Ю.М.Кононов

ПРО РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА З ПОРОЖНИНОЮ, ЩО МІСТИТЬ БАГАТОШАРОВУ ІДЕАЛЬНУ РІДИНУ

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
вул. Генерала Батюка, 19, 84116, Донецька область, м. Слов'янськ, Україна;
e-mail: kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Abstract. In a linear formulation, the motion of a rigid body with a cavity containing a heavy multilayer ideal incompressible fluid is considered. An algorithm is given for deriving the countable system of ordinary differential equations describing the forced oscillations of a multilayer fluid for a given motion of a rigid body. Using an example of a cylindrical cavity of arbitrary cross-section, this system of ordinary differential equations was studied for cases of full and partial filling of the cavity, translational vertical and horizontal movements of a rigid body, and oscillations of a rigid body in the form of a physical pendulum. It is shown that in the case of a cavity in the shape of a rectangular parallelepiped, if the perturbing force acts horizontally parallel to its lateral sides, then the waves are excited on the free and internal surfaces of the multilayer fluid asymmetric for the corresponding plane of symmetry of the rectangular parallelepiped. If the cavity is axisymmetric, then only single-node vibrations of the free and internal surfaces are excited. Analytical studies of the frequency equation of free vibrations of a multilayer fluid were carried out for some special cases: full and partial filling of the cavity, infinitely large filling depths, two-layer and three-layer liquids. For identical layers of liquid (constant depth of filling of the layers and a constant ratio of the density of the previous layer to the next), an analytical solution of the frequency equation is obtained.

Key words: rigid body, forced and free oscillations, heavy multilayer ideal Incompressible fluid.

Вступ.

В результаті фізичних, хімічних, біологічних та інших впливів однорідна рідина в порожнині твердого тіла може бути стратифікована, що призводить до появи додаткових ступенів свободи, зміни моментів інерції і центру мас механічної системи. Таким чином, рух твердого тіла з однорідною рідиною може бути стійким, а після стратифікації стати нестійким. У зв'язку з цим виникає питання про вплив стратифікації на динаміку і стійкість руху твердого тіла. В якості найпростішого прикладу стратифікації рідини може виступати багатошарова рідина з кусково-постійною густиною. У статті [4] з принципу найменшої дії в формі Гамільтона – Остроградського виведено рівняння руху фізичного маятника, який містить багатошарову ідеальну рідину. Отримані необхідні та достатні умови стійкості та оцінено вплив стратифікації на стійкість коливання фізичного маятника. Показано, що стратифікація, яка виникла в однорідній рідині, призводить до зменшення запасу стійкості і що високі частоти коливань фізичного маятника мало відрізняються від власних частот коливань багатошарової рідини. Питанням впливу руху твердого тіла на вимушені коливання однорідної ідеальної рідини з вільною поверхнею присвячена дуже велика кількість робіт, досить повний огляд їх можна знайти в сучасних публікаціях [14 – 16] і в роботах минулих років [7, 9, 10, 24, 25]. Також є достатня кількість робіт, в яких досліджується рух твердого тіла з неоднорідною ідеальною і в'язкою рідинами. У статтях [21, 22] розглядається призматичний контейнер квадратного перетину, що здійснює обертальні коливання з двошаровою ідеальною рідиною з вільною поверхнею [21] і без вільної поверхні [22]. Проведено теоретичні та експериментальні дослідження нелінійних вимушених коливань двошарової ідеальної рідини. Математична модель отримана на підставі варіаційного підходу Лагранжа. Для врахування демпфування рідин, введено узагальнені дисипативні сили. Коефіцієнти логарифмічного згасання оцінюються за допомогою вейвлет-аналізу експериментальних вільних коливань двошарової рідини. Чисельне інтегрування математичної моделі дає результати, які знаходяться в досить хорошій злагоді з експериментальними даними. В роботі [27] розглянуто прямокутний резервуар, що здійснює горизонтальні і вертикальні коливання з двошаровою ідеальною рідиною з вільною поверхнею. Використано модель псевдоспектрального σ -перетворення або чебишовського псевдоспектрального матричного елемента (PSME) для моделювання в нелінійній постановці плоских вимушених коливань двошарової рідини з вільною поверхнею. Показано, що рухи рідини в мілких контейнерах сильно залежать від пікноклину при великих частотах збудження.

В [1] представлено механічний аналог, що моделює коливання тришарової ідеальної і тришарової в'язкої рідини в циліндричному резервуарі, а в [2] наведено результати експериментальних і теоретичних досліджень коливань циліндричного резервуара з двошаровою і тришаровою рідиною. Відзначається хороший збіг експериментальних і теоретичних результатів. В рамках лінійної теорії в [23] представлено експериментальні та числові дослідження вимушених коливань тришарової ідеальної рідини в прямокутному резервуарі.

Задача про коливання стратифікованої рідини має самостійне наукове та прикладне значення (проблема поверхневих і внутрішніх озерних сейш [13], розробка мийних баків, встановлених на нафтопромислових платформах [23], проектування капілярних систем відбору рідини (фазороздільних перегородок) в сучасних розгінних блоках [17, 26] та багато іншого).

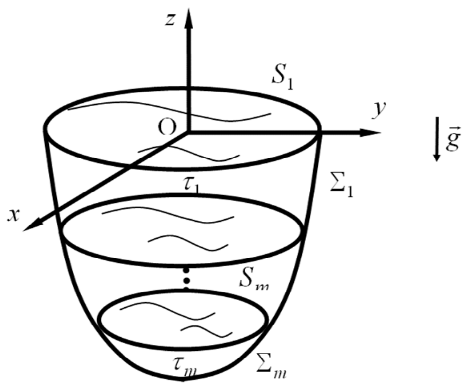
Напевно, одними з перших робіт про власні коливання обмеженої багатошарової ідеальної рідини були [3, 5]. В [3] досліджено вільні коливання безперервно стратифікованої важкої ідеальної рідини в прямокутному резервуарі. Як граничний випадок стратифікації розглядається багатошарова ідеальна рідина. Відзначається задовільний збіг теоретичних та експериментальних значень частот. З позиції функціонального аналізу в [5, 6] розглянуто коливання капілярної багатошарової ідеальної рідини. Показано, що коливання ідеальних рідин, які не змішуються, мають дискретний частотний спектр з єдиною граничною точкою на нескінченності і встановлена можливість застосування варіаційних методів для розв'язання цих задач. У [28] в лінійній постановці досліджуються коливання стратифікованої рідини з густиною, що змінюється по глибині в тривимірному циліндричному резервуарі. Рівняння і граничні умови виписані в термінах функції тиску та функції густини замість потенціалу швидкості для однорідної рідини.

Є роботи, в яких розглядаються і більш складні постановки задач про взаємовплив стратифікації і пружності. Так, наприклад, в [11] досліджено коливання двошарової рідини в прямокутному каналі з пружною бічною стінкою, а в [18, 19] – в циліндричному резервуарі з жорсткою бічною стінкою і пружними основами. В [17, 26] розглянуто осесиметричні коливання в циліндричному резервуарі двошарової ідеальної рідини, яка розділена мембраною. Врахування пружності дна у вигляді мембрани проведено в [17]. У [12] представлені чисельні і аналітичні дослідження горизонтальних коливань під дією керованої нелінійної пружини закритого резервуару з двошаровою ідеальною рідиною з тонкими шарами. Досить повний огляд робіт із задачами гідропружності наведено в [15].

