(p) & \varepsilon(p)J(p) \end{pmatrix},$$

$\det(A)$ – детермінант матриці A .

Нехай область $P_1 \subseteq P$ така, що $0 < \varepsilon(p) < 1$ для всіх p з P_1 . Тоді легко бачити, що $G(p) > 0$, $F(p) > 0$ і головні мінори матриці $M(p)$ до третього порядку включно додатні для всіх p з P_1 . Визначимо знак детермінанта матриці $M(p)$. Як бачимо,

$$\det(M(p)) = (B_1(p)J(p))^2 \left[F^2(p) + F(p)(G(p) - 4) - (G^2(p) + 4G(p)) \right] > 0,$$

$$\text{якщо } (4 - G(p))^2 + 4(G^2(p) + 4G(p)) \geq 0$$

$$\text{і } F(p) > \frac{4 - G(p) + \sqrt{(4 - G(p))^2 + 4(G^2(p) + 4G(p))}}{2},$$

що, очевидно, виконується для всіх p з P_1 і запропонованого значення $F(p)$. Тому, згідно критерію Сильвестра, матриця $M(p)$ додатньо визначена для всіх p з P_1 .

Покажемо, що $\int_0^x f(\xi, p) d\xi > 0$ для всіх x з $R \setminus \{0\}$ та всіх p з P_1 . Для цього достатньо, щоб $f(x, p)/x > 0$ для всіх x з $R \setminus \{0\}$ та всіх p з P_1 . Оскільки, згідно формули Лагранжа про скінченні прирости, $\sin(x + \Theta) - \sin(\Theta) = \cos(\hat{x} + \Theta)x$, де \hat{x} – деяка точка з R , то

$$\frac{f(x, p)}{x} = J(p) \left[K \left(x + \frac{3}{2}(\Theta - \Theta_1) \right)^2 + \frac{3}{4}K(\Theta - \Theta_1)^2 + (1 + \varepsilon(p)\cos(\hat{x} + \Theta)) \right] > 0$$

для всіх x з $R \setminus \{0\}$ та всіх p з P_1 , звідки випливає бажана оцінка.

Отже, функція (24) приймає невід'ємні значення у всіх точках простору $R^4 \times P_1$, причому рівність нулю досягається лише при $x = y = \varphi = \psi = 0$, тобто функція (24) додатньо визначена.

Знайдемо похідну функції (24) за часом в силу системи диференціальних рівнянь (23).

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dV(x, y, \varphi, \psi, p)}{dt} \right|_{(23)} &= (B_1(p)J(p))^2 x\dot{x} + 2y\dot{y} + B_1(p)J(p)\dot{x}y + B_1(p)J(p)x\dot{y} + \\
&+ (F(p) + G(p))\varphi\dot{\varphi} + F(p)\psi\dot{\psi} + G(p)\dot{\varphi}\psi + G(p)\varphi\dot{\psi} - 2\dot{y}\psi - 2y\dot{\psi} = \\
&= -B_1(p)J^2(p) \left[K \left(x + \frac{3}{2}(\Theta - \Theta_1) \right)^2 + \frac{3}{4}K(\Theta - \Theta_1)^2 + \varepsilon(p)(1 + \cos(\hat{x} + \Theta)) \right] x^2 - \\
&- B_1(p)J^2(p)(1 - \varepsilon(p))x^2 - B_1(p)J(p)y^2 - G(p)\varphi^2 - (F(p) - G(p))\psi^2 - \\
&- (B_1(p)J(p))^2 x\psi + (2 - 2\varepsilon(p)J(p)\cos(x + \hat{\varphi} + \Theta))y\varphi + (B_1(p)J(p) + 2)y\psi - \\
&- B_1(p)\varepsilon(p)J^2(p)\cos(x + \hat{\varphi} + \Theta)x\varphi + 2\varepsilon(p)J(p)\cos(x + \hat{\varphi} + \Theta)\varphi\psi.
\end{aligned} \tag{25}$$

Тут було використано, що, згідно формули Лагранжа про скінченні прирости, $\sin(x + \Theta) - \sin(\Theta) = \cos(\hat{x} + \Theta)x$ та $\sin(x + \varphi + \Theta) - \sin(\Theta) = \sin(x + \Theta) - \sin(\Theta) + \cos(x + \hat{\varphi} + \Theta)\varphi$, де \hat{x} та $\hat{\varphi}$ – деякі точки з R .

