

В. Д. Кубенко

**НЕСТАЦІОНАРНА ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА  
ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The exact analytical solution is constructed for the axisymmetric problem on the action of a non-stationary pressure on the surface of a half-space of compressible liquid. The Laplace and Hankel integral transforms are used. Their inversions were carried out with help of the tabular relationships and convolution theorems. The obtained expressions give a possibility to carry out the calculations for a wide range of acting non-stationary loads. For the stepwise applied loading, the expression of the pressure is obtained in the explicit form. It allows determining the wave process characteristics in any point of the half-space at an arbitrary moment. The features of the wave processes are analyzed.

**Key words:** compressible liquid layer, axisymmetric problem, non-stationary loading, exact solution.

**Вступ.**

Задачі визначення хвильових полів в акустичному півпросторі, на поверхні якого задане навантаження у вигляді нестационарної швидкості або тиску, були значно популярними серед дослідників у другій половині минулого століття у зв'язку з актуальністю вивчення й створення різноманітних акустичних систем випромінювання й реєстрації сигналів. Найбільш пильна увага приділена задачі про випромінювання звуку плоским поршнем у нескінченному жорсткому екрані, для якої вдалося побудувати ряд ефективних розв'язків. Основним методом дослідження при цьому є інтеграл Релея [6], що визначає хвильовий потенціал швидкості збурених рухів у довільній точці півпростору через форму поверхнею поршня й задану швидкість його руху. Інтеграл Релея отриманий на основі теореми Гріна і фактично є відображенням принципу Гюйгенса, відповідно до якого кожна точка випромінюючої поверхні або хвильового фронту служить джерелом сферичних хвиль. Активне застосування при розгляді конкретних задач одержала модифікація інтеграла шляхом введення просторової функції імпульсної реакції (spatial impulse response function – див., наприклад, [18]), що до того ж має геометричну інтерпретацію. Існують і інші підходи, такі як інтеграл Кінга [9] і Шоча [3], які, втім, можуть бути виведені з інтеграла Релея [10]. Ці підходи дозволили одержати розв'язки багатьох задач нестационарної акустики, наприклад [4, 8, 16, 19 – 20] і інші. Існують і відносно недавні дослідження, наприклад [17]. У переважній більшості робіт як нестационарний сигнал розглядається періодичне випромінювання з початковими умовами. Інтерес до задач із синусоїдальним імпульсом обумовлений потребами акустичних ультразвукових досліджень, що мають різноманітні технічні застосування. Разом з тим видається доцільним вивчення характеристик типового нестационарного хвильового процесу, коли діюче навантаження має сходинкоподібний характер зміни в часі. Таке дослідження дасть наглядне представлення особливостей поширення хвильових фронтів і продемонструє розвиток в часі і просторі нестационарних гідродинамічних характеристик. Крім того, його результати можуть служити основою при обчисленні реакції акустичного півпростору на діючі сигнали досить загального виду.

Дана робота присвячена побудові аналітичного розв'язку осесиметричної задачі про хвильові процеси в півпросторі однорідної ідеальної стисливої рідини, на фрагменті поверхні якого задане ступінчате нестационарне збурення. Розв'язок будується класичними методами за допомогою розділення змінних і інтегральних перетворень Лапласа й Ханкеля. Отриманий точний розв'язок дозволяє при мінімальних витратах машинного часу визначити характеристики нестационарного хвильового поля як у ближній зоні, так і на віддаленні від джерела збурень. Зауважимо, що застосований підхід виявився зручним також при дослідженні нестационарних процесів у шарі рідини, коли має місце система багаторазово відбитих від граничних площин хвиль. Відзначимо, що випадок плоскої задачі для шару рідини, а також для пружного шару зі змішаними граничними умовами, розглянутий у роботах [11 – 15]. Як збурення розглядається нестационарний тиск, що діє в межах певної кругової області, яка може бути фіксованих або змінних розмірів. Передбачається, що заданий тиск змінюється в часі стрибкоподібно. У випадку, коли область прикладання навантаження розширюється з постійною або змінною швидкістю, розв'язок побудовано на осі симетрії задачі. У задачі з фіксованою областю діючого збурення отриманий розв'язок дозволяє обчислити тиск і швидкість як функції часу й просторових координат у довільній точці півпростору. Показано, як ініційована на межі вказаної області хвиля розрідження збігається до осі симетрії, у результаті чого відбувається стрибок тиску і настає стаціонарний стан в точці збігу. Обчислено криві розподілу тиску у фіксовані моменти часу як по глибині, так і у площинах, паралельних граничній поверхні. Показано, як змінюється тиск при віддаленні від області прикладання навантаження.

### §1 Постановка задачі.

Розглядається півпростір однорідної ідеальної стисливої рідини, на поверхні якого в крузі радіуса  $l$  в деякий початковий момент часу діє тиск, що стрибкоподібно змінюється в часі і породжує в рідині нестационарний хвильовий процес. Потрібно знайти розподіл тиску і швидкості у часі й просторі. Геометрія задачі має осьову симетрію, тому вводиться циліндрична система координат  $Or\theta z$ , у

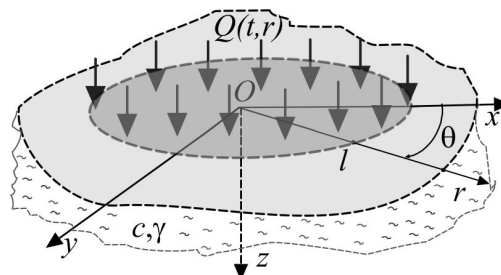


Рис. 1

якій буде вестися дослідження, так що її вісь  $Oz$  спрямована вглиб середовища, вісь  $Or$  – вздовж поверхні півпростору (рис. 1). Обмежимося розглядом осесиметричного навантаження, внаслідок чого змінна  $\theta$  випадає з розгляду.

Вводяться безрозмірні змінні і позначення

$$\bar{r} = \frac{r}{h}; \quad \bar{z} = \frac{z}{h}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\gamma c^2}; \quad \bar{V}_j = \frac{V_j}{c} \quad (j = r, z); \quad \bar{t} = \frac{ct}{h}. \quad (1.1)$$

Тут  $h$  – певний характерний лінійний розмір;  $p$  – гідродинамічний тиск;  $\vec{V}(V_r, V_z)$  – вектор швидкості. Фізичні властивості рідини визначені швидкістю поширення звука  $c$  і густиною  $\gamma$

Нижче використовуються лише безрозмірні позначення, тому риска над ними буде опущена.

Будемо вважати, що діюче на поверхні рідини навантаження може бути представлене виразом

$$Q(t, r) = P_0 H(t) q(r). \quad (1.2)$$

Тут  $H(t)$  – одинична функція Хевісайда аргумента  $t$  [5];  $P_0$  – безрозмірна амплітуда тиску;  $q(r)$  – функція, що визначає залежність тиску від радіальної координати.

Якщо навантаження існує лише в круговій області  $r \leq l$ , функцію  $q(r)$  можна довизначити у такий спосіб

$$q(r) = \chi(r)H(l-r), \quad (1.3)$$

де функція  $\chi(r)$  задає розподіл тиску у вказаній області.

Для опису хвильового процесу вводиться потенціальна функція  $\Phi$ , що задовольняє хвильовому рівнянню

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.4)$$

Тиск і швидкість пов'язані з потенціалом співвідношеннями

$$p = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \vec{V} = \text{grad } \Phi.$$

Граничні умови задають тиск на поверхні рідини  $z = 0$  і затухання хвильових збурень на нескінченності

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = Q(r, t); \quad (1.5)$$

$$r\Phi \Big|_{r \rightarrow \infty} = r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \Phi \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (1.6)$$

Початкові умови для потенціала  $\Phi$  є нульовими

$$\Phi \Big|_{t \rightarrow 0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t \rightarrow 0} = 0. \quad (1.7)$$

Потенціал  $\Phi$  має бути обмеженим при  $r \rightarrow 0$ . Співвідношення (1.4) – (1.7) складають формулювання даної задачі.