У даній роботі в лінійній постановці розглянуто задачу про рух твердого тіла з довільною порожниною, частково або повністю заповненою важкою багатошаровою ідеальною нестисливою рідиною, що здійснює безвихровий рух. Наведено алгоритм отримання зліченної системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують вимушені коливання багатошарової рідини при заданому русі твердого тіла. На прикладі циліндричної порожнини довільного поперечного перерізу досліджено злічену систему звичайних диференціальних рівнянь при поступальних вертикальних і горизонтальних переміщеннях твердого тіла, а також при коливанні твердого тіла як фізичного маятника. Показано, що для порожнини у вигляді прямокутного паралелепіпеда, якщо збурююча сила діє горизонтально, паралельно до її бічних сторін, то на вільній і внутрішніх поверхнях багатошарової рідини збурюються хвилі, несиметричні щодо відповідних площин симетрії прямокутного паралелепіпеда. Якщо порожнина осесиметрична, то збурюються тільки одновузлові коливання вільної і внутрішніх поверхонь. З варіаційної постановки задачі отримана формула для розрахунку найменшої власної частоти коливань багатошарової рідини. Для циліндричної порожнини довільного поперечного перерізу проведені аналітичні дослідження частотного рівняння вільних коливань багатошарової рідини. Для однакових шарів рідини (постійна глибина заповнення шарів і постійне відношення густини попереднього шару до наступного) отримано аналітичний розв'язок частотного рівняння і проведено його дослідження.

§1. Рух твердого тіла з порожниною, що містить багатошарову ідеальну рідину.

Розглянемо механічну систему, що складається з твердого тіла з порожниною, що містить m важких рідин із густинами ρ_i, які не змішуються та частково або повністю заповнюють область τ $(\tau = \bigcup_{i=1}^{m} \tau_i)$ до глибин h_i. Досліджуються ідеальні, нестисливі рідини, які здійснюють безвихровий рух. Рух рідин розглядатимемо в системі координат $Oxyz$, жорстко пов'язаній з твердим тілом і розташованій так, що площина Oxy перебуває на незбуреній вільній поверхні S_1, а вісь Oz у положенні рівноваги механічної системи спрямована протилежно до вектору прискорення сили тяжіння $\vec{g}$ (рисунок).



Крім неінерціальної системи координат $Oxyz$ введемо в розгляд інерціальну систему O_1XYZ, паралельну системі координат $Oxyz$ в положенні рівноваги. Рух твердого тіла задаватимемо швидкістю $\vec{V}_0$ точки O і кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ та розглядатимемо коливання твердого тіла і рідини в рамках лінійної теорії. Рух рідин будемо вважати потенціальним.

Задача про вимушені коливання важкої багатошарової ідеальної рідини може бути сформульована таким чином [4, 10]:

$$\Delta\Phi_i = 0 \quad \text{в} \quad \tau_i; \quad \left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial\nu}\right|_{\Sigma_i} = 0; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial z} = \frac{\partial\zeta_i}{\partial t} \quad \text{на} \quad S_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad \frac{\partial\Phi_{i-1}}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_i}{\partial z} \quad \text{на} \quad S_i \quad (i = \overline{2, m}); \tag{1.2}$$

$$\rho_i \frac{\partial\Phi_i}{\partial t} - \rho_{i-1}\frac{\partial\Phi_{i-1}}{\partial t} + \Delta\rho_i\left(a_{33}g + \ddot{Z}_0\right)\zeta_i =$$

$$= -\Delta\rho_i\left[(a_{31}g + \ddot{X}_0)x + (a_{32}g + \ddot{Y}_0)y\right] + \dot{\vec{\omega}}\cdot\left(\rho_{i-1}\vec{\Psi}_{i-1} - \rho_i\vec{\Psi}_i\right) \quad \text{на} \quad S_i \quad (i = \overline{1, m}). \tag{1.3}$$

Тут Φ_i – потенціал відносної швидкості i -ої рідини; Σ_i – поверхня, яка змочує область τ_i; S_i – незбурена вільна ($i=1$) або внутрішня ($i \neq 1$) плоска поверхня (поверхня розділу $i-1$ і i -ої рідин); $z=\zeta_i(x,y,t)$ – рівняння вільної або внутрішньої поверхні; ν – орт зовнішньої нормалі до змочуваної поверхні області τ_i; $\Delta\rho_i=\rho_i-\rho_{i-1}$ ($\rho_0=0$); $\vec{\Psi}_i$ – потенціал Стокса – Жуковського для області τ_i з твердою межею $\tilde{\Sigma}_i = S_i \bigcup \Sigma_i \bigcup S_{i+1}$; $Z=Z_0+a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z$; $\vec{V}_0=\left(\dot{X}_0,\dot{Y}_0,\dot{Z}_0\right)$ [4].

Крайову задачу про вимушені коливання багатошарової рідини (1.1) – (1.3), за аналогією з роботою [4], можна звести до зліченної системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь. Для цього слід вирішити крайову задачу про власні коливання i -ої рідини в τ_i порожнині, вважаючи плоску фігуру S_i вільною поверхнею, а S_{i-1} – абсолютно твердою. Потім варто представити Φ_i і ζ_i у вигляді узагальнених рядів Фур'є

$$\Phi_i=\sum_n p_{in}(t)\varphi_{in}(x,y,z);\;\; \zeta_i=\sum_n \zeta_{in}(t)\psi_{in}\left(x,y\right), \tag{1.4}$$

де φ_{in} – власні функції для області τ_i, а ψ_{in} – значення функцій φ_{in} на S_i. Функції ψ_{in} утворюють повну і ортонормовану систему на S_i [7 – 9]. Далі слід обчислити потенціали Стокса – Жуковського $\vec{\Psi}_i$ для τ_i області з твердою межею $\tilde{\Sigma}_i = S_i \bigcup \Sigma_i \bigcup S_{i+1}$ і в якості основних функцій ψ_{in} вибрати ті функції, для яких область S_i буде найбільшою. У статті [4] на прикладі двошарової рідини ($m=2$) з циліндричною порожниною τ_1 і довільною порожниною τ_2 ($\tau=\tau_1 \cup \tau_2$) отримано рівняння вимушених коливань двошарової рідини в порожнині фізичного маятника, що здійснює плоскі коливання. Зважаючи на складність і громіздкість даної задачі для довільної порожнини τ розглянемо випадок циліндричної порожнини довільного поперечного перерізу ($S_1=S_2=\ldots=S_m=S$, $\psi_{in}=\psi_n$).

§2. Випадок циліндричної порожнини довільного поперечного перерізу.

Нехай порожнина τ буде циліндричною порожниною довільного поперечного перерізу S ($S_1=S_2=\ldots=S_m=S$). В цьому випадку граничні умови на змочуваній поверхні і плоскому дні мають вигляд:

$$\left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial\nu}\right|_{\Sigma}=0;\;\; \left.\frac{\partial\Phi_m}{\partial z}\right|_{z=-H_{m+1}}=0 \quad \left(H_i=\sum_{k=1}^{i-1}h_k\right). \tag{2.1}$$

Циліндрична порожнина має ту цікаву властивість, що дозволяє відділити просторову змінну, яка спрямована вздовж твірної і отримати в аналітичному вигляді рівняння збуреного руху багатошарової рідини.