Таким чином, із співвідношення (25) отримуємо оцінку для похідної функції (24) за часом в силу системи диференціальних рівнянь (23):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dV(x, y, \varphi, \psi, p)}{dt} \right|_{(23)} &= (x, y, \varphi, \psi)N(p)(x, y, \varphi, \psi)^T - \\
&- B_1(p)J^2(p) \left[K \left(x + \frac{3}{2}(\Theta - \Theta_1) \right)^2 + \frac{3}{4}K(\Theta - \Theta_1)^2 + \varepsilon(p)(1 + \cos(\hat{x} + \Theta)) \right] x^2,
\end{aligned} \tag{26}$$

де

$$N(p) = \begin{pmatrix} -B_1(p)J^2(p)(1 - \varepsilon(p)) & 0 & \frac{B_1(p)\varepsilon(p)J^2(p)}{2} & \frac{(B_1(p)J(p))^2}{2} \\ 0 & -B_1(p)J(p) & 1 + \varepsilon(p)J(p) & \frac{B_1(p)J(p) + 2}{2} \\ \frac{B_1(p)\varepsilon(p)J^2(p)}{2} & 1 + \varepsilon(p)J(p) & -G(p) & \varepsilon(p)J(p) \\ \frac{(B_1(p)J(p))^2}{2} & \frac{B_1(p)J(p) + 2}{2} & \varepsilon(p)J(p) & -(F(p) - G(p)) \end{pmatrix}.$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка містить основний результат даної роботи.

Теорема. Для всіх значень параметра p з області $P_1 \subseteq P$, які задовільняють співвідношення $\varepsilon(p) < 1$, керування вигляду (20), де величина Θ_1 визначається з (19) при відповідному значенні параметра p , забезпечує глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги $\eta_1 = \Theta$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = \Theta_1$, $\eta_4 = 0$ системи диференціальних рівнянь (21).

Доведення. Виберемо довільне значення параметра p^* з області P_1 , знайдемо відповідний розв'язок Θ_1^* рівняння (19) і розглянемо систему диференціальних рів-

нянь (21) при $p = p^*$ і $\Theta_1 = \Theta_1^*$. Заміною змінних (22), де $\Theta_1 = \Theta_1^*$, система диференціальних рівнянь (21) може бути представлена у вигляді (23), де $p = p^*$ і $\Theta_1 = \Theta_1^*$. Очевидно, що глобальна асимптотична стійкість стану рівноваги $\eta_1 = \Theta$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = \Theta_1^*$, $\eta_4 = 0$ системи диференціальних рівнянь (21) еквівалентна глобальній асимптотичній стійкості стану рівноваги $x = 0$, $y = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ системи диференціальних рівнянь (23), оскільки заміна змінних (22) невироджена.

Розглянемо функцію $V(x, y, \varphi, \psi, p^*)$ вигляду (24). Як було показано, для всіх p з P_1 , а, отже, і для p^* , ця функція додатньо визначена. Крім того, вона, очевидно, нескінченно велика, а для її похідної за часом в силу системи диференціальних рівнянь (23) при $p = p^*$ і $\Theta_1 = \Theta_1^*$ має місце оцінка (26), де $p = p^*$ і $\Theta_1 = \Theta_1^*$.

Очевидно, що

$$-B_1(p^*)J^2(p^*) \left[K \left(x + \frac{3}{2}(\Theta - \Theta_1^*) \right)^2 + \frac{3}{4}K(\Theta - \Theta_1^*)^2 + \varepsilon(p^*)(1 + \cos(\hat{x} + \Theta)) \right] x^2 < 0$$

для всіх x з R . Покажемо, що матриця $N(p^*)$ від'ємно визначена. Для цього визначимо її головні мінори:

$$\tilde{\Delta}_1(p^*) = -B_1(p^*)J^2(p^*)(1 - \varepsilon(p^*)) < 0; \quad \tilde{\Delta}_2(p^*) = -B_1^2(p^*)J^3(p^*)(1 - \varepsilon(p^*)) > 0;$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_3(p^*) = & G(p^*)(-B_1^2(p^*)J^3(p^*)(1 - \varepsilon(p^*))) + B_1(p^*)J^2(p^*)(1 - \varepsilon(p^*))(1 + \varepsilon(p^*)J(p^*))^2 + \\ & + B_1(p^*)J(p^*) \left(\frac{B_1(p^*)\varepsilon(p^*)J^2(p^*)}{2} \right)^2 = -B_1^2(p^*)J^3(p^*)(1 - \varepsilon(p^*)) < 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(N(p^*)) = & -\frac{(B_1(p^*)J(p^*))^2}{2} \Delta_1(p^*) + \frac{(B_1(p^*)J(p^*) + 2)}{2} \Delta_2(p^*) - \varepsilon(p^*)J(p^*)\Delta_3(p^*) + \\ & + (F(p^*) - G(p^*))B_1^2(p^*)J^3(p^*)(1 - \varepsilon(p^*)) > 0, \end{aligned}$$

згідно вибору $F(p^*)$. Таким чином, згідно критерія Сильвестра, матриця $N(p^*)$ від'ємно визначена.