## §2. Розв'язок задачі в зображеннях.

Для розв'язку задачі (1.4) – (1.7) застосовуються інтегральні перетворення Лапласа по змінній  $t$  з параметром  $s$  і Ханкеля (Бесселя) нульового порядку по  $r$  з параметром  $\xi$  [1, 2]. Зокрема, буде позначено

$$f^L(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt; \quad f(t) = L^{-1}\{f^L(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} e^{st} f^L(s) ds;$$

$$f^B(\xi) = B\{f(r)\} = \int_0^{\infty} f(r) J_0(r\xi) r dr; \quad f(r) = B^{-1}\{f^B(\xi)\} = \int_0^{\infty} f^B(\xi) J_0(r\xi) \xi d\xi.$$

Тут  $L$  і  $B$ , відповідно, є оператори інтегральних перетворень Лапласа й Ханкеля;  $L^{-1}$ ,  $B^{-1}$  – оператори обернення;  $J_0$  – циліндрична функція Бесселя індексу 0 [5]. Абсциса  $\kappa$  в комплексній площині  $s$  розташована праворуч від полюсів підінтегральної функції.

У просторі зображень за Лапласом і Ханкелем з рівняння (1.4) одержимо наступне рівняння, у якому нульові початкові умови й граничні умови при  $r \rightarrow \infty$  вже використані

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LB}}{\partial z^2} - (s^2 + \xi^2) \Phi^{LB} = 0. \quad (2.1)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.1) з урахуванням умов згасання при  $z \rightarrow \infty$  має вигляд

$$\Phi^{LB} = A(s, \xi) e^{-z\sqrt{s^2+\xi^2}}. \quad (2.2)$$

Тут  $A(s, \xi)$  – функція, що підлягає визначенню. Виконання граничної умови (1.5) у просторі зображень за Лапласом і Ханкелем дозволяє знайти  $A(s, \xi)$  і у результаті тиск і вертикальна швидкість у просторі зображень записуються у вигляді

$$p^{LB}(s, \xi, z) = Q^{LB}(\xi, s) e^{-z\sqrt{s^2+\xi^2}}; \quad V_z = Q^{LB}(\xi, s) \frac{\sqrt{s^2+\xi^2}}{s} e^{-z\sqrt{s^2+\xi^2}}. \quad (2.3)$$

У просторі зображень діюче навантаження (1.2) має вигляд

$$Q^{LB}(r, t) = P_0 \frac{1}{s} q^B(\xi).$$

Тоді зображення тиску й швидкості можна переписати так:

$$p^{LB}(s, \xi, z) = P_0 q^B(\xi) g^{LB}(s, \xi, z); \quad g^{LB}(s, \xi, z) = \frac{1}{s} e^{-z\sqrt{s^2+\xi^2}}; \quad (2.4)$$

$$V_z = P_0 q^B(\xi) f^{LB}(s, \xi, z); \quad (2.5)$$

$$f^{LB}(s, \xi, z) = \left( \frac{1}{\sqrt{s^2+\xi^2}} + \frac{\xi^2}{s^2 \sqrt{s^2+\xi^2}} \right) e^{-z\sqrt{s^2+\xi^2}}.$$

Щоб визначити тиск, необхідно виконати обернення виразу (2.4) відносно інтегральних перетворень. Якщо вдасться зробити обернення перетворення Бесселя функції  $g^{LB}(s, \xi, z)$ , тобто знайти функцію  $g^L(s, r, z)$ , то обернення перетворення Бесселя для зображення тиску  $p^{LB}(s, \xi, z)$  можна одержати з (2.4), застосувавши теорему про згортку перетворення Бесселя [5] до добутку функцій  $q^B(\xi)$  і  $g^{LB}(s, \xi, z)$ . Якщо виконати також інверсію перетворення Лапласа функції  $g^L(s, r, z)$ , задача буде вирішена, оскільки функція  $q^B(\xi)$  не залежить від параметра  $s$ . Вищесказане аналогічно стосується виразу (2.5) для швидкості.

### §3. Обернення інтегральних перетворень.

**3.1. Тиск.** Для інверсії перетворення Ханкеля скористаємося табличним співвідношенням [2]

$$B^{-1} \left\{ e^{-z\sqrt{s^2+\xi^2}} \right\} = z \frac{(1+s\sqrt{r^2+z^2})}{(r^2+z^2)^{3/2}} e^{-s\sqrt{r^2+z^2}}. \quad (3.1)$$

В результаті з формули (2.9) одержимо вираз для функції  $g^L(s, r, z)$  в просторі зображень за Лапласом

$$g^L(s, r, z) = \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \frac{1}{s} e^{-s\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{z}{(r^2+z^2)} e^{-s\sqrt{r^2+z^2}}. \quad (3.2)$$

Використовуючи для інверсії перетворення Лапласа теорему запізнювання операційного числення [1], можна записати співвідношення

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} e^{-s\sqrt{r^2+z^2}} \right\} = H(t - \sqrt{r^2+z^2}); \quad L^{-1} \left\{ e^{-s\sqrt{r^2+z^2}} \right\} = \delta(t - \sqrt{r^2+z^2}),$$

де  $\delta(t)$  – дельта-функція Дірака [8]. Використовуючи їх для обернення (3.2), одержимо шуканий вираз для функції  $g(t, r, z)$  в наступному вигляді:

$$g(t, r, z) = H\left(t - \sqrt{r^2 + z^2}\right) g_H(r, z) + \delta\left(t - \sqrt{r^2 + z^2}\right) g_\delta(r, z);$$

$$g_H(r, z) = \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}; \quad g_\delta(r, z) = \frac{z}{r^2 + z^2}. \quad (3.3)$$

Повернемося до виразу (2.4) для  $p^{LB}(s, \xi, z)$ . Можна помітити, що його обернення відносно перетворення Лапласа вже зроблено, тому що функція  $q$  не залежить від  $t$ , а оригінал функції  $g^{LB}(s, \xi, z)$  заданий формулами (3.3). У просторі зображень перетворення Ханкеля вираз (2.4) для тиску можна переписати у вигляді

$$p^B(t, \xi, z) = P_0 q^B(\xi) g^B(t, \xi, z). \quad (3.4)$$

Оригінали множників  $q^B(\xi)$  і  $g^B(t, \xi, z)$  в (3.4) відомі й задані формулами (1.3) і (3.3). Це дозволяє застосувати теорему про згортку перетворення Ханкеля [5]. Зазначена теорема звичайно реалізується як двовимірна згортка Фур'є в прямокутних координатах  $x, y$ , які пов'язані з полярною координатою  $r$  співвідношенням  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , тому з виразу (3.4) матимемо

$$p(t, r, z) = \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int H\left(l - \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\zeta)^2}\right) \times$$

$$\times \chi\left(\sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\zeta)^2}\right) g\left(t, \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}, z\right) d\lambda d\zeta. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) є формальний розв'язок задачі. Прості розрахункові формули для обчислення полів тиску й швидкості можна вивести з (3.5), якщо використати певні властивості функцій Хевісайда й Дірака.