Представимо функції $\Phi_i\left(x,y,z,t\right)$ і $\zeta_i\left(x,y,t\right)$ у вигляді узагальнених рядів Фур'є за власними функціями $\psi_n\left(x,y\right)$ коливань ідеальної рідини в циліндричній порожнині [7]

$$\begin{gathered}\Phi_i=\sum_n\left[A_{in}\left(t\right)\mathrm{e}^{k_n z}+B_{in}\left(t\right)\mathrm{e}^{-k_n z}\right]\psi_n\left(x,y\right);\\ \zeta_i=\sum_n \zeta_{in}\left(t\right)\psi_n\left(x,y\right) \quad (i=\overline{1,m}),\end{gathered} \tag{2.2}$$

де власні функції ψ_n і відповідні їм власні числа k_n визначаються з розв'язування наступної крайової задачі:

$$\Delta_2\psi_n+k_n^2\psi_n=0 \text{ на } S;\;\; \left.\frac{\partial\psi_n}{\partial\nu}\right|_{\gamma}=0. \tag{2.3}$$

Тут $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; γ – контур області S.

Ряди (2.2) припускатимемо достатню кількість разів диференційованими і інтегрованими. Крайова задача (2.3) еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма 2-го роду з симетричним ядром, звідки випливає існування зліченної множини власних чисел k_n і відповідних їм власних функцій ψ_n, які є нетривіальними розв'язками крайової задачі (2.3). Функції ψ_n після додавання до них довільної константи утворюють повну і ортонормовану систему функцій на області S [7].

Підставивши ряди (2.2) в (1.1) – (1.3) і, скориставшись ортогональністю функцій ψ_n, отримаємо лінійну систему диференціальних рівнянь щодо невідомих A_{in}, B_{in} і ζ_{in}:

$$k_n \left(A_{in}\,\mathrm{e}^{-k_n H_i} - B_{in}\,\mathrm{e}^{k_n H_i} \right) = \dot{\zeta}_{in} \qquad \left(i = \overline{1,m}\right);$$

$$A_{mn}\,\mathrm{e}^{-k_n H_{m+1}} - B_{mn}\,\mathrm{e}^{k_n H_{m+1}} = 0;$$

$$\left(A_{i-1n} - A_{in}\right)\mathrm{e}^{-k_n H_i} - \left(B_{i-1n} - B_{in}\right)\mathrm{e}^{k_n H_i} = 0 \quad \left(i = \overline{2,m}\right); \qquad (2.4)$$

$$\rho_i \left(\dot{A}_{in}\,\mathrm{e}^{-H_i k_n} + \dot{B}_{in}\,\mathrm{e}^{H_i k_n} \right) - \rho_{i-1} \left(\dot{A}_{i-1n}\,\mathrm{e}^{-H_i k_n} + \dot{B}_{i-1n}\,\mathrm{e}^{H_i k_n} \right) + \Delta\rho_i \left(a_{33} g + \ddot{Z}_0 \right) \zeta_{in} =$$

$$= \Delta\rho_i \left[\left(a_{32} g + \ddot{Y}_0 \right) \beta_n + \left(a_{31} g + \ddot{X}_0 \right) \alpha_n \right] + \dot{\vec{\omega}} \cdot \left(\rho_i \vec{\gamma}_{in} - \rho_{i-1} \vec{\gamma}^{\,*}_{i-1n} \right), \qquad (2.5)$$

де
$$\alpha_n = \frac{C_n}{N_n^2};\ \beta_n = \frac{D_n}{N_n^2};\ \vec{\gamma}_{in} = \vec{\gamma}_{in}(-H_i) = \frac{1}{N_n^2} \int_S \vec{\Psi}_i(-H_i)\psi_n ds;$$

$$\vec{\gamma}^{\,*}_{i-1n} = \vec{\gamma}_{i-1n}(-H_i) = \frac{1}{N_n^2} \int_S \vec{\Psi}_{i-1}(-H_i)\psi_n ds; \qquad (2.6)$$

$$C_n = \int_S x\psi_n ds;\ D_n = \int_S y\psi_n ds;\ N_n^2 = \int_S \psi_n^2 ds.$$

Система рівнянь (2.4) має розв'язок

$$A_{in} = \frac{\mathrm{e}^{k_n H_i}}{2k_n \operatorname{sh}\kappa_{in}} \left(\mathrm{e}^{\kappa_{in}}\,\dot{\zeta}_{in} - \dot{\zeta}_{i+1n} \right);\ B_{in} = \frac{\mathrm{e}^{-k_n H_i}}{2k_n \operatorname{sh}\kappa_{in}} \left(\mathrm{e}^{-\kappa_{in}}\,\dot{\zeta}_{in} - \dot{\zeta}_{i+1n} \right), \qquad (2.7)$$

де $\kappa_{in} = k_n h_i$.

З формул (2.2) і (2.7) випливає, що згасання поверхневих збурень з віддаленням від вільної і внутрішніх поверхонь носить експоненційний характер.

Підставивши (2.7) в (2.5), отримаємо зліченну систему лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, що описують вимушені коливання вільної і внутрішніх поверхонь важкої багатошарової ідеальної рідини в циліндричній порожнині твердого тіла, що здійснює заданий рух у просторі:

$$\ddot{\zeta}_{in} + \tilde{\omega}_{in}^2 \zeta_{in} - \frac{1}{a_{in}} \left(b_{i-1n} \ddot{\zeta}_{i-1n} + b_{in} \ddot{\zeta}_{i+1n} \right) = -\frac{\omega_{in}^2}{g} \Big[\left(a_{31} g + \ddot{X}_0 \right) \alpha_n +$$

$$+ \left(a_{32} g + \ddot{Y}_0 \right) \beta_n + \dot{\vec{\omega}} \cdot \left(\rho_{i-1} \vec{\gamma}^{\,*}_{i-1n} - \rho_i \vec{\gamma}_{in} \right) \Big] \ \left(i = \overline{1,m},\ n = 1,2,\ldots \right). \qquad (2.8)$$

Тут $\tilde{\omega}_{in}^2 = \omega_{in}^2 (a_{33} + \ddot{Z}_0 / g)$; $\omega_{in}^2 = g k_n \,\Delta\rho_i / a_{in}$; $a_{in} = \rho_{i-1} \operatorname{cth}\kappa_{i-1n} + \rho_i \operatorname{cth}\kappa_{in}$; $b_{in} = \rho_i / \operatorname{sh}\kappa_{in}$; $\zeta_{m+1n} \equiv 0$; $\rho_0 = 0$; $\omega_{in}^2 = g k_n \Delta\rho_i / a_{in}$ – частота коливань вільної поверхні ($i = 1$) і внутрішньої поверхні ζ_i ($i \neq 1$) при $\zeta_{i-1} = \zeta_{i+1} \equiv 0$, тобто при заміні $i-1$ та $i+1$ внутрішніх поверхонь твердими «кришками».

Структура системи диференціальних рівнянь (2.8) визначається тим, що i-й шар рідини взаємодіє тільки з $i-1$ і $i+1$ шарами (за винятком першого і останнього шарів).

Таким чином, якщо заданий закон руху твердого тіла і початкові умови для вільної та внутрішніх поверхонь, то в рамках лінійної теорії вимушені коливання m-шарової ідеальної рідини описуються зліченною системою звичайних диференціальних рівнянь (2.8).