Отже, з оцінки (26) при $p = p^*$ і $\Theta_1 = \Theta_1^*$ впливає від'ємна визначеність похідної функції $V(x, y, \varphi, \psi, p^*)$ за часом в силу системи диференціальних рівнянь (23) при $p = p^*$ і $\Theta_1 = \Theta_1^*$. Тобто, функція $V(x, y, \varphi, \psi, p^*)$ є функцією Ляпунова, яка в силу теореми 12.1 [1], дозволяє встановити глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (23) при $p = p^*$ і $\Theta_1 = \Theta_1^*$, а, отже, глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги $\eta_1 = \Theta$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = \Theta_1^*$, $\eta_4 = 0$ системи диференціальних рівнянь (21) при $p = p^*$ і $\Theta_1 = \Theta_1^*$. Оскільки p^* – довільне значення параметра з області P_1 , то теорему повністю доведено.

Зауваження 2. Нехай для деякого значення параметра p^* з області P_1 побудовано керування вигляду (20), яке глобально асимптотично стабілізує стан рівноваги $\eta_1 = \Theta$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = \Theta_1^*$, $\eta_4 = 0$ системи диференціальних рівнянь (21), де величина Θ_1^* є розв'язком рівняння (19) при $p = p^*$. Тоді, враховуючи (4), та переходячи до

розмірних величин, керування Δ , яке забезпечить глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху одноланкового маніпулятора із нелінійним пружним з'єднанням до заданої програмної траєкторії, яка задається співвідношенням $q_1 = \Theta$, $\dot{q}_1 = 0$, у той час, як електродвигун, що здійснює керування, припинить обертатися, має вигляд

$$\Delta = \dot{q}_2(b_2 - \sqrt{J_2 K_1}) - K_1(q_1 - \Theta_1^*) - K_2(q_1 - q_2)^3. \quad (27)$$

Зауваження 3. Як впливає із Зауваження 2, для кожного значення параметра p^* з області $P_1 \subseteq P$ існує керування вигляду (27), яке вирішує поставлену задачу керування для одноланкового маніпулятора із нелінійно пружним з'єднанням. Визначимо область $P_2 \subseteq P$ зміни значень параметра p таку, щоб для всіх p з P_2 керування (27) також вирішувало поставлену задачу керування. Покажемо, що якщо ε явно залежить від p , то $P_2 = \{p \in P \mid m(p)l(p) = m(p^*)l(p^*)\}$. Нехай \hat{p} – довільне значення параметра з області P_2 . Тоді $m(\hat{p})l(\hat{p}) = m(p^*)l(p^*)$, тобто $\varepsilon(\hat{p}) = \varepsilon(p^*)$ і розв'язком рівняння (19) при $p = \hat{p}$ буде, очевидно, $\Theta_1 = \Theta_1^*$. Оскільки $\varepsilon(\hat{p}) = \varepsilon(p^*)$, тобто $0 < \varepsilon(\hat{p}) < 1$, то як впливає з доведення Теорема, функція $V(x, y, \varphi, \psi, \hat{p})$ є функцією Ляпунова, яка дозволяє встановити глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (23) при $p = \hat{p}$ і $\Theta_1 = \Theta_1^*$, або, що те саме, глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги $\eta_1 = \Theta$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = \Theta_1^*$, $\eta_4 = 0$ системи диференціальних рівнянь (21) при $p = \hat{p}$ і $\Theta_1 = \Theta_1^*$. А це означає, що керування вигляду (20) при $\Theta_1 = \Theta_1^*$, або, як впливає із Зауваження 2, керування (27) вирішує поставлену задачу керування для одноланкового маніпулятора із пружним з'єднанням при $p = \hat{p}$. Так як \hat{p} – довільне значення параметра з області P_2 , то для всіх значень параметра p з області P_2 керування (27) вирішує поставлену задачу керування.