Вкажемо, що розв'язок (3.5), що отриманий при зовнішньому впливі виду (1.2), може бути основою для побудови розв'язку при більш складній залежності навантаження від часу. Якщо замість (1.1), (1.2) розглянути діючий тиск у вигляді

$$Q(t, r) = P_0 H(t) \psi(t) q(r),$$

де  $\psi(t)$  – функція загального виду, розв'язок такої задачі можна, використовуючи (3.5), записати у вигляді згортки операційного числення

$$p|_{\psi(t)}(t, r, z) = \int_0^t \psi(t-\tau) p(\tau, r, z) d\tau. \quad (3.6)$$

**3.2. Швидкість.** Для того, щоб інвертувати вираз (2.5) для швидкості відносно перетворення Ханкеля, застосуємо табличну формулу

$$B^{-1} \left\{ (s^2 + \xi^2)^{-1/2} e^{-z\sqrt{s^2 + \xi^2}} \right\} = (r^2 + z^2)^{-1/2} e^{-s\sqrt{r^2 + z^2}}$$

і відому властивість цього перетворення

$$B^{-1} \left\{ \xi^2 F^B(\xi) \right\} = -\left( d^2 F(r) / dr^2 + 1/r dF(r) / dr \right).$$

Користуючись також теоремою запізнення для інверсії перетворення Лапласа, одержимо наступний вираз функції  $f(t, r, z)$  у формулі (2.5)

$$f(t, r, z) = H\left(t - \sqrt{r^2 + z^2}\right) f_H(t, r, z) + \delta\left(t - \sqrt{r^2 + z^2}\right) f_\delta(r, z);$$

$$f_H(t, r, z) = -\frac{t(r^2 - 2z^2)}{(r^2 + z^2)^{5/2}}; \quad f_\delta(r, z) = \frac{z^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.7)$$

В просторі зображень перетворення Ханкеля вираз (2.5) можна переписати у вигляді

$$V^B(t, \xi, z) = P_0 q^B(\xi) f^B(t, \xi, z). \quad (3.8)$$

Оригінал виразу (3.8) також одержимо як згортку перетворення Ханкеля

$$V_z(t, r, z) = \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(l - \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\zeta)^2}\right) \times$$

$$\times \chi\left(\sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\zeta)^2}\right) g\left(t, \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}, z\right) d\lambda d\zeta. \quad (3.9)$$

Нижче зосередимся на обчисленні тиску. Для швидкості всі виконані далі операції будуть аналогічними.

#### §4. Тиск на осі симетрії.

**4.1 Фіксована область дії навантаження.** Вираз для тиску на осі симетрії задачі легко отримати, поклавши в (3.5)  $x = y = 0$

$$p(t, 0, z) = \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(l - \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}\right) \chi\left(\sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}\right) g\left(t, \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}, z\right) d\lambda d\zeta. \quad (4.1)$$

Перейдемо в площині змінних  $\lambda, \zeta$  до полярних координат  $\rho, \varphi$  через співвідношення

$$\rho = \sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\zeta}{\lambda}. \quad (4.2)$$

Одержимо

$$p(t, 0, z) = P_0 \int_0^{\infty} H(l - \rho) \chi(\rho) g(t, \rho, z) \rho d\rho. \quad (4.3)$$

З огляду на вид функції  $g(t, \rho, z)$ , що задана формулою (3.3), вираз (4.3) можна представити у вигляді суми доданків, один з яких містить під інтегралом функцію Хевісайда, інший – функцію Дірака

$$p(t, 0, z) = p_H(t, 0, z) + p_\delta(t, 0, z). \quad (4.4)$$

Тут позначено

$$p_H(t, 0, z) = P_0 \int_0^{\infty} H(l - \rho) H\left(t - \sqrt{\rho^2 + z^2}\right) \chi(\rho) g_H(\rho, z) \rho d\rho;$$

$$p_\delta(t, 0, z) = P_0 \int_0^{\infty} H(l - \rho) \delta\left(t - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\rho^2 + z^2}\right) \chi(\rho) g_\delta(\rho, z) \rho d\rho. \quad (4.5)$$

Добуток двох функцій Хевісайда в підінтегральному виразі в першому рядку (4.5) дозволяє визначити межі інтегрування і, з врахуванням (3.3), переписати вираз  $p_H(t, 0, z)$  у вигляді, придатному для обчислень

$$p_H(t, 0, z) = H(t-z)P_0 \int_0^{Y(t,z)} \frac{\chi(\rho)\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} d\rho; \quad Y(t,z) = \min\left(l; \sqrt{t^2-z^2}\right); \quad (4.6)$$

$$Y(t,z) = \min\left(l, \sqrt{t^2-z^2}\right).$$

Другий рядок  $p_\delta(t, 0, z)$  в формулах (4.5) містить у підінтегральному виразі функцію Дірака  $\delta(f(\rho))$ ,  $f(\rho) = t - \sqrt{\rho^2 + z^2}$ . Скористаємося способом представлення  $\delta$  – функції складного аргумента [5]:

$$\delta[f(\rho)] = \sum_n \frac{\delta(\rho - \rho_n)}{\left| \frac{df(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_n}},$$

де  $\rho_n$  – прості нулі функції  $f(\rho)$ , які в нашому випадку мають вигляд  $\rho_{1,2} = \pm\sqrt{t^2 - z^2}$ . В результаті одержимо наступний вираз:

$$\delta\left(t - \sqrt{\rho^2 + z^2}\right) = \frac{t}{\sqrt{t^2 - z^2}} \left[ \delta\left(\rho - \sqrt{t^2 - z^2}\right) + \delta\left(\rho + \sqrt{t^2 - z^2}\right) \right]. \quad (4.7)$$

Підставивши (4.7) в другий рядок (4.5), матимемо

$$p_\delta(t, 0, z) = \frac{P_0 t}{\sqrt{t^2 - z^2}} \int_0^\infty \left[ \delta\left(\rho - \sqrt{t^2 - z^2}\right) + \delta\left(\rho + \sqrt{t^2 - z^2}\right) \right] H(l - \rho) \chi(\rho) g_\delta(\rho, z) \rho d\rho. \quad (4.8)$$

Дельта-функцію  $\delta\left(\rho + \sqrt{t^2 - z^2}\right)$  можна відкинути, оскільки в межах інтервалу інтегрування її значення рівне нулю. В результаті з співвідношення (4.8) з врахуванням виразу (3.3) для функції  $g_\delta(r, z)$  і у відповідності з означенням  $\delta$  – функції одержимо

$$p_\delta(t, 0, z) = P_0 H(t-z) H\left(l - \sqrt{t^2 - z^2}\right) \frac{z}{t} \chi\left(\sqrt{t^2 - z^2}\right). \quad (4.9)$$

Таким чином, обидва доданки у виразі (4.4) визначені і його можна використувати для обчислень. Аналітичні вирази для тиску можна одержати для ряду функцій  $\chi(\rho)$ , зокрема для функцій поліноміального виду. Наприклад, у випадку однорідного розподілу діючого тиску з (4.6) і (4.9) одержимо наступний вираз:

$$p(t, 0, z) = H(t-z) P_0 \left[ 1 - H\left(\sqrt{t^2 - z^2} - l\right) \frac{z}{\sqrt{t^2 + z^2}} \right]. \quad (4.10)$$

З (4.10) витікає, що як тільки в точку з координатою  $z$  приходиться хвиля розрідження, що випромінюється контуром  $r = l$ ,  $z = 0$ , в ній набувається статичне значення тиску.

Якщо розподіл діючого навантаження (1.3) по  $r$  задано квадратичним законом виду  $\chi(r) = 1 - r^2 / l^2$ , тиск на осі  $z$  обчислюється за формулою

$$p_H(t, 0, z) = H(t-z) P_0 \left[ \frac{2z^2 + l^2}{l^2} - H\left(\sqrt{t^2 - z^2} - l\right) 2z \frac{\sqrt{t^2 + z^2}}{l^2} - H\left(l - \sqrt{t^2 - z^2}\right) \frac{2zt}{l^2} \right].$$

**4.2. Змінна область дії навантаження.** Якщо обмежитися розглядом процесу на осі симетрії, можна, користуючись методом Каньяра [7], одержати аналітичний розв'язок задачі у випадку, коли область дії навантаження розширюється з постійною або змінною швидкістю.