Якщо тверде тіло рухається поступально з деяким прискоренням паралельно лінії дії сили тяжіння (або в відсутності тяжіння паралельно деякій прямій), то $\vec{\omega} \equiv 0$; $a_{31} = a_{32} = 0; a_{33} = 1;$ $\ddot{X}_0 = \ddot{Y}_0 = 0$. В цьому випадку слід вважати g заданою функцією часу і покласти $\omega_{in}^2 = g(t) k_n \Delta\rho_i / a_{in}$. Так, наприклад, в посудині, що стоїть на вібруючій за синусоїдальним законом платформі $g(t) = g_0 + a\cos\omega t$; система диференціальних рівнянь (2.8) в цьому випадку є системою рівнянь Матьє і при певних значеннях a і ω стоячі хвилі на вільній і внутрішній поверхнях, за аналогією з однорідною рідиною [8, 9, 15, 24], матимуть амплітуду коливань, яка збільшується з часом.

Однак, коливання поверхневих і внутрішніх хвиль в багатошаровій рідині можуть розвиватися і при монотонній зміні прискорення [8, 24]. Так, наприклад, при $g'(t) \le \varepsilon < 0$ коливання багатошарової рідини в ємності зростатимуть. Надалі вважатимемо, що прискорення $g = \text{const}$.

Вертикальні коливання ємності з ідеальною одношаровою ($m = 1$) рідиною з вільною поверхнею (хвилі Фарадея) досить добре досліджені у багатьох роботах. Є велика кількість робіт і для двошарової ідеальної і в'язкої рідини. Досить повний огляд цих робіт (близько чотирьохсот сорока) наведено в [15].

У разі горизонтальних ($Z_0 \equiv 0$) поступальних ($\vec{\omega} \equiv 0$) рухів твердого тіла, якщо власні функції ψ_n ортогональні функціям x і y, то $\alpha_n = \beta_n = 0$, праві частини рівнянь (2.8) дорівнюють нулю і частоти коливань багатошарової рідини збігаються з власними частотами коливань багатошарової рідини в нерухомому твердому тілі. Ці частоти і відповідні їм головні коливання в літературі називають «парними» [4, 8, 9, 24]. При поступальному русі твердого тіла або при коливанні його як фізичного маятника [4] це ті форми головних коливань багатошарової рідини, які не змінюють положення її центра ваги. Якщо в початковий момент тверде тіло було в спокої, а на вільній і внутрішніх поверхнях існували хвилі, то їх енергія в загальному випадку передається твердому тілу. «Парні» хвилі – це той спеціальний тип хвиль на вільній і внутрішніх поверхнях, енергія яких не передається твердому тілу. Не тільки коливання твердого тіла не можуть збудити ці хвилі, а й самі «парні» хвилі не можуть викликати коливання твердого тіла.

На прикладі першої компоненти проведемо обчислення потенціалу Стокса – Жуковського $\vec{\Psi}_i$. Для цього представимо його у вигляді $\Psi_{i1} = F_{i1} - yz$ [4, 9].

Функція F_{i1} є гармонійною і задовольняє наступним крайовим умовам: $\left.\dfrac{\partial F_{i1}}{\partial \nu}\right|_{\Sigma} = 0$, $\left.\dfrac{\partial F_{i1}}{\partial z}\right|_{\substack{z=-H_i \\ z=-H_{i+1}}} = 2y$. Легко показати, що функція F_{i1} має вигляд

$$F_{i1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\operatorname{ch} k_n (z + H_{i+1}) - \operatorname{ch} k_n (z + H_i)}{k_n \operatorname{sh} \kappa_{in}} \psi_n(x, y).$$

Тоді з (2.6) випливає, що

$$\gamma_{in1}(z) = \beta_n \left(2 \operatorname{sh} k_n \left(z + H_i + \frac{h_i}{2} \right) \Big/ k_n \operatorname{ch} \frac{\kappa_{in}}{2} - z \right);$$

$$\gamma_{in1}(-H_i)=\beta_n(f_{in}+H_i);\quad \gamma_{i-1n1}(-H_i)=\beta_n(f_{i-1n}+H_i);\qquad (2.9)$$

$$f_{in}=2\,\mathrm{th}\frac{\kappa_{in}}{2}\Big/\kappa_{in}.$$

Аналогічно обчислюється і друга компонента потенціалу Стокса – Жуковського

$$\gamma_{in2}(z)=\alpha_n\left(2\,\mathrm{sh}\,k_n\left(z+H_i+\frac{h_i}{2}\right)\Big/k_n\,\mathrm{ch}\frac{\kappa_{in}}{2}-z\right);$$

$$\gamma_{in2}(-H_i)=\alpha_n(f_{in}+H_i);\quad \gamma_{i-1n2}(-H_i)=\alpha_n(f_{i-1n}+H_i).\qquad (2.10)$$

Наведемо значення коефіцієнтів α_n і β_n для порожнин у вигляді прямокутного паралелепіпеда довжиною l та шириною $2d$ і для прямого кругового циліндра радіуса a [10].

Систему функцій для прямокутного паралелепіпеда можна записати так:

$$\psi_n=\psi_{pq}=\frac{1}{N_{pq}}\cos\frac{p\pi x}{l}\begin{cases}\cos(q\pi y/d), & p,q=0,1,2,...;\\ \sin((2q+1)\pi y/2d), & p,q=0,1,2,...,\end{cases}$$

де

$$N_n=N_{pq}=\begin{cases}\sqrt{2/ld}, & q\neq 0, \quad p\neq 0;\\ \sqrt{1/ld}, & q=0 \text{ або } p=0;\\ \sqrt{1/2ld}, & q=0 \text{ і } p=0;\end{cases}\qquad \alpha_n=\alpha_{pq}=\int_{-d}^{d}\int_{0}^{1}x\psi_{pq}dxdy=$$

$$=\begin{cases}\begin{cases}0, & q\neq 0;\\ -4l\sqrt{dl}\big/n^2\pi^2, & q=0,\ p=2s+1,\ s=0,1,...;\end{cases}\\ 0;\end{cases}\qquad (2.11)$$

$$\beta_{pq}=\int_{-d}^{d}\int_{0}^{1}y\psi_{pq}dxdy=\begin{cases}0;\\ \begin{cases}0, & p\neq 0;\\ (-1)^q\,8d\sqrt{dl}\big/(2q+1)^2\,l^2\pi^2, & p=0, q=0,1,... .\end{cases}\end{cases}\qquad (2.12)$$

Із формул (2.11) – (2.12) видно, що відмінні від нуля тільки коефіцієнти $\alpha_{2s+1,0}$ і $\beta_{0,2q+1}$. Це значить, що якщо збурююча сила діє вздовж осі x або y, то збуджуються лише непарні гармоніки за цією змінною, тобто збуджуються хвилі на вільній і внутрішніх поверхнях несиметричні щодо відповідних площин симетрії прямокутного паралелепіпеда.