Відмітимо, що якщо величина ε явно не залежить від параметра, то незмінними є величини m та l , тобто незмінними є момент інерції J_1 і, відповідно, величина J . Тоді, залежною від параметра є лише величина $B_1(p)$ або коефіцієнт демпфування $b_1(p)$. Як впливає з доведення теорема, в цьому випадку область P_2 співпадає з P . Також, якщо параметри, від яких залежать величини $\varepsilon(p_1)$ та $B_1(p_2)$ є незалежними, тобто область $P = P_3 \cup P_4$, $P_3 \cap P_4 = \emptyset$, $p_1 \in P_3$, $p_2 \in P_4$ то, очевидно, що область $P_2 = \tilde{P}_3 \cup P_4$, де $\tilde{P}_3 = \{p_1 \in P_1 \subseteq P_3 \mid m(p_1)l(p_1) = m(p^*)l(p^*)\}$. При цьому області P_3 та P_4 містять лише допустимі значення параметрів в контексті Зауваження 1. Таким чином, Зауваження 3 можна використовувати для визначення області робастності керування (27).

5. Приклад.

Проілюструємо отримані результати на прикладі конкретної моделі. Нехай параметри моделі такі: $m = 1$ кг, $l = 2$ м, $g = 9,8$ м/с², $b_1 = 30 \frac{\text{кг} \times \text{м}^2}{\text{с}}$, $b_2 = 10 \frac{\text{кг} \times \text{м}^2}{\text{с}}$, $J_1 = \frac{1}{3} ml^2$, $J_2 = 1 \text{кг} \times \text{м}^2$, $K_1 = 100 \frac{\text{кг} \times \text{м}^2}{\text{с}^2}$, $K_2 = 10 \frac{\text{кг} \times \text{м}^2}{\text{с}^2}$. Вважаємо, що значення величин є точними, тобто не залежать від параметра.

Наведемо приклад, який демонструє важливість врахування нелінійності сили пружності пружини, якою моделюється трансмісія, від зміщення. На рис. 2 представлено порівняння траєкторій системи диференціальних рівнянь (1), що ілюструє динаміку

моделі одноланкового маніпулятора при запропонованих значеннях параметрів моделі (штрихова лінія) та припускаючи, що параметр K_2 , який відповідає за нелінійні члени залежності сили, яка виникає при деформації пружини, від зміщення, рівний нулю (суцільна лінія). Керування має вигляд $\Delta = (b_2 - \sqrt{J_2 K_1})\dot{q}_2 - K_1(q_1 - q_2)$ і початкові значення змінних в обох випадках однакові: $q_1 = 3$, $\dot{q}_1 = 100$, $q_2 = -1$, $\dot{q}_2 = 10$.