Нехай нестационарне навантаження таке, що область його дії розширюється з постійною швидкістю  $k$ , так що формула (1.1) має вигляд

$$Q_c(t, x) = P_0 H(kt - r). \quad (4.11)$$

Перетворення Лапласа і Бесселя функції  $Q_c$  має вигляд

$$Q_c^L(r, s) = P_0 \frac{1}{s} e^{-\frac{r}{k}}; \quad Q_c^{LB}(s, \xi) = P_0 \frac{k^2}{(s^2 + \xi^2 k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Тоді з (2.7) одержимо вираз для зображення тиску

$$p^{LB}(s, \xi, z) = P_0 \frac{k^2 s}{(s^2 + \xi^2 k^2)^{\frac{3}{2}}} g^{LB}(s, \xi, z).$$

Запишемо інверсію перетворення Бесселя при  $r = 0$  і зробимо заміну змінного  $\xi = s\eta$ ,  $d\xi = sd\eta$ , вважаючи  $s$  дійсним. Одержимо

$$p^L(s, 0, z) = P_0 \int_0^\infty \frac{k^2}{s(1 + \eta^2 k^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-sz\sqrt{1 + \eta^2}} \eta d\eta.$$

В підінтегральному виразі виконаємо заміну  $z\sqrt{1 + \eta^2} = t$

$$p^L(s, 0, z) = \frac{k^2 z}{s} \int_0^\infty e^{-st} \frac{H(t - z)}{\left((1 - k^2)z^2 + k^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}}} t dt.$$

Даний інтеграл є перетворення Лапласа, отже, підінтегральна функція є оригіналом. Якщо врахувати також наявність множника  $1/s$  і виконати інтегрування за часом на інтервалі  $[0, t]$ , одержимо вираз для тиску вздовж осі  $z$  у випадку, коли область дії однорідного нестационарного навантаження розширюється зі сталою швидкістю  $k$

$$p(t, 0, z) = P_0 H(t - z) \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + k^2(t^2 - z^2)}} \right). \quad (4.12)$$

Розглянемо тепер нестационарне навантаження, область дії якого розширюється зі змінною швидкістю

$$Q_v(t, r) = P_0 H(kt - r^2). \quad (4.13)$$

Відзначимо, що згідно з виразом (4.13) при  $r \rightarrow 0$  швидкість розширення області дії тиску прямує до нескінченності. Зображення функції  $Q(t, r)$  в (4.13) має вигляд

$$Q_v^L(s, r) = P_0 \frac{1}{s} e^{-\frac{r^2}{k}}; \quad Q_v^{LB}(s, \xi) = P_0 \frac{k}{2s^2} e^{-\frac{k}{4s} \xi^2}.$$

Тоді з (2.7) одержимо



$$p^{LB}(s, \xi, z) = P_0 \frac{k}{2s^2} e^{-\frac{k}{4s} \xi^2 - z \sqrt{s^2 + \xi^2}}.$$

Інверсія перетворення Ханкеля при  $r = 0$  і заміна змінного  $\xi = s\eta$  дає

$$p^L(s, 0, z) = P_0 \frac{k}{2} \int_0^\infty e^{-s \left( \frac{k}{4} \eta^2 + z \sqrt{1 + \eta^2} \right)} \eta d\eta.$$

Виконавши ще одну заміну  $\frac{k}{4} \eta^2 + z \sqrt{1 + \eta^2} = t$ , одержимо

$$p^L(s, 0, z) = P_0 \int_0^\infty e^{-st} H(t - z) \frac{\sqrt{4z^2 + 4kt + k^2} - 2z}{\sqrt{4z^2 + 4kt + k^2}} dt,$$

звідки, очевидно, витікає

$$p(t, 0, z) = P_0 H(t - z) \frac{\sqrt{4z^2 + 4kt + k^2} - 2z}{\sqrt{4z^2 + 4kt + k^2}}. \quad (4.14)$$

Вираз (4.14) представляє тиск на осі симетрії як функцію часу при навантаженні поверхні рідини тиском, область дії якого розширюється зі змінною швидкістю згідно формули (4.13).

### §5. Тиск при довільному $r$ .

В цьому загальному випадку у виразі (3.5) також перейдемо до полярних координат згідно формули (4.2). Одержимо

$$p(t, r, z) = \frac{P_0}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} H \left( t - \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \varphi} \right) \times \\ \times \chi \left( \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \varphi} \right) g(t, \rho, z) \rho d\rho d\varphi. \quad (5.1)$$

Враховуючи вид функції  $g(t, \rho, z)$ , представимо  $p(t, r, z)$  у вигляді суми

$$p(t, r, z) = p_H(t, r, z) + p_\delta(t, r, z), \quad (5.2)$$

де доданки  $p_H$  и  $p_\delta$  визначаються формулою (5.1), в якій замість функції  $g$  підставлено її перший (що містить  $g_H$ ) або другий (що містить  $g_\delta$ ) доданок з формули (3.3), відповідно. Розглянемо кожний доданок у (5.2) окремо.

**5.1. Доданок з функцією Хевісайда.** Доданок  $p_H(t, r, z)$  перепишемо у вигляді

$$p_H(t, r, z) = \frac{P_0}{2\pi} \int_0^\infty H \left( t - \sqrt{\rho^2 + z^2} \right) g_H(t, \rho, z) \times \\ \times \left( \int_0^{2\pi} H \left( t - \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \varphi} \right) \chi \left( \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \varphi} \right) d\varphi \right) \rho d\rho. \quad (5.3)$$

Властивості функції Хевісайда дозволяють одержати наступні умови для змінних інтегрування  $\rho, \varphi$ .

1. Множник  $H \left( t - \sqrt{\rho^2 + z^2} \right)$  накладає умову на  $\rho$

$$\rho \leq \sqrt{t^2 - z^2} . \quad (5.4)$$

2. Множник  $H\left(l - \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \varphi}\right)$  визначає нерівність щодо  $\cos \varphi$

$$\cos \varphi \geq \frac{\rho^2 + (r^2 - l^2)}{2r\rho} ,$$

звідки слідує обмеження зверху для змінного  $\varphi$

$$\varphi^*(r, \rho) = \begin{cases} \arccos \frac{l^2 - \rho^2 - r^2}{2r\rho} , & \left| \frac{l^2 - \rho^2 - r^2}{2r\rho} \right| \leq 1, \\ \pi, & \frac{l^2 - \rho^2 - r^2}{2r\rho} > 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

3. З нерівності (5.5) одержимо

$$[\rho - (r - l)][\rho - (r + l)] \leq 0 . \quad (5.6)$$

В свою чергу, звідси витікають обмеження на значення змінного  $\rho$

$$r \leq l, \quad 0 \leq \rho \leq r + l; \quad r > l, \quad r - l \leq \rho < r + l . \quad (5.7)$$

Умови (5.4), (5.7) дозволяють встановити межі інтегрування по  $\rho$  в залежності від значень параметрів  $r, t, z, l$

$$\rho \in [X(r), Y(t, r, z)], \quad (5.8)$$

$$Y(t, r, z) = \min(r + l; \sqrt{t^2 - z^2}); \quad X(r) = \max(0; r - l).$$

З (5.8) витікають співвідношення, що визначають границі області хвильових збурень

$$r < l: \quad z < t; \quad r > l: \quad \sqrt{(r - l)^2 + z^2} < t .$$

Тепер з виразу (5.3) з врахуванням (3.3) і (5.8) можна одержати вираз для складової тиску  $p_H$

$$p_H(t, r, z) = H\left(t - \sqrt{[X(r)]^2 + z^2}\right) \frac{P_0}{\pi} \int_{X(r)}^{Y(t, r, z)} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \Psi(r, \rho) \rho d\rho; \quad (5.9)$$

$$\Psi(r, \rho) = \int_0^{\varphi^*(r, \rho)} \chi\left(\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \varphi}\right) d\varphi .$$

Нагадаємо, що функція  $\chi(r)$  задає розподіл діючого тиску у області  $r \leq l$ .