Для порожнини у вигляді прямого кругового циліндра функції ψ_n і коефіцієнти α_n і β_n мають вигляд [10]:

$$\psi_n=\psi_{pq}=\frac{1}{\sqrt{\pi}N_{pq}}J_p(k_{pq}r)\begin{cases}\cos q\theta, & p=1,2...,\ q=0,1,...,\\ \sin q\theta, & p=1,2...,\ q=0,1,...;\end{cases}$$

$$N_{pq}^2=\frac{1}{2}\left(a^2-p^2\big/k_{pq}^2\right)J_p^2(k_{pq}a);$$

$$\alpha_{pq}=\frac{1}{N_{pq}}\int_0^{2\pi}\cos\theta\frac{\cos}{\sin}(q\theta)d\theta\int_0^a r^2J_p\left(k_{pq}r\right)dr;\qquad (2.13)$$

$$\beta_{pq} = \frac{1}{N_{pq}} \int_0^{2\pi} \sin\theta \frac{\cos}{\sin}(q\theta) d\theta \int_0^a r^2 J_p\left(k_{pq} r\right) dr. \qquad (2.14)$$

З формул (2.13) – (2.14) видно, що $\alpha_{pq} = 0$ і $\beta_{pq} = 0$ при $q \neq 1$ і $\alpha_{p1} = \beta_{p1} = = 2a\big/(\mu_{p1}^2 - 1) J_1(\mu_{p1})$ при $q \neq 1$, де $J_1'(\mu_{p1}) = 0$; $\mu_{pq} = k_{pq} a$.

Таким чином, в прямому круговому циліндрі збуджуються лише одновузлові коливання вільної і внутрішніх поверхонь.

Для осесиметричної порожнини τ_i з радіусом вільної поверхні a_i функції ψ_{in} і коефіцієнти α_{in} і β_{in} мають вигляд:

$$\psi_{ipq} = \frac{1}{N_{ipq}} R_{ipq}(r) \begin{cases} \cos q\theta, \ p = 1,2..., \ q = 0,1,...; \\ \sin q\theta, \ p = 1,2..., \ q = 0,1,...; \end{cases}$$

$$\alpha_{ipq} = \frac{1}{N_{ipq}} \int_0^{2\pi} \cos\theta \frac{\cos}{\sin}(q\theta) d\theta \int_0^{a_i} r^2 R_{ipq}(r) dr; \qquad (2.15)$$

$$\beta_{ipq} = \frac{1}{N_{ipq}} \int_0^{2\pi} \sin\theta \frac{\cos}{\sin}(q\theta) d\theta \int_0^{a_i} r^2 R_{ipq}(r) dr, \qquad (2.16)$$

звідки випливає, що $\alpha_{ipq} = 0$ і $\beta_{ipq} = 0$ при $q \neq 1$ та $\alpha_{ip1} = \beta_{ip1}$ при $q \neq 1$.

На підставі прикладу, розглянутого в роботі [4] і формул (2.15) – (2.16), можна стверджувати, що в осесиметричній порожнині τ ($\tau = \bigcup_{i=1}^{m} \tau_i$) з багатошаровою рідиною збуджуються також лише одновузлові коливання вільної і внутрішніх поверхонь.

Таким чином показано, що в разі порожнини у вигляді прямокутного паралелепіпеда, якщо збурююча сила діє горизонтально, паралельно його бічним сторонам, то збуджуються хвилі на вільній і внутрішніх поверхнях багатошарової рідини несиметричні щодо відповідних площин симетрії прямокутного паралелепіпеда. Якщо ж порожнина є осесиметричною, то збуджуються тільки одновузлові коливання вільної і внутрішніх поверхонь. Ніякими поперечними коливаннями твердого тіла і коливаннями його як фізичного маятника не можна збудити на вільній і внутрішніх поверхнях осесиметричні коливання та, навпаки, осесиметричні коливання, що виникли на вільній і внутрішніх поверхнях багатошарової рідини не можуть збудити коливання твердого тіла.

У роботах [4, 8, 10, 24] на підставі графічного дослідження частотного рівняння вільних коливань твердого тіла з ідеальною рідиною було показано, що високі частоти коливань твердого тіла мало відрізняються від власних частот коливань рідини. У зв'язку з цим проведемо дослідження власних коливань багатошарової ідеальної рідини.

§3. Власні коливання багатошарової ідеальної рідини в нерухомому твердому тілі.

Для пошуку власних коливань важкої багатошарової ідеальної рідини обчислимо її потенційну і кінетичну енергію. Потенційна енергія важкої багатошарової ідеальної рідини обчислюється за формулою $\Pi = g \sum_{i=1}^{m} \rho_i \int_{\tau_i} z d\tau = \frac{1}{2} g \sum_{i=1}^{m} \Delta\rho_i \int_{S_i} \zeta_i^2 ds$ [4], звідки випливає, що функціонал Π буде позитивно визначеним при $\Delta\rho_i > 0 \quad \forall i = \overline{1,m}$, тобто якщо важча i-а рідина перебуває нижче менш важкої $i-1$-ї рідини ($\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_m$).

Кінетична енергія багатошарової рідини має вигляд $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{S_i}\left(\rho_i\Phi_i-\rho_{i-1}\Phi_{i-1}\right)\frac{\partial\zeta_i}{\partial t}ds$ [4], а функціонал $L=\int_0^{t_1}\left(T-\Pi\right)dt$ буде обчислюватися так:

$$L=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\sum_{i=1}^{m}\left[\rho_i\int_{\tau_i}\left(\nabla\Phi_i\right)^2 d\tau-\frac{1}{g\Delta\rho_i}\int_{S_i}\left(\rho_{i-1}\frac{\partial\Phi_{i-1}}{\partial t}-\rho_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}\right)^2 ds\right]dt\,.$$

Таким чином, задачу визначення власних коливань важкої багатошарової ідеальної рідини може бути зведено до наступної варіаційної задачі для функціоналу

$$L=\sum_{i=1}^{m}\left[\rho_i\int_{\tau_i}\left(\nabla\varphi_i\right)^2 d\tau-\frac{\lambda}{\Delta\rho_i}\int_{S_i}\left(\rho_{i-1}\varphi_{i-1}-\rho_i\varphi_i\right)^2 ds\right] \tag{3.1}$$

в класі функцій φ_i, що задовольняють співвідношенням:

$$\Delta\varphi_i=0 \ \text{ в } \ \tau_i\,;\quad \left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}\right|_{\Sigma_i}=0\,;\quad \frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial z}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial z} \ \text{ на } \ S_i \ \ (i=\overline{2,m}).$$

Тут $\lambda=\sigma^2/g$; σ – власна частота коливань важкої багатошарової ідеальної рідини.

Для однорідної рідини ($m=1$) функціонал (3.1) збігається з функціоналом роботи [24].

Згідно загальної теорії [5, 24, 25], найменше з власних чисел λ визначається формулою

$$\lambda_1=\min\left(\sum_{i=1}^{m}\rho_i\int_{\tau_i}\left(\nabla\varphi_i\right)^2 d\tau\right)\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\Delta\rho_i}\int_{S_i}\left(\rho_{i-1}\varphi_{i-1}-\rho_i\varphi_i\right)^2 ds\right). \tag{3.2}$$

У разі повного заповнення (вільна поверхня відсутня, $S_1=\varnothing$, ($\operatorname{mes}S_1=0$)) з формули (3.2) випливає, що перша власна частота коливань підвищується, тобто введення «кришки» на вільну поверхню багатошарової рідини призводить до збільшення першої власної частоти.

