Л . М . Р и ж к о в

КВАТЕРНІОННЕ ВИЗНАЧЕННЯ ОРІЄНТАЦІЇ НА ОСНОВІ ВИМІРЮВАННЯ ВЕКТОРІВ

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», просп. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: lev_ryzhkov@rambler.ru

Abstract. The quaternion attitude determination algorithms are suggested basing on the vector's measurements. The projections of the normalized vectors in the reference and the body coordinate systems are assumed to be known. The problem is in the determination of the quaternion of rotation of the coordinate system connected with the body relative to the reference coordinate system. A comparison of the accuracy of the proposed algorithms and algorithm QUEST is carried out. It was shown that the accuracies of the proposed algorithms are practically equivalent.

Key words: orientation: quaternion; algorithm.

Вступ.

Розглядається задача знаходження кватерніону переходу від опорної системи координат до зв’язаної з тілом системи координат. При цьому використовується інформація про проекції векторів в цих системах координат [1, 2]. В q-методі [4], алгоритмі QUEST [5] на початковому етапі аналізу використовується матриця напрямних косинусів, яка потім виражається через кватерніон. В даній роботі розвивається та узагальнюється підхід [6, 7] без попереднього введення матриці напрямних косинусів.

Розв’язування задачі.

Якщо переходу від нерухомої системи координат до рухомої поставити у відповідність кватерніон повороту $\boldsymbol{q}$, то зв’язок між виразами одного і того ж вектора, записаними в рухомій ($\boldsymbol{r}$) і нерухомій ($\boldsymbol{r}_o$) системах координат, має вигляд

$$\boldsymbol{r} = \tilde{\boldsymbol{q}} \circ \boldsymbol{r}_o \circ \boldsymbol{q} , \qquad (1)$$

де $\tilde{\boldsymbol{q}}$ – спряжений кватерніон.

Перепишемо формулу (1) у такому вигляді

$$\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_o \circ \boldsymbol{q} . \qquad (2)$$

Формулу (2) можна записати в матричній формі

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}_o\boldsymbol{q}_o , \qquad (3)$$

де

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{r}^T \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{D}^T \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{V}_o = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{r}_o^T \\ \boldsymbol{r}_o & \boldsymbol{D}_o \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{D}_o = \begin{bmatrix} 0 & -r_{oz} & r_{oy} \\ r_{oz} & 0 & -r_{ox} \\ -r_{oy} & r_{ox} & 0 \end{bmatrix}.$$

Цей вираз можна записати так

$$\boldsymbol{Wq} = \boldsymbol{0}_{4\times 1}\,, \tag{4}$$

де

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}_o - \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{a}^T \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{U} \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{r}; \ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_o - \boldsymbol{r}\,.$$

Для n векторів маємо

$$\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}_{4\times 1} \ \ (i = 1...n)\,.$$

Враховуючи похибки вимірювань, введемо функцію втрат

$$l(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{q}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_i\boldsymbol{q}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_i\boldsymbol{q}\right)^T\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_i\boldsymbol{q}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{q}\,, \tag{5}$$

де μ_i – вагові коефіцієнти;

$$\boldsymbol{G} = \sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{W}}_i^T\tilde{\boldsymbol{W}}_i = -\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{W}}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{a}}_i\|^2 & \tilde{\boldsymbol{a}}_i^T\tilde{\boldsymbol{U}}_i \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_i^T\boldsymbol{a}_i & -\tilde{\boldsymbol{U}}_i^2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\boldsymbol{W}}_i = \frac{\boldsymbol{W}_i}{\sqrt{\mu_i}}; \ \ \tilde{\boldsymbol{a}}_i = \frac{\boldsymbol{a}_i}{\sqrt{\mu_i}}; \ \ \tilde{\boldsymbol{U}}_i = \frac{\boldsymbol{U}_i}{\sqrt{\mu_i}}\,.$$

Оскільки кватерніон повинен бути нормованим, приймемо таку функцію втрат:

$$l_1(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{q} - \lambda\left(\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q} - 1\right), \tag{6}$$

де λ – множник Лагранжа.

Маємо

$$\frac{\partial l_1(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{q} - \lambda\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}_{4\times 1}\,.$$

Умова мінімуму є такою

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{q} = \lambda\boldsymbol{q}\,. \tag{7}$$

Тоді

$$l(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\lambda\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}\lambda\,. \tag{8}$$

Це означає, що нас цікавить мінімальне значення параметра λ. Таким чином, задача зводиться до знаходження власного вектора (кватерніона) матриці $\boldsymbol{G}$, який відповідає мінімальному значенню власного числа λ. В середовищі Matlab для цього зручно використовувати функцію «eig».

Розглянемо розв'язання задачі без використання даної функції.