**5.2. Доданок з функцією Дірака.** Для доданку  $p_\delta(t, r, z)$  маємо з (5.1)

$$p_\delta(t, r, z) = \frac{P_0}{2\pi} \int_0^\infty \delta\left(t - \sqrt{\rho^2 + z^2}\right) g_\delta(\rho, z) \times$$

$$\times \left[ \int_0^{2\pi} H\left(l - \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \varphi}\right) \times \chi\left(\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \varphi}\right) d\varphi \right] \rho d\rho .$$

Співвідношення (5.5), (5.8) справедливі і в даному випадку, тому останній вираз можна переписати у вигляді

$$p_{\delta}(t, r, z) = H\left(t - \sqrt{[X(r)]^2 + z^2}\right) \frac{P_0}{\pi} \int_{X(r)}^{Y(t, r, z)} \delta\left(t - \sqrt{\rho^2 + z^2}\right) \frac{z}{\rho^2 + z^2} \Psi(r, \rho) \rho d\rho.$$

Якщо скористатись представленням функції Дірака складного аргумента (4.8), одержимо

$$p_{\delta}(t, r, z) = H\left(t - \sqrt{[X(r)]^2 + z^2}\right) \frac{P_0 t}{\pi \sqrt{t^2 - z^2}} \int_{X(r)}^{Y(t, r, z)} \delta\left(\rho - \sqrt{t^2 - z^2}\right) \frac{z}{\rho^2 + z^2} \Psi(r, \rho) \rho d\rho.$$

Звідси на основі означення функції Дірака слідує вираз для  $p_{\delta}(t, r, z)$

$$p_{\delta}(t, r, z) = H\left(t - \sqrt{[X(r)]^2 + z^2}\right) H\left(\sqrt{z^2 + (r+l)^2} - t\right) P_0 \frac{z}{\pi t} \Psi\left(r, \sqrt{t^2 - z^2}\right), \quad (5.10)$$

де функція  $\Psi$  задана другим рядком співвідношень (5.9).

Таким чином, обидва доданки виразу (5.2) для  $p(t, r, z)$  визначені і обчислюються по формулам (5.9), (5.10).

При  $\chi(r) = 1$ , тобто у випадку однорідно розподіленого діючого тиску, з (5.9), (5.10) матимемо більш прості формули

$$p(t, r, z) = p_H(t, r, z) + p_{\delta}(t, r, z) \quad (5.11)$$

$$p_H(t, r, z) = H\left(t - \sqrt{[X(r)]^2 + z^2}\right) \frac{P_0}{\pi} \int_{X(r)}^{Y(t, r, z)} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \varphi^*(r, \rho) \rho d\rho, \quad (5.12)$$

$$p_{\delta}(t, r, z) = H\left(t - \sqrt{[X(r)]^2 + z^2}\right) H\left(\sqrt{z^2 + (r+l)^2} - t\right) P_0 \frac{z}{\pi t} \varphi^*\left(r, \sqrt{t^2 - z^2}\right).$$

При квадратичному законі розподілу діючого навантаження  $\chi(r) = 1 - r^2 / l^2$  доданки  $p_H(t, r, z)$ ,  $p_{\delta}(t, r, z)$  визначаються формулами (5.9), (5.10), в яких функція  $\Psi(r, \rho)$  має вигляд

$$\Psi(r, \rho) = \frac{l^2 - r^2 - \rho^2}{l^2} \varphi^*(r, \rho) + \frac{2r\rho}{l^2} \sin \varphi^*(r, \rho), \quad (5.13)$$

причому

$$\sin \varphi^*(r, \rho) = \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{l^2 - r^2 - \rho^2}{2r\rho}\right)^2}; & \left|\frac{l^2 - r^2 - \rho^2}{2r\rho}\right| \leq 1 \\ 0; & \frac{l^2 - r^2 - \rho^2}{2r\rho} > 1. \end{cases} \quad (5.14)$$

Функція  $\varphi^*(r, \rho)$  визначається формулою (5.5).

Таким чином в замкнутому виді отримано точний аналітичний розв'язок сформульованої задачі, на основі якого легко обчислюється і аналізується хвильове поле тиску в акустичному півпросторі при нестационарному поверхневому навантаженні.

**§6. Результати обчислень.**

Має місце наступна фізична картина процесу, що розглядається. Раптове прикладення зовнішнього навантаження ініціює поширення в рідині в напрямку осі  $z$  прямої плоскої хвилі у вигляді сходянки. Ця хвиля поширюється всередині циліндра, який спирається на область заданого навантаження. Одночасно на межі цієї області при  $r = l$  виникає хвиля розрідження (крайова хвиля), фронт якої має тороїдальну форму. Ця хвиля є розбіжною поза циліндричною поверхнею  $r = l$ , в середині циліндра хвиля збігається до осі  $z$ . При досягненні осі  $z$  вона відбивається й породжує вторинну (відбиту) хвилю розрідження. Суперпозиція цих хвиль формує хвильове поле в середовищі півпростору. За фронтом відбитої хвилі у випадку розглянутого навантаження з фіксованою областю дії встановлюється статичний стан. Наведені нижче результати обчислень ілюструють цей процес. Обчислення виконані для однорідного діючого тиску, тобто при  $\chi(r) = 1$ , по формулам (5.11), (5.12).

Для обчислень були обрані наступні вхідні параметри задачі

$$P_0 = 1; h = 1. \tag{6.1}$$

**6.1. Випадок  $r = 0$ .** У цьому випадку мають місце прості формули (4.10), (4.12), (4.14). Радіус області дії навантаження  $l$  і параметр швидкості розширення цієї області  $k$  варіювалися. Рис. 2 ілюструє хвильовий процес на осі симетрії для значення  $l = \text{const}$ . На рис. 2, *a* показаний розвиток тиску як функції часу в кількох точках осі  $z = 2; 4; 5; 8$ . Радіус області дії навантаження  $l$  обраний рівним 2. Можна бачити, що в момент появи первинної східчастої плоскої хвилі (що випромінюється кругом  $r < l, z = 0$ ) в точці  $z$  тиск набуває одиничний стрибок. Надалі тиск зберігає постійне значення аж до моменту  $t_s = \sqrt{z^2 + l^2}$  появи в цій точці фронту хвилі розрідження, що випромінюється колом  $r = 1, z = 0$ . При  $t = t_s$  тиск знову стрибкоподібно змінюється і досягається статичний розподіл тиску

$$p_{st} = \frac{\sqrt{l^2 + z^2} - z}{\sqrt{l^2 + z^2}}, \quad z < \sqrt{t^2 - l^2}. \tag{6.2}$$