Для двошарової рідини ($m=2$) формула (3.2) запишеться так:

$$\lambda_1=\Delta\rho\min\frac{\rho_1\int_{\tau_1}\left(\nabla\varphi_1\right)^2 d\tau+\rho_2\int_{\tau_2}\left(\nabla\varphi_2\right)^2 d\tau}{\rho_1\Delta\rho\int_{S_1}\varphi_1^2 ds+\int_{S_2}\left(\rho_1\varphi_1-\rho_2\varphi_2\right)^2 ds}. \tag{3.3}$$

З формули (3.3) випливає, що при $\rho_1\to\rho_2$ ($\Delta\rho=\rho_2-\rho_1\to 0$) $\lambda_1\to 0$, тобто при малій різниці густин двох рідин власні періоди коливань поверхні розділу дуже великі.

Слід зазначити, що з позицій функціонального аналізу в [5, 6, 25] була розглянута більш загальна задача про вільні коливання багатошарової ідеальної капілярної рідини. Ця задача зведена до операторного рівняння $Bu=\lambda Au$ в деякому гільбертовому просторі. Показано, що якщо оператор потенційної енергії B позитивно визначений (для системи важких рідин при $\Delta\rho_i>0$ це завжди виконано), то задача на власні значення має дискретний спектр, всі власні значення λ_k позитивні, мають кінцеву кратність і єдину граничну точку $\lambda=\infty$. Власні функції утворюють повні і ортогональні системи в енергетичних просторах H_A і H_B [25].

Крайова задача про власні коливання багатошарової рідини випливає з крайової задачі (1.1) – (1.3) при $\vec{V}_0 = 0$ і $\vec{\omega} = 0$.

У разі циліндричної порожнини довільного поперечного перерізу з системи (2.8) при $\zeta_{in} = \zeta_{in0}\,\mathrm{e}^{i\sigma t}$ і $\vec{V}_0 = 0$, $\vec{\omega} = 0$ випливає рівняння власних частот коливань важкої багатошарової ідеальної рідини

$$\Delta_{mn} = \left|D_{1mn}\right| = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{1n} & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{1n} & \tilde{a}_{2n} & b_{2n} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{m-2n} & \tilde{a}_{m-1n} & b_{m-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{m-1n} & \tilde{a}_{mn} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.4}$$

де $\tilde{a}_{in} = \left(\omega_{in}^2 - \sigma^2\right)a_{in}\big/\sigma^2$.

Матриця D_{1mn} є лінійчатою трьох діагональною симетричною матрицею. Її структура визначається тим, що i-й шар рідини взаємодіє тільки з $i-1$ і $i+1$ шарами рідини (за вийнятком першого і останнього шарів).

З рівняння (3.4) випливає, що частотний спектр власних коливань багатошарової ідеальної рідини складатиметься з m наборів частот, які описують власні коливання вільної і $m-1$-ї внутрішніх поверхонь багатошарової рідини.

Надалі для зручності запису D_{1mn}, де це буде можливо, індекси 1 і n будемо опускати.

У разі повного заповнення ($\zeta_1 \equiv 0$) в матриці D_{1m} слід закреслити перший рядок та перший стовпець і в цьому випадку рівняння (3.1) набуде вигляду

$$\left|D_{2m}\right| = 0. \tag{3.5}$$

Так для двошарової рідини ($m = 2$) частотне рівняння (3.5) має розв’язок

$$\sigma^2 = \omega_{2n}^2 = gk_n\Delta\rho\big/a_n\,, \text{ де } a_n = a_{2n} = \rho_2 \operatorname{cth}\kappa_{1n} + \rho_1 \operatorname{cth}\kappa_{2n}\,,\ \ \Delta\rho = \Delta\rho_2 = \rho_2 - \rho_1.$$

Якщо i-й шар рідини $(i \neq m)$ є нескінченно великим ($h_i = \infty$, $b_{in} = 0$), то рівняння (3.4) розпадається на два рівняння

$$\left|D_{1i}\right| = 0 \ \text{ і } \ \left|D_{i+1m}\right| = 0. \tag{3.6}$$

Перше рівняння описує власні коливання i-шарової рідини з «твердим» дном, а друге – $m-i$-шарової рідини з «твердою» кришкою на внутрішній поверхні $i+1$ шару рідини. Таким чином, нескінченно великий шар i-ї рідини еквівалентний «твердому» дну для i-го шару і «твердій» кришці для $i+1$-го шару рідини. Так, наприклад, для тришарової рідини ($m = 3$) при $h_1 = \infty$ $\left(b_{1n} = 0\right)$ рівняння (3.5) мають вигляд

$$\tilde{a}_{1n} = 0 \left(\sigma^2 = gk_n\right) \ \text{ і } \ \begin{vmatrix} \tilde{a}_{2n} & b_{2n} \\ b_{2n} & \tilde{a}_{3n} \end{vmatrix} = 0,$$

а при $h_2 = \infty$ $\left(b_{2n} = 0\right)$ –

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}_{1n} & b_{1n} \\ b_{1n} & \tilde{a}_{2n} \end{vmatrix} = 0 \ \text{ і } \ \tilde{a}_{3n} = 0 \left(\sigma^2 = \omega_{3n}^2 = gk_n \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2 + \rho_3 \operatorname{cth}\kappa_{3n}}\right).$$

При $h_1 = \infty$ або $h_{m-1} = \infty$ в частотний спектр рівнянь (3.4) входитимуть, відповідно, частоти:

$$\sigma_{1n}^2 = \omega_{1n}^2 = gk_n \quad \text{або} \quad \sigma_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 = gk_n \frac{\Delta\rho_m}{\rho_{m-1} + \rho_m \operatorname{cth} \kappa_{mn}}.$$

Якщо ж всі $h_i = \infty$, то частотне рівняння (3.1) буде мати m відомих наборів частот $\sigma_{in}^2 = \omega_{in}^2 = gk_n \left(\rho_i - \rho_{i-1}\right) / \left(\rho_i + \rho_{i-1}\right)$ [20, 25].

Легко помітити, що визначник рівняння (3.1) $\left|D_{1m}\right| = d_m$ можна обчислювати по рекурентній формулі

$$d_m = \tilde{a}_m d_{m-1} - b_{m-1}^2 d_{m-2} \quad (m > 2). \tag{3.7}$$

Якщо коефіцієнти рекурентного рівняння (3.7) не залежать від m ($\tilde{a}_m = a$ і $b_{m-1}^2 = -q$), то це рівняння має розв'язок

$$d_m = C_1 \alpha^m + C_2 \beta^m. \tag{3.8}$$

Тут $C_1 = \dfrac{d_2 - \beta d_1}{\alpha(\alpha - \beta)}$; $C_2 = \dfrac{d_2 - \alpha d_1}{\beta(\alpha - \beta)}$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, так як $q \neq 0$ і $\alpha \neq \beta$).

Щоб $\tilde{a}_m$ і b_{m-1} не залежали від m, приймемо $h_1 = h_2 = \ldots = h_m = h$, $\rho_1/\rho_2 = = \rho_2/\rho_3 = \ldots = \rho_{m-1}/\rho_m = \tilde{\rho}$ і перепишемо рівняння (3.5) у вигляді визначника $m-1$ порядку

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\rho}b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{\rho}b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\rho}b & a \end{vmatrix} = 0, \tag{3.9}$$

де $a(x) = \tilde{a}_i/\rho_i = (x-1)(1+\tilde{\rho})\operatorname{cth}\kappa_n$ $(i = \overline{2, m})$; $x = \omega_n^2(1-\tilde{\rho})/(1+\tilde{\rho})\sigma^2$ ($\tilde{\rho} < 1$); $q = -\tilde{\rho}b^2$; $b = b_i/\rho_i = 1/\operatorname{sh}\kappa_n$; $\kappa_n = k_n h$; $\omega_n^2 = gk_n \operatorname{th}\kappa_n$ – частота власних коливань однорідної рідини з вільною поверхнею.

