А.А.Мартинюк, В.О.Чернієнко

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ РУХУ НЕАВТОНОМНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СИСТЕМ

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; center@inmech.kiev.ua

Abstract. For the non-autonomous polynomial equations, a method is proposed for constructing a stabilizing control based on the direct Lyapunov method and solving a higher-order algebraic equation. The condition of existence of admissible management stabilizing movement to the asymptotic stability is obtained. The control which stabilizes the movement of a system to the equi-limited one is established. For the scalar polynomial equation, the limiting value of the existence of stabilizing control is indicated. A special case for a nominal polynomial system is considered, and examples are given illustrating the general results.

Key words: polynomial equation, stabilization of equilibrium state, stability, equi-limiting motion.

Вступ.

Дослідження неавтономних систем диференціальних рівнянь збуреного руху має не тільки самостійне значення, але і є базою для аналізу багатьох процесів і явищ реального світу (див. [1, 3, 4, 15] і бібліографію там).

Якісний аналіз руху неавтономних поліноміальних систем є однією з актуальних проблем сучасної теорії стійкості руху (див. [10, 12] і бібліографію там). Проблема керування рухом поліноміальних систем є однією з відкритих для дослідження. Поліноміальні системи рівнянь знаходять застосування при описі систем «вхід – вихід» для лінійних рівнянь з раціональними передавальними функціями. Така модель наочно відображає дві важливі властивості системи: розташування полюсів і нулів (див. [9] і бібліографію там).

У цій статті наведено один новий підхід до розв’язування задачі стабілізації стану рівноваги неавтономних поліноміальних рівнянь. Стаття побудована за таким планом. У розділі 1 розглядається система поліноміальних рівнянь і формулюється постановка задачі синтезу керувань. У розділі 2 наведено одну загальну теорему про синтез керувань на основі методу функцій Ляпунова. У розділі 3 наведені результати стабілізації нульового розв’язання поліноміальної системи загального вигляду. У розділі 4 обговорюється проблема стабілізації рухів, які описуються скалярним поліноміальним рівнянням. У розділі 5 розглядається задача про стабілізацію руху в одному окремому випадку. У розділі 6 анонсована одна задача для подальшого дослідження поліноміальних рівнянь.

1. Постановка задачі.

Розглядається керована поліноміальна система

$$dx / dt = f(t, x, u) ; \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0 , \tag{2}$$

де $x(t) \in R^n$ – вектор стану системи; $u = u(t, x) \in U \subseteq R^m$ – керування.

Тут U – задана множина керувань при всіх $(t,x) \in R_+ \times D$, де $D \subseteq R^n$ – відкрита область в R^n, що містить точку $x = 0$.

Керування $u(t,x)$ припускається допустимим, тобто

(1) компоненти вектор-функції $u(t,x)$ визначені і кусково-неперервні на будь-якому скінченному інтервалі $[t_0, t_1] \subset R_+$ при всіх $x \in D \setminus \{0\}$;

(2) $u(t,x) \in U$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$;

(3) $u(t,x) = 0$ при всіх $t \in [t_0, t_1]$, якщо і тільки якщо $x = 0$;

(4) $u(t,x) < \infty$ при всіх $(t,x) \in R_+ \times D \setminus \{0\}$.

Крім того, припустимо, що при заданому допустимому керуванні $u(t,x)$ і початкових умовах (2) поліноміальна система рівнянь (1) має єдиний неперервний розв'язок $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ при всіх $t \in R_+$. Такий розв'язок називається допустимим ([13] стор. 14).

Вектор-функція $f \in C(R_+ \times R^n \times U, R^n)$ – має своїми компонентами однорідні поліноми від n невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ із зведеними подібними членами, $f(t,0,0) = 0$ при всіх $t \in R_+$.

Цікавою є задача про побудову керування $u = \bar{u}(t,x)$, при якому стан рівноваги системи рівнянь (1) стабілізується до стійкого або асимптотично стійкого.

2. Попередні результати.

Припустимо, що в системі (1) права частина лінійна за керуванням і має вигляд $f(t,x,u) = f_0(t,x) + f_1(t,x)u(t,x)$, де $f_0 \in C(R_+ \times R^n, R^n)$ і $f_1 \in C(R_+ \times R^n, R^n)$, $u \in \bar{U}$, $\bar{U} = (u(t,x) : R_+ \times R^n \to R)$.