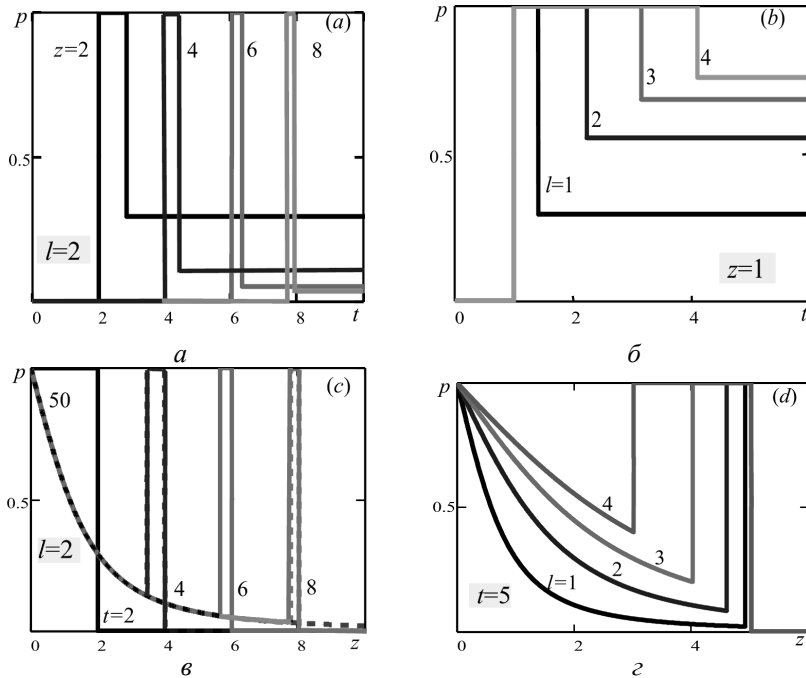


Рис. 2

На рис. 2, б показано розвиток тиску з часом для кількох значень радіуса області дії навантаження  $l = 1, 2, 3, 4$ . Зі збільшенням  $l$  тиск прямує до граничного одномірного випадку поширення плоскої хвилі, котра ініціюється на всій границі півпростору. Рис. 2, в ілюструє розподіл тиску вздовж осі  $z$  у фіксовані моменти часу  $t = 2; 4; 6; 8$ . Радіус  $l = 2$ . Тиск у точці  $z$  стрибкоподібно набуває одиничного значення й залишається постійним на відрізку осі  $z \in (\sqrt{t^2 - l^2}, t)$ . В точці  $z = \sqrt{t^2 - l^2}$  в момент часу  $t$  з'являється фронт хвилі розрідження, знову відбувається стрибок тиску і на відрізку  $0 \leq z \leq \sqrt{t^2 - l^2}$  встановлюється статичний розподіл тиску (6.2). Крива  $t = 2$  представляє діюче навантаження. На рисунку показано також обчислений при  $t = 50$  тиск, до якого він прямує за фронтом хвилі розрідження при менших значеннях  $t$ . Нарешті, на рис. 2, г зображений розподіл тиску уздовж осі  $z$  в момент часу  $t = 5$  для значень  $l = 1, 2, 3, 4$ . Всі криві мають одиничний стрибок у точці  $z = 5$ . Видно, як відрізок постійного одиничного тиску збільшується з ростом  $l$ . За цим відрізком має місце статичний розподіл тиску вздовж  $l$  аж до  $z = 0$ .

Рис. 3 присвячений випадку, коли область дії навантаження розширюється з часом – формули (4.12), (4.14).

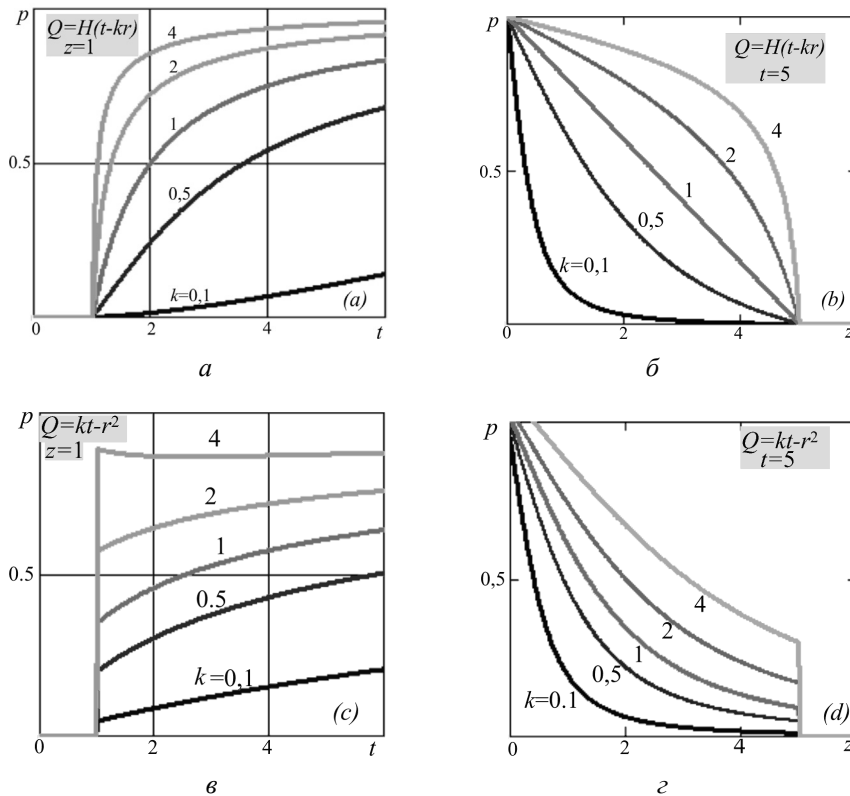


Рис. 3

На рис. 3, а показано, як розвивається тиск з часом у точці  $z = 1$  при постійній швидкості розширення області навантаження  $k = 0,1; 0,5; 1; 2; 4$ . Можна помітити, що при  $k < 1$  відбувається поступальний ріст тиску, при  $k > 1$  тиск у початковий момент розвивається стрибком. Для тих же значень  $k$  рис. 3, б показує розподіл тиску уздовж осі  $z$  в момент часу  $t = 5$ . Графік  $k = 1$ , що відповідає трансзвуковій швидкості розширення, демонструє лінійний розподіл тиску уздовж осі.

Рис. 3, в, з відноситься до задачі зі змінною швидкістю поширення навантаження  $\sqrt{k}/2\sqrt{t}$ . Параметр швидкості  $k$  на рисунках дорівнює  $k = 0,1; 0,5; 1; 2; 4$ . При  $t = 0$  швидкість розширення навантаження нескінченно велика, і це обумовлює стрибок тиску в точці  $z = 0$  на рис. 3, в і в момент часу  $t = 5$  на рис. 3, з.

**6.2. Випадок  $r > 0$ .** Нижче представлено результати обчислень при  $r > 0$ ,  $l = \text{const}$  на основі виразів (5.11), (5.12). Відзначимо, що розрахунки, виконані за цими формулами, при  $r \rightarrow 0$  збіглися з результатами, що показано на рис. 2.

На рис. 4, а представлений тиск як функція часу в площинах  $z=2; 4; 6$  при значеннях радіуса  $r=l$  (суцільні лінії) і  $r=3$  (пунктир). Радіус області дії навантаження  $l$  дорівнює 2, отже циліндрична поверхня  $r=1$  перебуває усередині поверхні  $r=l$ . Таким чином, вона знаходиться під дією первинної (прямої) плоскої хвилі, що випромінюється кругом  $r < l$ ,  $z=0$ , і хвилі розрідження, що випромінюється колом  $r=l$ ,  $z=0$ . Тиск на поверхні  $r=l$  має одиничний стрибок у момент часу  $t=z$ , обумовлений приходом фронту прямої хвилі. При фіксованому значенні  $z$  хвиля розрідження досягає поверхні  $r=1$  раніше, ніж осі симетрії, тому графіки на рис. 4, а мають більш короткий часовий відрізок постійного одиничного тиску, чим аналогічні графіки на рис. 2, а при  $r=0$ . За цим відрізком у момент часу  $t_r = \sqrt{(l-r)^2 + z^2}$  (конкретно при  $t_r = 2,24$  для  $z=2$ ;  $t_r = 4,12$  для  $z=4$ ;  $t_r = 6,08$  для  $z=6$ ) з'являється фронт хвилі розрідження і тиск визначається її суперпозицією з первинною хвилею. Далі в момент часу  $t_s = \sqrt{(l+r)^2 + z^2}$  ( $t_s = 3,61$  для  $z=2$ ;  $t_s = 5$  для  $z=4$ ;  $t_s = 6,71$  для  $t=6$ ) на циліндричній поверхні  $r=1$  з'являється відбита (вторинна) хвиля розрідження і встановлюється статичний стан. Поверхня  $r=3$  знаходиться зовні циліндра  $r=l$ . Вона піддана дії хвилі розрідження, яка вступає в перетин с координатою  $z$  в момент часу  $t_r = \sqrt{(r-l)^2 + z^2}$ . Розвиток тиску починається стрибкоподібно. В момент часу  $t_s = \sqrt{(l+r)^2 + z^2}$  ( $t_s = 5,39$  для  $z=2$ ;  $t_s = 6,40$  для  $z=4$ ;  $t_s = 7,81$  для  $z=6$ ) в цей перетин вступає відбита віссю  $z=0$  хвиля розрідження і тиск набуває статичного значення.