Рівняння (3.9) має розв'язок

$$\left(\alpha/\beta\right)^{m-3} = \left[(a^2+q)\beta + aq\right] / \left[(a^2+q)\alpha + aq\right]. \tag{3.10}$$

Для двошарової рідини $(m = 2)$ рівняння (3.10) еквівалентно рівнянню $a(x) = 0$ і має один набір частот $\sigma_1^2 = \omega_n^2(1-\tilde{\rho})/(1+\tilde{\rho}) < \omega_n^2$.

Цікаво відзначити, що при парному m рівняння (3.10) завжди містить цю частоту.

Для тришарової рідини ($m = 3$) рівняння (3.10) еквівалентно рівнянню $a^2(x) + q = 0$ і має два набори частот $\sigma_{1,2}^2 = \omega_n^2\left(1-\tilde{\rho}\right)/(1+\tilde{\rho} \pm \sqrt{\tilde{\rho}}/\operatorname{ch}\kappa_n)$. Нижча частота $\sigma_1^2 < \omega_n^2$.

У разі часткового заповнення, рівняння (3.9) записується у вигляді визначника m-го порядку або

$$a_1 d_{m-1} + q d_{m-2} = 0 \quad (m > 2). \tag{3.11}$$

Тут $a_1(x) = \left[x(1-\tilde{\rho})/(1+\tilde{\rho}) - 1\right]\operatorname{cth}\kappa_n$.

Так як $d_{m-1} = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left[(a^2+q-\beta a)\alpha^{m-2} - (a^2+q-\alpha a)^{m-2}\right]$, то рівняння (3.11) можна записати у вигляді, аналогічному (3.10)

$$\left(\alpha/\beta\right)^{m-3} = (a^2+q-\alpha a)(a_1\beta + q) / \left[(a^2+q-\beta a)(a_1\alpha + q)\right] \quad (m > 2).$$

Для одношарової рідини $(m=1)$ рівняння (3.11) має розв'язок $a_1 = 0$, тобто один набір частот $\sigma_1^2 = \omega_n^2$, а для двошарової рідини $(m=2)$ – два набори

$\sigma_{1,2}^2 = \omega_n^2 \left(1 \pm \sqrt{\tilde{\rho}\left[1-(1-\tilde{\rho})\,\mathrm{th}^2\,\kappa_n\right]}\right) \Big/ \left(1+\tilde{\rho}\,\mathrm{th}^2\,\kappa_n\right)$. Звідки випливає, що $\sigma_1^2 < \omega_n^2$, $\sigma_2^2 > \omega_n^2$.

При $m=2$ і довільних h_1 і h_2 рівняння (3.1) буде квадратним

$$\left(\rho_1 + \rho_2 \,\mathrm{cth}\,\kappa_{1n}\,\mathrm{cth}\,\kappa_{2n}\right)x^2 - \rho_2\left(\mathrm{cth}\,\kappa_{1n} + \mathrm{cth}\,\kappa_{2n}\right)x + \Delta\rho = 0\,, \tag{3.12}$$

де $x = \sigma^2 / gk_n$.

Неважко показати, що менший і більший корінь цього рівняння задовільняють системі нерівностей $x_1 < \left\{\mathrm{th}\,\kappa_{1n}, \mathrm{th}\,\kappa_{2n}, \Delta\rho/a_n\right\} < x_2$.

Для нескінченно глибокої нижньої рідини ($h_2 = \infty$) рівняння (3.12) має корені $x_1 = \omega_{1n}^2\,\Delta\rho/\left(\rho_1 + \rho_2\,\mathrm{cth}\,\kappa_{1n}\right)$ і $x_2 = 1$. Звідки випливає наступне: нерівність $\Delta\rho/\left(\rho_1 + \rho_2\,\mathrm{cth}\,\kappa_{1n}\right) < \left\{1, \mathrm{th}\,\kappa_{1n}, \Delta\rho/\left(\rho_1\,\mathrm{cth}\,\kappa_{1n} + \rho_2\right)\right\}$, де $gk_n\,\Delta\rho/\left(\rho_1\,\mathrm{cth}\,\kappa_{1n} + \rho_2\right)$ – власна частота коливань поверхні розділу рідин (внутрішньої поверхні) при наявності «кришки» на вільній поверхні рідини; $\omega_{1n}^2 = g\rho_1\,\mathrm{th}\,\kappa_{1n}$.

З отриманих нерівностей можна зробити наступні висновки:

а) частоти власних коливань двох однорідних рідин з вільними поверхнями ($m=1$) більші за нижчі частоти і менші за вищі частоти їх спільних коливань ($m=2$);

б) додавання другої рідини густиною ρ_1 і висоти h_1 до однорідної безмежно глибокої рідини ($h_2 = \infty$) густиною ρ_2 призводить до появи нової частоти $\omega_n^2\,\Delta\rho/(\rho_1 + \rho_2\,\mathrm{cth}\,\kappa_{1n})$ при збереженні колишньої частоти gk_n. Нова частота менша за попередню, менша частоти рідини, яка додається і менша частоти, яка з'являється при заміні вільної поверхні на тверду кришку. Таким чином, додавання другої рідини призвело до зменшення частот коливань, що зрозуміло з фізичних міркувань;

в) частота коливань однорідної рідини з «твердим» дном $\omega_{1n}^2 = gk_n\,\mathrm{th}\,\kappa_{1n}$ вища частоти коливань цієї ж рідини на поверхні другої рідини ($gk_n\Delta\rho/(\rho_1 + \rho_2\,\mathrm{cth}\,\kappa_{1n}) < \omega_{1n}^2$), тобто заміна «твердого» дна «м'яким» призводить до зменшення частот коливань, що також має фізичне пояснення.

Слід зазначити, що дані висновки доповнюють, а в деяких окремих випадках збігаються з результатами статей [3, 5] і монографій [20, 25].

Висновок.

У лінійній постановці розглядається рух твердого тіла з довільною порожниною, що містить важку багатошарову ідеальну нестисливу рідину. Наведено алгоритм виведення зліченної системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують вимушені коливання багатошарової рідини при заданому русі твердого тіла. На прикладі циліндричної порожнини довільного поперечного перерізу досліджено отриману систему звичайних диференціальних рівнянь для випадків повного і часткового заповнення порожнини. Розглянуто поступальні вертикальні і горизонтальні переміщення твердого тіла, а також коливання твердого тіла як фізичного маятника. Показано, що для порожнини у вигляді прямокутного паралелепіпеда, якщо збурююча сила діє горизонтально і паралельно її бічним сторонам, то на вільній і внутрішніх поверхнях багатошарової рідини збуджуються хвилі, несиметричні щодо відповідних площин симетрії прямокутного паралелепіпеда. Якщо порожнина осесиметрична, то збуджуються тільки одновузлові коливання вільної і внутрішніх поверхонь. Ніякими поперечними коливаннями твердого тіла і коливаннями його як фізичного маятника неможливо збудити на вільній і внутрішніх поверхнях осесиметричні коливання і, навпаки, осесиметричні коливання багатошарової рідини, що виникли на вільній і внутрішніх поверхнях, не можуть збуджувати коливання твердого тіла. З варіаційної постановки задачі отримано формулу для розрахунку найменшої власної частоти коливань багатошарової рідини. Показано, що стратифікація призводить до зменшення цієї частоти. Для циліндричної порожнини довільного поперечного перерізу аналітично досліджено частотне рівняння вільних коливань багатошарової рідини для ряду окремих випадків: повне і часткове заповнення порожнини, нескінченно великі глибини заповнення, двошарова і тришарова рідини. Для однакових шарів рідини (постійна глибина заповнення шарів і постійне відношення густин попереднього шару до наступного) отримано аналітичний розв'язок частотного рівняння і проведено його дослідження.