Записуючи кватерніон у вигляді вектора $\boldsymbol{q} = [q_0 \ \boldsymbol{q}_v^T]$, вираз (8) можна записати наступним чином:

$$\begin{bmatrix} b & \boldsymbol{Z}^T \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 \\ \boldsymbol{q}_v \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} q_0 \\ \boldsymbol{q}_v \end{bmatrix}, \tag{9}$$

де

$$\boldsymbol{H} = -\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{U}}_i^2; \ \boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{U}}_i^T\tilde{\boldsymbol{a}}_i; \ b = \sum_{i=1}^{n}\|\tilde{\boldsymbol{a}}_i\|^2.$$

Запишемо систему (9) у формі

$$q_0 b + \boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{q}_v = \lambda q_0;\ q_0 \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{q}_v = \lambda \boldsymbol{q}_v. \tag{10}$$

Аналогічно [5] розглянемо друге рівняння цієї системи. Запишемо його так

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{H})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z},$$

де $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{q}_v / q_0$ – вектор Гіббса. Тоді

$$\boldsymbol{Y} = (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{H})^{-1} \boldsymbol{Z}. \tag{11}$$

Приймаючи $\lambda = \lambda_{\min}$, знаходимо $\boldsymbol{Y}$ та кватерніон $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{\sqrt{1+|\boldsymbol{Y}|^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Недоліком цього виразу є наявність вектора Гіббса, що виключає використання цього виразу при повороті на 180°. Щоб його позбутися зробимо наступним чином.

Власні числа матриці $\boldsymbol{G}$ є коренями характеристичного рівняння [3]

$$\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 = 0, \tag{13}$$

де

$$c_1 = -T_1;\ c_2 = -(c_1T_1 + T_2);\ c_3 = -(c_2T_1 + c_1T_2 + T_3);$$

$$c_4 = \det \boldsymbol{G};\ \ T_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{G};\ \ T_2 = \mathrm{tr}\boldsymbol{G}^2;\ \ T_3 = \mathrm{tr}\boldsymbol{G}^3.$$

Отримаємо аналогічне рівняння для матриці $\boldsymbol{H}_{3\times 3}$

$$\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0, \tag{14}$$

де в виразах для коефіцієнтів (13) матрицю $\boldsymbol{G}$ треба замінити на матрицю $\boldsymbol{H}$.

Відповідно до теореми Гамільтона – Келі кожна матриця відповідає своєму характеристичному рівнянню, тобто

$$\boldsymbol{H}^3 + c_1\boldsymbol{H}^2 + c_2\boldsymbol{H} + c_3 = 0. \tag{15}$$

Представимо вираз $(\boldsymbol{H} - \lambda \boldsymbol{I})^{-1}$ таким чином

$$(\boldsymbol{H} - \lambda \boldsymbol{I})^{-1} = \gamma^{-1}\left(\alpha + \beta\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^2\right). \tag{16}$$

Знаходимо

$$\boldsymbol{H}^3 + (\beta - \lambda)\boldsymbol{H}^2 + (\alpha - \beta\lambda)\boldsymbol{H} - (\gamma + \alpha\lambda) = 0. \tag{17}$$

Прирівнюючи в виразах (15) та (17) коефіцієнти при однакових степенях $\boldsymbol{H}$, отримаємо

$$\beta = c_1 + \lambda;\ \alpha = c_2 + \beta\lambda;\ \gamma = -(c_3 + \alpha\lambda). \tag{18}$$

Можна записати

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{L} / \gamma, \tag{19}$$

де

$$\boldsymbol{L} = -\left(\alpha \boldsymbol{I} + \beta\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^2\right)\boldsymbol{Z}.$$

Таким чином

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + |\boldsymbol{L}|^2}} \begin{bmatrix} \gamma \\ \boldsymbol{L} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Суттєво, що в виразі (20) вектор Гіббса відсутній.

Приймаючи $\lambda_{\min} \approx 0$, мінімальне власне число можна знайти з спрощеного характеристичного рівняння

$$\Delta \approx c_3 \lambda_{\min} + c_4 = 0 .$$

Тоді

$$\lambda_{\min} \approx -\frac{c_4}{c_3} . \qquad (21)$$

Для аналізу точності алгоритмів приймемо

$\psi = 30°; \theta = 20°; \varphi = 10°; \ \boldsymbol{r}_{o1} = [1\ 20\ 30]^T; \ \boldsymbol{r}_{o2} = [4\ 5\ 0]^T; \ \tilde{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{r}_1; \ \tilde{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{r}_2$,

де $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ – значення векторів без похибок вимірювань.