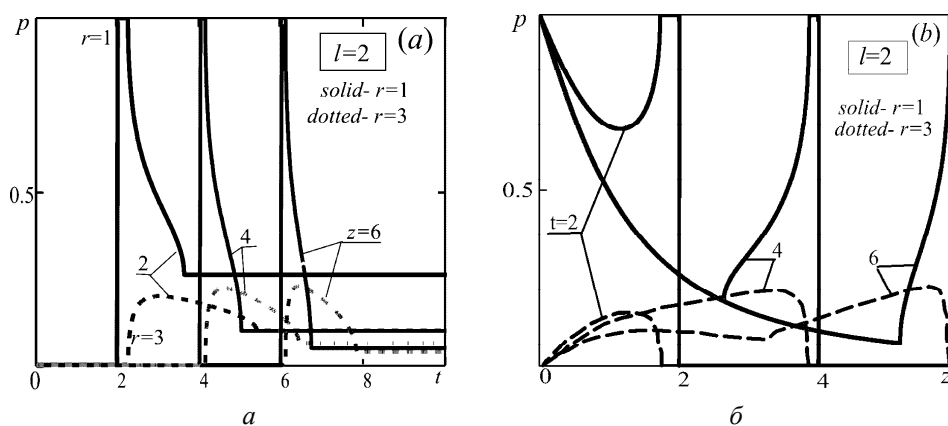


Рис. 4

Рис. 4, б показує миттєвий розподіл тиску вздовж координати  $z$  на циліндричній поверхні  $r=1$  (суцільні лінії) і  $r=3$  (пунктир) в моменти часу  $t=2; 4; 6$  при  $l=2$ . На поверхні  $r=1$  фронт первинної хвилі знаходиться в перетині  $z=t$ , тиск має оди-

ничний стрибок. За фронтом тиск постійний аж до перетину  $z_r = \sqrt{t^2 - (l-r)^2}$  ( $z_r = 1,73$  для  $t = 2$ ;  $z_r = 3,87$  для  $t = 4$ ;  $z_r = 5,92$  для  $t = 6$ ), починаючи з якого і до вільної поверхні  $z = 0$  проявляється внесок хвилі розрідження. Далі від  $z = 0$  і до  $z_s = \sqrt{t^2 - (r+l)^2}$  ( $z_s = 2,65$  для  $t = 4$ ;  $z_s = 5,20$  для  $t = 6$ ) поява відбитої хвилі розрідження приводить до статичного розподілу тиску. При  $t = 2$  відбита хвиля ще не досягає поверхні  $r = 1$  і розподіл тиску в цей момент часу визначається тільки суперпозицією первинної хвилі і хвилі розрідження, що збігається.

На поверхні  $r = 3$  тиск визначається хвилею розрідження і відбитою від осі  $z$  хвилею. Фронт хвилі розрідження знаходиться в визначеному вище перетині  $z_r = \sqrt{t^2 - (r-l)^2}$ . Фронт вторинної хвилі, що розходиться, знаходиться в перетині  $z_s = \sqrt{t^2 - (r+l)^2}$ . Ця хвиля в моменти часу  $t = 2$  і  $t = 4$  не досягає поверхні  $r = 3$ , тому відповідні криві відображають лише вклад хвилі розрідження. При  $t = 6$  фронт вторинної хвилі знаходиться в перетині  $z_s = 3,32$ . Суперпозиція цих двох хвиль обумовлює статичний тиск на ділянці  $0 \leq z \leq z_s$ .

Як уже згадувалось, ініційована на колі  $r = l$ ,  $z = 0$  тороїдальна хвиля розрідження розширюючись рухається як в напрямку  $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$ , так і в напрямку  $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow z$ . Фронт цієї хвилі досягає осі  $z$  в точці  $(0, z)$  в момент часу  $t_{cr} = \sqrt{l^2 + z^2}$ . Рис. 5, а, б, в ілюструють процес руху хвилі, що збігається, в перетинах а)  $z = 0,1$ ; б)  $z = 1,0$ ; в)  $z = 5$ .

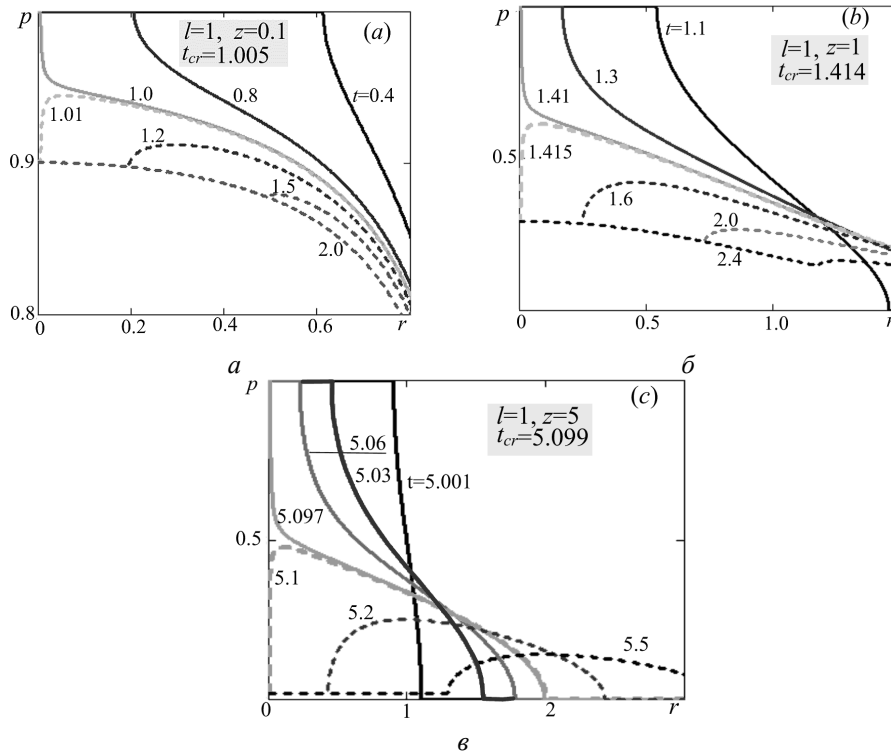


Рис. 5

Параметр  $l$  тут дорівнює одиниці. Значення  $t_{cr}$  будуть, відповідно, рівні *a*) 1,005; *b*) 1,414; *c*) 5,099. Суцільними лініями показаний миттєвий розподіл тиску в моменти часу, що передують  $t_{cr}$  :

$$a) t = 0,4; 0,8; 1,0; \quad b) t = 1,1; 1,3; 1,41; \quad c) t = 5,001; 5,03; 5,06; 5,097.$$

Пунктирні лінії зображують криві тиску в моменти часу після  $t_{cr}$  :

$$a) t = 1,01; 1,2; 1,5; \quad b) t = 1,415; 1,6; 2,0; \quad c) t = 5,1; 5,2; 5,5.$$

Криві  $t = 1,0$  і  $t = 1,01$  на рис. 5, *a*;  $t = 1,41$  і  $t = 1,415$  на рис. 5, *б*, а також  $t = 5,097$  і  $t = 5,1$  на рис. 5, *в* побудовані для моментів часу безпосередньо до і після  $t_{cr}$ . Ці криві показують, що в момент часу  $t_{cr}$  відбувається стрибкоподібна зміна тиску в точці, що розглядається. Починаючи з моменту  $t_{cr}$ , в середовищі настає статичний стан.