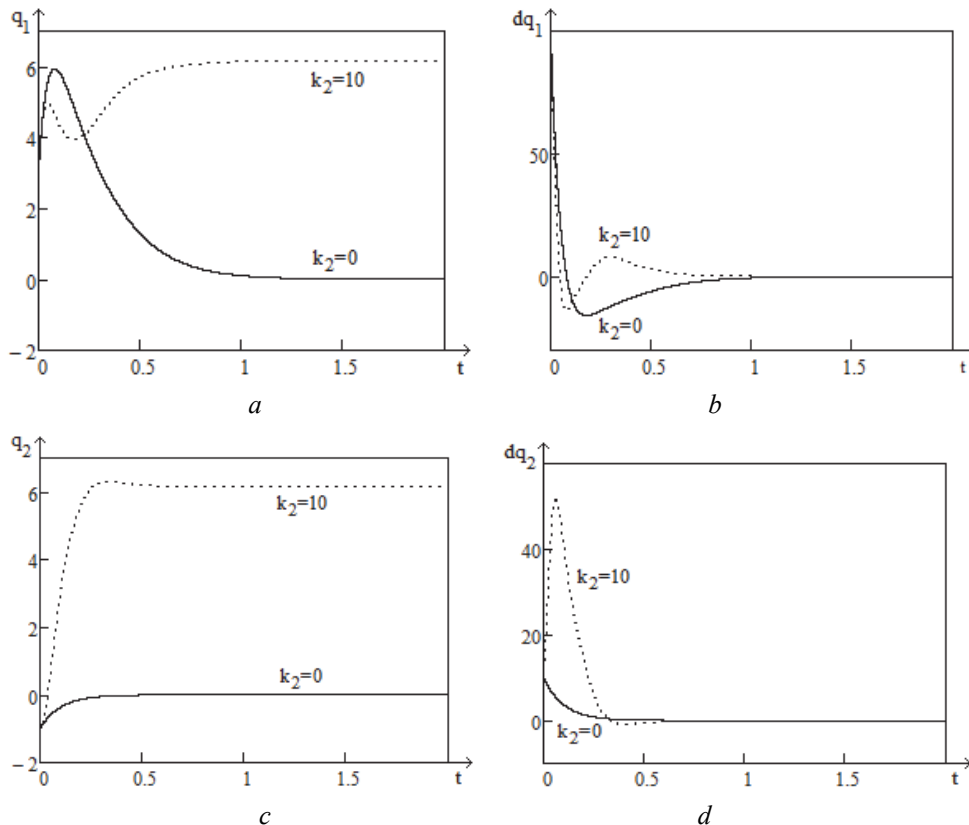


Рис. 2

Побудуємо керування, яке забезпечить глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху одноланкового маніпулятора із пружним з'єднанням до програмної траєкторії, яка задається співвідношеннями $q_1 = -2$, $\dot{q}_1 = 0$ у той час, як електродвигун, який здійснює керування, припинить обертатися. Оскільки величина $\varepsilon = 0,196$ задовольняє умову Теорема, то таке керування, згідно Зауваження 2 має вигляд $\Delta_1 = -100(q_1 - \Theta_1^*) - 10(q_1 - q_2)^3$, де $\Theta_1^* = -2,178$ є розв'язком рівняння (19) при $\Theta = -2$. Як бачимо, для даної моделі $b_2 - \sqrt{J_2 K_1} = 0$, тому керування не залежить від швидкості обертання електродвигуна. Аналогічно, керування, яке забезпечить глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху одноланкового маніпулятора із пружним з'єднанням до програмної траєкторії, яка задається співвідношеннями $q_1 = 2$, $\dot{q}_1 = 0$ у той час, як електродвигун, який здійснює керування, припинить обертатися, має вигляд $\Delta_2 = -100(q_1 - \Theta_2^*) - 10(q_1 - q_2)^3$, де $\Theta_2^* = 2,178$ є розв'язком рівняння (19) при $\Theta = 2$.

Еволюція змінних q_1 і q_2 , їх швидкостей зміни \dot{q}_1 і \dot{q}_2 та керувань Δ_1 і Δ_2 при їх послідовному застосуванні до електродвигуна показані на рис. 3. Початкові зна-

чення змінних $q_1 = 0$, $\dot{q}_1 = 10$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = -10$. Як бачимо, керування Δ_1 та Δ_2 вирішують поставлені задачі.