Розглянемо поліноміальну систему рівнянь збуреного руху

$$dx/dt = f_0(t,x) + f_1(t,x)u(t,x); \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Для номінальної поліноміальної системи рівнянь

$$dx/dt = f_0(t,x),\ f(t,0) = 0 \tag{5}$$

побудуємо диференційовну функцію Ляпунова $V \in C(R_+ \times R^n, R_+)$, $V(t,x) > 0$ при всіх $x \in D \setminus \{0\}$ і припустимо, що $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} = 0$ при $x = 0$. Введемо позначення:

$$w(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^T f_0(t,x); \quad p_1(t,x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^T f_1(t,x).$$

Разом з функцією $V(t,x)$ будемо розглядати її повну похідну уздовж розв'язків системи (3) при початкових умовах (4)

$$\frac{dV}{dt}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^T (f_0(t,x) + f_1(t,x)u(t,x)), \tag{6}$$

де

$$\frac{dV}{dt}(t,x) : R_+ \times R^n \to R.$$

Покажемо, що має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для поліноміальної системи (3) виконуються умови:*

(1) для системи (5) побудована диференційовна функція Ляпунова $V(t,x)$ з неперервними і обмеженими частинними похідними;

(2) при всіх $(t,x)\in R_+\times D\setminus\{0\}$ виконується умова $p_1(t,x)\neq 0$;

(3) в області значень $(t,x)\in R_+\times D\setminus\{0\}$ виконується умова

$$\inf_{u\in U}\left[\frac{\partial V}{\partial t}(t,x)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^T f(t,x,u)\right]<0.$$

Тоді знайдеться допустиме керування $u=\bar{u}(t,x)\in\bar{U}$, при $(t,x)\in R_+\times D\setminus\{0\}$, яке стабілізує рух системи (3) до асимптотично стійкого.

Доведення. При виконанні умов (1), (2) теореми 1 будемо розглядати функцію Ляпунова $V\in C(R_+\times R^n, R_+)$ та її повну похідну в силу системи (3). Беручи до уваги деякі результати статей [8, 14], керування $\bar{u}(t,x)$ побудуємо у вигляді

$$\bar{u}(t,x)=-\frac{w(t,x)+\sqrt{w^2(t,x)+p_1^2(t,x)}}{p_1(t,x)}. \tag{7}$$

Неважко перевірити, що при цьому керуванні для повної похідної функції Ляпунова $V(t,x)$ уздовж розв'язків системи (3) має місце оцінка

$$\frac{dV}{dt}(t,x)\,|_{(3)}\leq-\sqrt{w^2(t,x)+p_1^2(t,x)}<0 \tag{8}$$

при всіх $(t,x)\in R_+\times D\setminus\{0\}$.

Нерівність (8) разом з умовою (3) теореми 1 є достатньою для застосування теореми Ляпунова [6] про асимптотичну стійкість стану $x=0$ системи (3).

З формули (7) для керування $\bar{u}(t,x)$ неважко бачити, що воно задовольняє умовам (1) – (4), наведеним вище для допустимих керувань.

3. Стабілізація руху поліноміальної системи.

У цьому розділі на основі методу функцій Ляпунова [6, 15] знайдено керування і встановлені достатні умови, при яких рух поліноміальної системи стабілізується до різних типів стійкості або екві-обмеженості.

Припустимо, що права частина системи рівнянь (1) має вигляд

$$f(t,x,u)=f_0(t,x)+f_1(t,x)u(t,x)+\ldots+f_m(t,x)u^m(t,x) \tag{9}$$

і розглянемо систему поліноміальних рівнянь обуреного руху

$$dx/dt=f_0(t,x)+f_1(t,x)u(t,x)+\ldots+f_m(t,x)u^m(t,x), \tag{10}$$

де $f_i(t,x)\in C(R_+\times R^n, R^n)$, $i=0, 1, 2, ..., m$ є поліноміальними функціями щодо змінних $x_1,\ldots,x_n$, $(u,\ldots,u^m)\in\bar{U}$ і $f_i(t,0)=0$ при всіх $t\geq t_0$.

Для номінальної поліноміальної системи рівнянь

$$dx/dt=f_0(t,x); \tag{11}$$

$$x(t_0)=x_0, \tag{12}$$

де $x\in R^n$ і $f_0\in C(R_+\times R^n, R^n)$, побудуємо диференційовну функцію Ляпунова $V(t,x)>0$ при всіх $(t,x)\in R_+\times D\setminus\{0\}$ і $V(t,0)=0$. Як і раніше, припускається, що $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}=0$ при $x=0$.