Дослідження виконані при частковій підтримці програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки, проект № 0119U100042.

РЕЗЮМЕ. У лінійній постановці розглядається рух твердого тіла з порожниною, яка містить важку багатошарову ідеальну нестисливу рідину. Вказано алгоритм отримання системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують вимушені коливання багатошарової рідини при заданому русі твердого тіла. На прикладі циліндричної порожнини довільного поперечного перерізу проведено дослідження цієї системи рівнянь для випадків повного і часткового заповнення порожнини, поступальних вертикальних і горизонтальних переміщеннях твердого тіла, коливання твердого тіла як фізичного маятника. Показано, що у випадку порожнини у вигляді прямокутного паралелепіпеда, коли сила, яка збурює, діє горизонтально паралельно до його бічним сторін, то збурюються хвилі на вільній і внутрішніх поверхнях багатошарової рідини, які є несиметричними щодо площин симетрії прямокутного паралелепіпеда. Якщо порожнина є осесиметричною, то збурюються тільки одновузлові коливання вільної і внутрішніх поверхонь. Проведено аналітичні дослідження частотного рівняння вільних коливань багатошарової рідини для ряду окремих випадків: повне і часткове заповнення порожнини, нескінченно великі глибини заповнення, двошарові і тришарові рідини. Для однакових шарів рідини (постійна глибина заповнення шарів і постійне відношення густини попереднього шару до наступного) отримано аналітичний розв'язок частотного рівняння, який проаналізовано.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тверде тіло, вимушені та вільні коливання, нестислива важка багатошарова ідеальна рідина.

1. *Вин К.К., Темнов А.Н.* Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2016. – № 3. – С. 57 – 69.
2. *Вин К.К., Темнов А.Н.* Экспериментальное и теоретическое исследование колебаний твердого тела со слоистой жидкостью // Инженерный журнал: наука и инновации, МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журн. – 2018, № 4. – С. 1 – 13.
3. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания стратифицированной жидкости в сосудах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1973. – № 1. – С. 147 –152.
4. *Кононов Ю.Н.* О колебании физического маятника с многослойной идеальной жидостью // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. –**12**(5). – С. 73 – 89.
5. *Копачевский Н.Д.* О колебаниях несмешивающихся жидкостей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – **13**, № 5. – С. 1249 – 1263.
6. *Копачевский Н.Д., Цветков Д.О.* Колебания стратифицированной жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2008. – **29**. – С. 103 – 130.
7. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – Москва: Машиностроение, 1968. – 532 с.
8. *Моисеев Н.Н.* Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность // Матем. сборник. – 1953. – **32** (**74**), №. 1. – С. 61 – 96.
9. *Моисеев Н.Н.* Задача о малых колебаниях открытого сосуда с жидкостью под действием упругой силы // Укр. матем. журн. – 1952. – Т. 4, № 2. – С. 168–173.
10. *Моисеев Н.Н., Петров А.А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. – Москва: Изд-во ВЦ АН СССР.– 1966. – 270 с.

11. *Amaouche M., Meziani B.* Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids // Meccanica. – 2012. – **47**. – P. 71 – 83.
12. *Ardakani H.A., Bridges T.J., Turner M.R.* Dynamic coupling between horizontal vessel motion and two-layer shallow-water sloshing // J. Fluids Struct. – 2015. – **59**. – P 432 – 460.
13. *Bukreev V.I., Sturova I.V., Chebotnikov A.V.* Seiche oscillations in a reservoir filled with a double-layer fluid // Fluid Dynamics. – 2014. – **49,** N 3. – P. 395 – 402.
14. *Faltinsen O.M., Timokha A.N.* Sloshing. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – 686 p.
15. *Ibrahim R.A.* Recent Advances in Physics of Fluid Parametric Sloshing and Related Problems // J. of Fluids Engineering. – 2015. – **137**. – P. 1 – 52.
16. *Ibrahim R.A.* Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. – Cambridge: Cambridge University Press; 2005. – 970 p.
17. *Goncharov D.A.*, *Pozhalostin A.A.* Symmetric vibrations of a liquid in a vessel with a separator and an elastic bottom // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991. – 2018 (012027) – P. 1 – 5.
18. *Kononov Y.M., Dzhukha Y.O.* Vibrations of Two-Layer Ideal Liquid in a Rigid Cylindrical Vessel with Elastic Bases // J. of Mathem. Sci. –2020. – **246**, N 3. – P. 365 – 383.
19. *Kononov Y.M., Shevchenko V.P., Dzhukha Y.O.* Axially symmetric oscillations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical reservoir // J. of Mathem.l Sci. – 2019. – **240**, № 1. – P. 98 – 112.
20. *Lamb H.* Hydrodynamics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1945. – 738 p.
21. *La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A.* Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Phys. Fluids. – 2005. – **17** (062101). – P. 1 – 17.
22. *La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M.A.* Interfacial gravity waves in two-fluid system // Fluid Dynamics Research. – 2002. – **30**. –P. 31 – 66.
23. *Molin B., Remy F., Audiffren C., Marcer R., Ledoux A., Helland S., Mottaghi M.* Experimental and Numerical Study of Liquid Sloshing in a Rectangular Tank with Three Fluids // Proc. of 13 Int. Offshore and Polar Engineering Conf. www.isope.org Rhodes, Greece, June 17 – 22, 2012.
24. *Moiseev N.N., Rumyantsev V.V.* Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. – Berlin: Springer, 1968. – 346 p.
25. *Myskis A.D., Babskii V.G., Kopachevskii N.D., Slobozhanin L.A., Tiuptsov A.D.* Low-Gravity Fluid Mechanics: Mathematical Theory of Capillary Phenomena. – Berlin: Springer, 1987. – 584 p.
26. *Pozhalostin A.A., Goncharov D.A.* Free axisymmetric oscillations of a two-layer liquid with an elastic separator between layers // Russ. Aeronaut. – 2015. – **58**, N 1. – P. 37 – 41.
27. *Vaziri N., Chern M. J., Borthwick A.G.L.* PSME model of parametric excitation of two-layer liquid in a tank // Applied Ocean Research. – 2013. – **43**. – P. 214 – 222.
28. *Wang Z., Zou L., Zong Z.* Threedimensional sloshing of stratified liquid in a cylindrical tank // Ocean Engineering. – 2016. – **119**. – P. 58 – 66.

Надійшла 04.06.2020 Затверджена до друку 24.06.2021