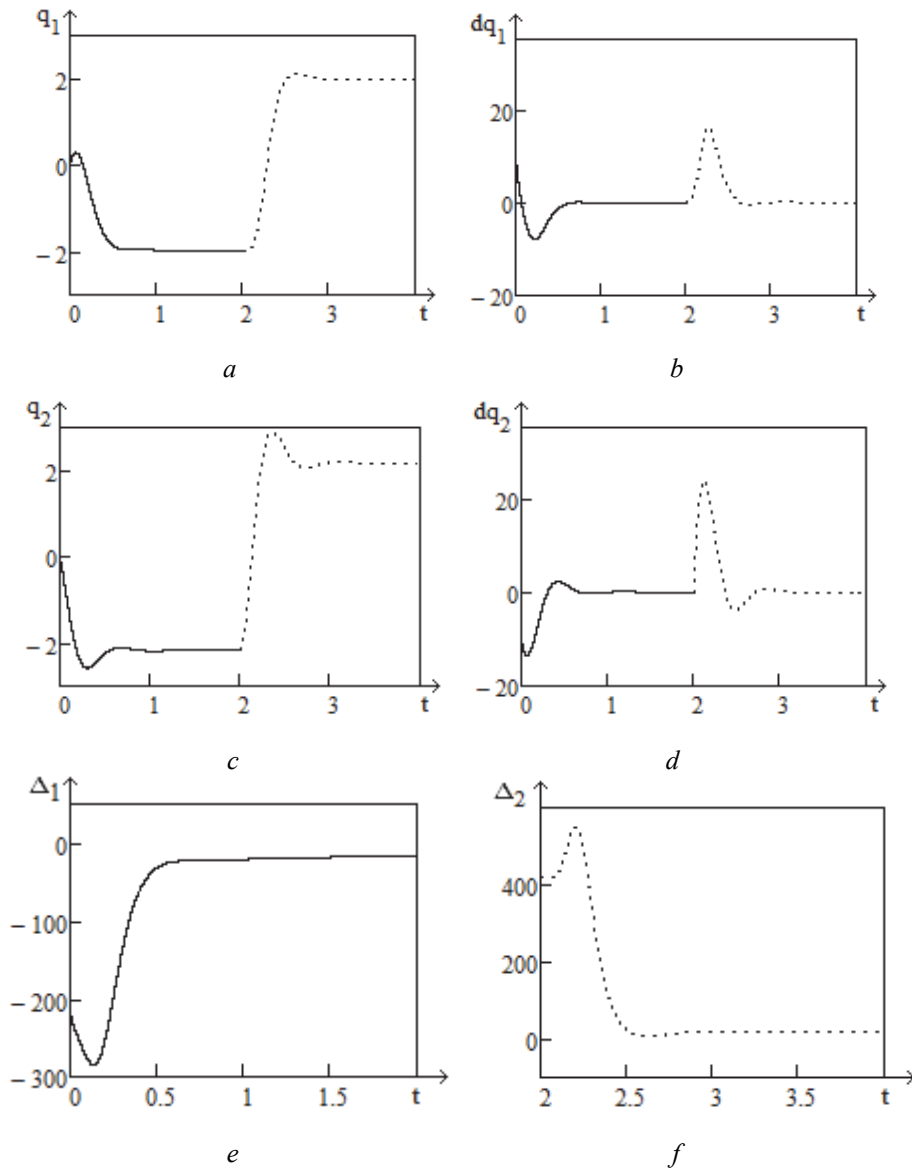


Рис. 3

Припустимо, що маса ланки маніпулятора, її довжина та коефіцієнт демпфування при її обертанні задані неточно. В цьому випадку вважаємо їх залежними від параметрів: $m(p_1) = 1 + p_1$, $l(p_2) = 2 + p_2$, $b_1(p_3) = 30 + p_3$. Знайдемо область зміни параметрів, при всіх значеннях параметра з якої керування Δ_1 вирішує поставлену задачу керування для програмної траєкторії $q_1 = -2$, $\dot{q}_1 = 0$. У цьому випадку $p_1^* = 0$, $p_2^* = 0$, $p_3^* = 0$ і $P = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \mid p_1 > -1, p_2 > -2, p_3 > -30\}$. Згідно Зауваження 3, оскільки параметри, від яких залежать величини $\varepsilon(p_1, p_2)$ та $B_1(p_3)$ є незалежними, то область $P_2 = \{(p_1, p_2, p_3) \in P \mid (1 + p_1)(2 + p_2) = 2\} = \left\{ (p_1, p_2, p_3) \in P \mid p_2 = -\frac{2p_1}{1 + p_1} \right\}$.