Матриці

$$\boldsymbol{E}_1 = \left[0{,}95\ 0\ 0;0\ 1\ 0;0\ 0\ 1{,}01\right], \ \boldsymbol{E}_2 = \left[1{,}01\ 0\ 0;0\ 1\ 0;0\ 0\ 0{,}95\right]$$

характеризують похибки вимірювань. Вагові коефіцієнти приймемо одиничними.

При використанні функції «eig» знаходимо $\lambda_{\min 1} = 9{,}7717 \cdot 10^{-5}$. За формулою (20) – $\lambda_{\min 2} = 1{,}0760 \cdot 10^{-4}$.

Отримано такі значення кутів:

$\psi = 29{,}7226°; \ \theta = 19{,}4205°; \ \varphi = 9{,}7095°$ – за використання функції «eig»;

$\psi = 29{,}7226°; \ \theta = 19{,}4205°; \ \varphi = 9{,}7095°$ – за формулою (12);

$\psi = 29{,}7226°; \ \theta = 19{,}4205°; \ \varphi = 9{,}7095°$ – за формулою (20) при використанні $\lambda_{\min 1}$;

$\psi = 29{,}7227°; \ \theta = 19{,}4206°; \ \varphi = 9{,}7096°$ – за формулою (20) при використанні $\lambda_{\min 2}$.

Для порівняння: за алгоритмом QUEST отримано:

$$\psi = 29{,}7279°; \ \theta = 19{,}4085°; \ \varphi = 9{,}7140°.$$

Бачимо, що результати є дуже близькими.

Так як $\lambda_{\min} \approx 0$, можна скоротити обчислення, прийнявши $\lambda_{\min} = 0$. Тоді за формулами (12) та (20) отримаємо

$$\psi = 29{,}7214°; \ \theta = 19{,}4198°; \ \varphi = 9{,}7086° .$$

Тобто, для практичних розрахунків можна приймати $\lambda_{\min} = 0.$ Тоді

$$\alpha \boldsymbol{I} + \beta \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^2 = \gamma \boldsymbol{H}^{-1},$$

тобто

$$\boldsymbol{L} = -\gamma \boldsymbol{H}^{-1} \boldsymbol{Z} .$$

При цьому формула (19) спрощується

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{\sqrt{1+\left|\boldsymbol{X}^2\right|}} \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{X} \end{bmatrix}. \qquad (22)$$

де

$$\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{H}^{-1} \boldsymbol{Z} = \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{U}}_i^T \tilde{\boldsymbol{U}}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{U}}_i^T \tilde{\boldsymbol{a}}_i .$$

За формулою (22) знаходимо

$$\psi = 29{,}7214°; \theta = 19{,}4206°; \varphi = 9{,}7086°.$$

Висновки.

Запропоновано ефективні кватерніонні алгоритми визначення орієнтації на основі вимірювання векторів. Найбільш загальним є алгоритм, який базується на знаходженні власних значень та власних векторів матриці $\boldsymbol{G}$. З точки зору точності визначення орієнтації алгоритми практично еквівалентні.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано кватерніонні алгоритми визначення орієнтації, що базуються на вимірюванні векторів. Проекції нормованих векторів в опорній та зв’язаній з тілом системах координат вважаються відомими. Задача полягає в визначенні кватерніону повороту зв’язаної з тілом системи координат відносно опорної системи координат. Виконано порівняння точності запропонованих алгоритмів та алгоритму QUEST. З точки зору точності визначення орієнтації алгоритми практично еквівалентні.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: орієнтація, кватерніон, алгоритм.

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – Москва: Наука, 1973.– 320 с.
2. *Онищенко С.М.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. – Киев: Наукова думка, 1983. – 208 с.
3. *Родкина Л.Р., Родкин А.Ф.* Решение систем линейных уравнений методом Гамильтона – Кели // Интеллектуальный потенциал вузов – на развитие Дальневосточного региона России и стран АТР. – Материалы XI международной НК, ВГУЭС, 2009. Сб. д., кн. 1., Владивосток, изд. ВГУЭС, 2009 г. – С.49 – 52. https://www.vvsu.ru.
4. *Davenport P.* Attitude Determination and Sensor Alignment Via Weighted Least Squares Affine Transformations // Goddard Space Flight Center, X-514- 71-312. – Florida: Ft. Lauderdale, 1971. – 37 p.
5. *Shuster M.D., Oh S.D.* Three-axis attitude determination from vector observations // J. of Guidance and Control. – 1981. – **4**, N 1. – P. 70 – 77.
6. *Ryzhkov L.* Attitude determination based on axis and angle rotation computing // Electronics and Control Systems. – 2017. – **53**, N 3. – P. 46 – 50.
7. *Ryzhkov L.* Attitude determination based on geometric relations // Electronics and Control Systems. – 2016. – **49**, N 3. – P. 17 – 21.

Надійшла 08.09.2020 Затверджена до друку 24.06.2021