Одержаний розв'язок дозволяє виконати обчислення і дослідження хвильового процесу як у ближній, так і у дальній зоні.

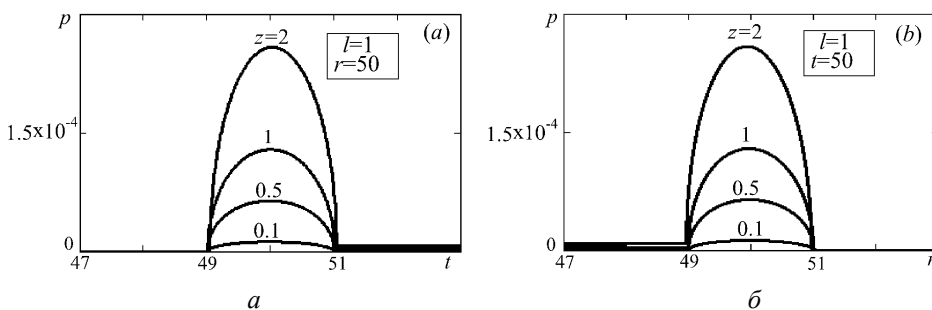


Рис. 6

Для ілюстрації останнього на рис. 6 при  $l = 1$  представлений тиск, обчислений на циліндричній поверхні  $r = 50$  при значеннях глибини  $z = 0,1; 0,5; 1; 2$  як функція часу – рис. 6, *a*, і в момент часу  $t = 50$  на тих же глибинах в околиці  $r = 50$  – рис. 6, *б*. Внаслідок досить великого віддалення від джерела й малих значень глибини розходження в значеннях моменту появи фронту хвилі розрідження на рисунку практично не помітно ( $t = 49$ ). На інтервалі  $t \in (49, 51)$  тільки ця хвиля здійснює внесок у тиск. Вторинна (відбита) хвиля з'являється при  $t = 51$ , після чого встановлюється статичний стан – рис. 6, *a*. Як показує рис. 6, *б*, у момент часу  $t = 50$  фронт відбитої хвилі перебуває в точці  $r = 49$ , аж до якої, починаючи від  $r = 0$ , має місце статичний стан. Хвиля розрідження формує графік тиску на відрізку  $r \in (49, 51)$ . Можна переконатися, що зі збільшенням глибини росте амплітудне значення тиску, який досягає значення 1 на осі  $z$ . При цьому інтервал між фронтами хвилі розрідження й вторинної хвилі й, отже, ширина одиничного імпульсу зменшується. Ця тенденція добре видна на графіках рис. 2, побудованих для тиску на осі  $z$ .

### Висновки.

Застосування класичних методів розділення змінних, інтегральних перетворень Лапласа й Ханкеля і методів їх обернення з використанням відомих табличних співвідношень і теорем про згортки дали можливість отримати в роботі точний аналітичний розв'язок осесиметричної нестационарної задачі для акустичного півпростору. Розв'язок дає можливість обчислити тиск або швидкість як функцію часу й просторових координат у ближній і дальній зоні. Обрана в якості основної залежність діючого навантаження від часу у вигляді східчастої функції, з одного боку, ілюструє характерні особливості розглянутого хвильового процесу; з іншого боку, такий розв'язок може бути використаний як основа при розгляді інших практично цікавих випадків залежності від часу. Варто згадати, що час чисельної реалізації задачі у системі комп'ютерної алгебри обчислюється секундами, тому даний підхід може бути при необхідності використаний для оперативного одержання необхідної інформації про характерис-



тики хвильових полів. Вкажемо також, що отримані результати можуть виявитися корисними як орієнтир при розробці різноманітних чисельних підходів до розв'язку задач із більш складними вхідними умовами.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Побудовано точний аналітичний розв'язок для осесиметричної задачі про дію нестационарного тиску на поверхню півпростору ідеальної стисливої рідини. Застосовується метод розділення змінних і інтегральних перетворень Лапласа та Ханкеля. Обернення перетворень виконується з використанням табличних співвідношень і теорем згортки для широкого спектру діючих навантажень. Вираз для тиску представлений в замкнутому вигляді і дозволяє визначити характеристики хвильового процесу в довільній точці півпростору в довільний момент часу. Визначено особливості досліджуваного хвильового процесу.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** шар стисливої рідини, осесиметрична задача, нестационарне навантаження, точний розв'язок.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований в 2-х т. Т1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: ГИФМЛ, 1969. – 344 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований в 2-х т. Т2. Преобразование Бесселя. – Москва: ГИФМЛ, 1974. – 298 с.
3. *Козина О.Г., Макаров Г.И.* Переходные процессы в акустических полях, создаваемых поршневой мембраной произвольной формы при произвольном характере колебаний ее поверхности // Акустич. журнал. – 1961. – 7, № 1, – С. 53 – 58.
4. *Козина О.Г., Макаров Г.И.* Переходные процессы в акустических полях поршневых мембран некоторых конкретных форм // Акустич. журнал. – 1962. – 8, № 1. – С. 67 – 71.
5. *Папулис А.* Теория систем и преобразований в оптике. – Москва: Мир. – 1971. – 498 с.
6. *Релей Дж.* Теория звука, т.2. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 477 с.
7. *Cagniard L.* Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. (Translated into English and revised by Flinn E. A., Dix C. H.). – New York: McGraw Hill, 1962.
8. *Freedman A.* Acoustic field of a pulsed circular piston // J. Sound Vib. – 1994. –N 170. – P. 495 – 519.
9. *Greenspan M.* Piston radiator: some extensions of the theory // J. Acoust. Soc. Am. – 1976. – 65, N 3. – P. 608 – 621.
10. *Harris G.R.* Review of Transient Field Theory for Baffled Planar Piston // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – 70, N 1. – P. 10 – 20.
11. *Kubenko V.D.* Nonstationary Deformation of an Elastic Layer with Mixed Boundary Conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 6. – P. 563 – 580.
12. *Kubenko V.D.* Non-stationary stress state of an elastic layer at the mixed boundary conditions // Z. Angew. Math. Mech. – 2016. – 96, N 12. — P. 1442 – 1456.
13. *Kubenko V.D.* Analytical solution to a non-stationary load on an infinite strip of compressible liquid // Archive Appl. Mech. – 2018. – 88. – P. 1163 – 1173.
14. *Kubenko V.D., Salenko S.D.* Wave Formation in an Elastic Layer under Moving Nonstationary Load // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 2. – P.175 – 186.
15. *Kubenko V.D.* Non-Stationary Plane Problem for a Liquid Layer on a Rigid Base // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 5. – P. 470 – 486.
16. *Lockwood C., Willette J.G.* High-speed method for computing the exact solution for the pressure variations in the nearfield of a baffle piston // J. Acoust. Soc. Am. – 1973. – 53, N 3. – P.735 – 741.
17. *Mast T.D., Feng Ui.* Simplified expansions for radiation from a baffled circular piston // J. Acoust. Soc. Am. – 2005. – 118 (part 6). – P. 3457 – 3464.
18. *Stepanishen P.R.* An approach to computing time-dependent interaction forces and mutual radiation impedances between pistons in a rigid planar baffle // J. Acoust. Soc. Am. – 1971. – 49, N 1 (part 2). – P. 283 – 292.
19. *Stepanishen P.R.* The time-dependent force and radiation impedance on a piston in a rigid infinite planar baffle // J. Acoust. Soc. Am. – 1971. – 49, N 3 (part 2). – P. 841 – 849.
20. *Stepanishen P.R.* Transient radiation from piston in an infinite planar baffle // J. Acoust. Soc. Am. – 1971. – 49, N 5. – P. 1629 – 1638.

Надійшла 29.09.2020

Затверджена до друку 24.06.2021