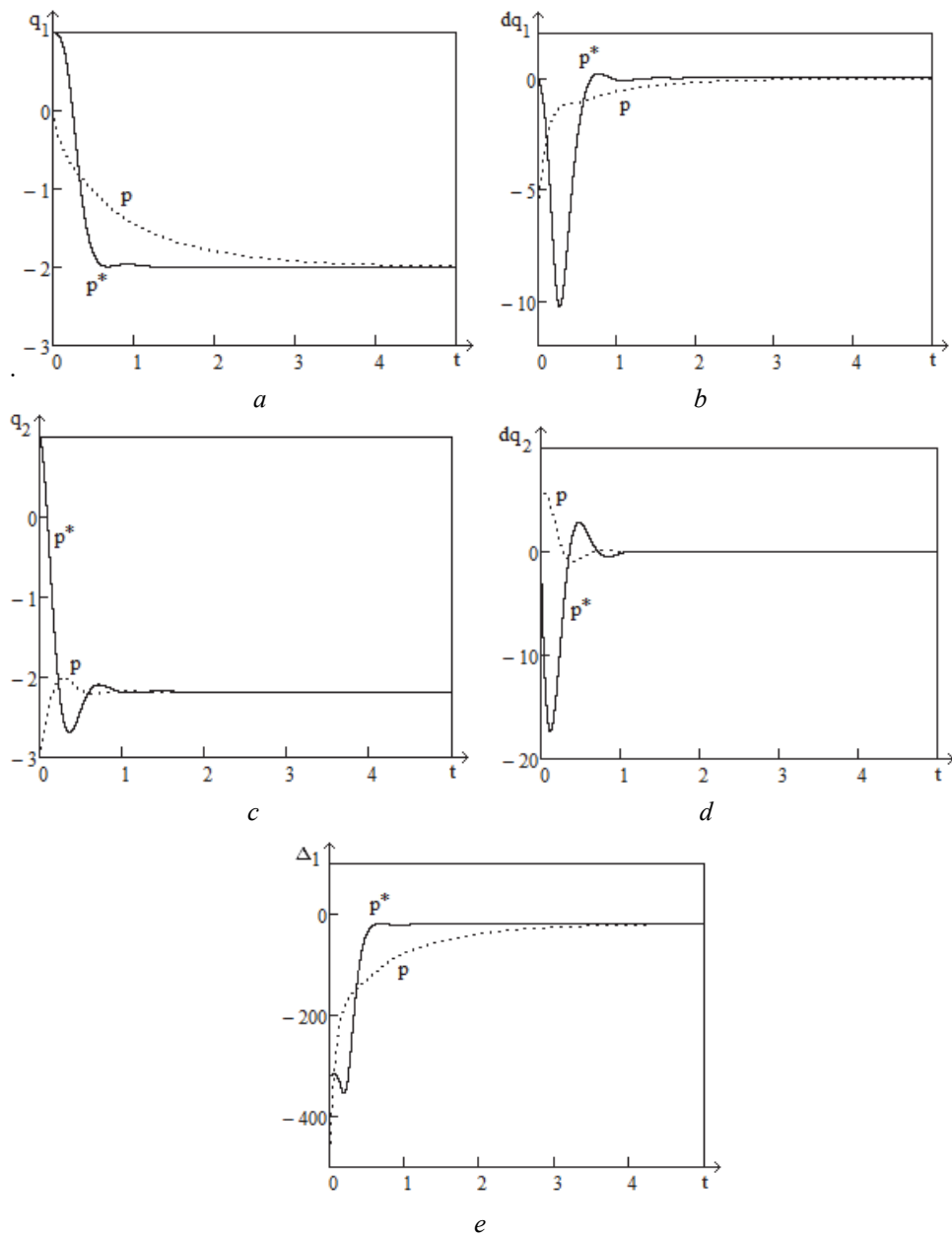


Рис.4

На рис. 4 показано поведінку моделі при $p_1=1$, $p_2=-1$, $p_3=70$ і початкових значеннях змінних $q_1=0$, $\dot{q}_1=-5$, $q_2=-3$, $\dot{q}_2=5$ у порівнянні із її поведінкою при $p_1=p_1^*$, $p_2=p_2^*$, $p_3=p_3^*$ і початкових значеннях змінних $q_1=1$, $\dot{q}_1=0$, $q_2=1$, $\dot{q}_2=0$. Як бачимо, керування Δ_1 вирішує задачу керування для заданої програмної траєкторії і значень параметрів із знайденої області можливої їх зміни.

Заключні зауваження.

В роботі отримано закон обертання електродвигуна, який забезпечує глобальне асимптотичне прямування траєкторії руху моделі одноланкового маніпулятора із пружним з'єднанням до заданої програмної траєкторії, що задається співвідношен-

ням $q_1 = \Theta$, $\dot{q}_1 = 0$ у той час, як електродвигун припинить обертатися. Пружність з'єднання моделюється торсіонною пружиною, сила пружності якої вважається нелінійно залежною від зміщення. Цей факт унеможливило застосування звичайного підходу і значно ускладнює задачу побудови керування. Також складності додає те, що деякі параметри моделі можуть бути задані неточно і певним чином залежати від деякого числового параметра (вимагається лише неперервність цієї залежності та «допустимість» значень параметрів в контексті Зауваження 1), область зміни якого наперед невідома. Проте, застосування техніки ДКП дозволяє отримати бажане керування. Запропоновано розвиток методу ДКП, який полягає у специфічному виборі параметрів і констант фільтрів. Це дозволяє уникнути зростання порядку допоміжної системи, а також явища значного ускладнення вигляду як допоміжної системи диференціальних рівнянь, так і закону керування, так званого «вибуху членів», внаслідок того, що потрібно диференціювати за часом в силу системи (можливо декілька разів) певну, часто нелінійну, функцію. В даному випадку ця функція входить в закон керування без диференціювання. Це, в свою чергу, спрощує доведення того факту, що отримане керування вирішує поставлену задачу керування методом функцій Ляпунова. Оскільки відсутні регулярні методи побудови функцій для більшості нелінійних систем диференціальних рівнянь, то в більшості випадків побудова в явному вигляді бажаної функції Ляпунова для такої системи являє собою складну задачу. Зниження порядку системи диференціальних рівнянь та спрощення її вигляду дозволили в даному випадку отримати в явному вигляді відповідну допоміжну функцію та з її допомогою довести, що запропоноване керування вирішує поставлену задачу керування. Також доведено робастність такого керування та визначено область робастності у просторі параметрів системи. Отримані результати проілюстровані на прикладі конкретної механічної моделі.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Побудовано керування обертанням електромотора, яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість довільного положення одноланкового маніпулятора із нелінійно пружним з'єднанням. Доведено робастність такого керування і запропоновано спосіб оцінки області робастності у просторі параметрів механічної системи. Отримані результати проілюстровано на прикладі конкретної моделі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: одноланковий маніпулятор, нелінійно пружне з'єднання, малоприводна механічна система, динамічне керування по поверхні, низькочастотний фільтр, швидко-повільна система.

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 223 с.
2. Bridges M.M., Dawson D.M. Redesign of Robust Controllers for Rigid Link FJ Robotic Manipulators Actuated with Harmonic Drive // Proc. IEE – Contr. Theory Appl. – 1995. – **142**, N 5, – P. 508 – 514.
3. Good M.C., Sweet L.M., Strobel K.L. Dynamic models for control system design of integrated robot and drive systems // ASME J. Dynam. Syst., Meas., Contr. – 1985. – **107**. – P. 53 – 59.
4. De Luca A. Dynamic Control of Robots with Joint Elasticity // Proc. of the 33rd IEEE Conf. on Robotics and Automation. – Philadelphia, PA, USA, 1988. – P. 152 – 158.
5. Doelman R.B. Feedback linearization control of a single link manipulator with joint elasticity // DCT rapporten. – Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 1991. – 47 p.
6. Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D. Parametric stability // Proc. of the Univesita di Genova and Ohio State University Joint Conference. – Boston, MA, USA, 1991. – P. 1 – 20.
7. Khoroshun A.S. Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum by Spinning an Inertial Flywheel // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 547 – 556.

8. Liu Y., Yu H. A survey of underactuated mechanical systems // IET Control Theory Appl. – 2013. – 7, N 7. – P. 921 – 935.
9. Loveikin V.S., Romasevich Y.A., Khoroshun A.S. Time-optimal Control of a Simple Pendulum with a Movable Pivot. Part 2. // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 2. – P. 208 – 215.
10. Loveikin V.S., Romasevich Y.A., Khoroshun A.S. Optimal Stabilization Control of an Inverted Pendulum with a Flywheel. Part 1. // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 4. – P. 462 – 470.
11. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Yu.A. Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control. – Boca Raton: CRC Press, Taylor and Francis, 2012. – 296 p.
12. Ozgoli S., Taghirad H.D. A survey on the control of flexible joint robots // Asian J. of Control. – 2006. – 8, N 4. – P. 332 – 344.
13. Seyffarth W., Maghzal A.J., Angeles J. Nonlinear Modeling and Parameter Identification of Harmonic Drive Robotic Transmissions // Proc. IEEE Int. Conf. Rob. Autom. – Piscataway, NJ, USA, 1995. – P. 3027 – 3032.
14. Song B., Hedrick J.K. Dynamic Surface Control of Uncertain Nonlinear Systems. An LMI Approach. – London: Springer, 2011. – 268 p.
15. Spong M.W. Control of Flexible Joint Robots: A Survey // Coordinated Science Laboratory Report № UILU-ENG-90-2203. – Urbana-Champaign: University of Illinois, 1990. – 29 p.
16. Swaroop D., Hedrick J.K., Yip P.P., Gerdes J.C. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems // IEEE Trans. of Automatic Control. – 2000. – 45, N 11. – P. 1893 – 1899.
17. Tomei P.A. Simple PD Controller for Robots with Elastic Joints // IEEE Trans. of Automatic Control. – 1991. – 36, N 10. – P. 1208 – 1213.
18. Tuttle T.D., Seering W.P. A Nonlinear Model of a Harmonic Drive Gear Transmission // IEEE Trans. Rob. Autom. – 1996. – 12, N 3. – P. 368 – 374.
19. Tuttle T.D. Understanding and modeling the behavior of a harmonic drive gear transmission // Masters thesis, Department of Mechanical Engineering, MIT. – May 1992. – 314p.

Надійшла 16.12.2020

Затверджена до друку 24.06.2021