Позначимо

$$w(t,x)=\frac{\partial V}{\partial t}(t,x)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^T f_0(t,x): R_+\times R^n\to R\ ;$$

$$p_i(t,x)=\left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^T f_i(t,x): R_+\times R^n\to R,\ i=1,2,\ldots,m\,.$$

Далі, при $p_1(t,x)\neq 0$ при всіх $(t,x)\in R_+\times D\setminus\{0\}$, керування

$$\tilde{u}(t,x)=-\frac{w(t,x)}{p_1(t,x)}: R_+\times R^n\to R\ , \tag{13}$$

побудоване для вкороченої системи рівнянь

$$dx/dt=f_0(t,x)+f_1(t,x)u(t,x)\ , \tag{14}$$

розглядатимемо як наближене для системи рівнянь (10).

3.1 Стабілізація руху до стійкого .Зауважимо, що керування (13) стабілізує нульовий розв'язок системи (14) до стійкого.

Покажемо, що має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Припустимо, що для номінальної системи (11) побудована диференційовна функція Ляпунова* $V(t,x)$*, означена при всіх* $0\le t<\infty$ *і* $x\in B_r\setminus\{0\}$*, де* $B_r=\{x\in R^n:\|x\|<r\}$*, на основі якої побудовано керування (13) для вкороченої системи (14). Якщо при цьому виконуються умови:*

(1) $V(t,x)=0$ *при всіх* $t\ge t_0$ *і при* $x=0$*;*

(2) існує функція $a\in K$ *–класу Хана, така, що* $a(\|x\|)\le V(t,x)$ *при всіх* $(t,x)\in R_+\times B_r$*;*

(3) $\sum_{i=2}^{m}p_i(t,x)\tilde{u}^i(t,x)\le 0$ *при всіх* $t\ge t_0$ *і* $x\in B_r\setminus\{0\}$*, тоді наближене керування (13) стабілізує нульовий розв'язок системи (10) до стійкого.*

Доведення. З умов теореми 2 випливає, що при виконанні умов (1) – (3) повна похідна по функції Ляпунова $V(t,x)$ менше або дорівнює нулю, тобто виконуються всі умови теореми Ляпунова [6] про стійкість руху.

Теорема 3. *Якщо в умовах теореми 2 умову (2) замінити наступною*

$$(2)'\quad a(\|x\|)\le V(t,x)\le b(\|x\|)\,,$$

де функції $a, b\in K$ *– класу Хана, тоді наближене керування (13) стабілізує нульовий розв'язок системи (10) до рівномірно стійкого.*

Доведення. При виконанні умов теореми 2 з функцією Ляпунова, що задовольняє оцінкам $(2)'$, виконуються всі умови теореми 8.2 з монографії [15] (див. також Наслідок 2 в монографії [4], стор. 57) і тому наближене керування (13) стабілізує нульовий розв'язок системи (11) до рівномірно стійкого.

Далі розглянемо питання про стабілізацію руху системи (11) керуванням (14) до асимптотично стійкого. Покажемо, що вірно наступне твердження.

Теорема 4. *Якщо в умовах теореми 2 умову (2) замінити умовою* $(2)'$ *із теореми 3 і умову (3) замінити наступною:*

$(3)'$ *існують* $1<k<m$ *і функція* $c\in K$ *–класу Хана, такі, що*

$$\sum_{i=2}^{k}p_i(t,x)\tilde{u}^i(t,x)\le -c(\|x\|)$$

при всіх $t \ge t_0$ *і* $x \in B_r \setminus \{0\}$, *тоді наближене керування (13) стабілізує нульовий розв'язок системи*

$$dx / dt = f_0(t,x) + f_1(t,x)u(t,x) + \ldots + f_k(t,x)u^m(t,x) \qquad (15)$$

до рівномірно асимптотично стійкого.

Доведення. При виконанні умов теореми 4 виконуються всі умови теореми 8.3 з монографії [15] (див. також Наслідок 3 в монографії [4], стор. 58) і тому наближене керування (13) стабілізує нульовий розв'язок системи до рівномірно асимптотично стійкого.

Наслідок 1. Якщо виконуються умови теореми 4 із заміною умови $(3)'$ на наступну:

$(3)''$ існують $1 < k < m$ і стала $q > 0$ такі, що

$$\sum_{i=2}^{k} p_i(t,x)\tilde{u}^i(t,x) \le -qV(t,x)$$

при всіх $t \in R_+$ і $x \in B_r \setminus \{0\}$, тоді наближене керування (13) стабілізує нульовий розв'язок системи (16) до рівномірно асимптотично стійкого.

Далі, поліноміальну систему (10) перепишемо у вигляді

$$dx / dt = \sum_{i=0}^{k} f_i(t,x)u^i(t,x) + \sum_{i=k+1}^{m} f_i(t,x)u^i(t,x)\,. \qquad (16)$$

Припустимо, що для значень x з області $\|x\| < \varepsilon$ існує $\Delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$\left\| \sum_{i=k+1}^{m} f_i(t,x)\tilde{u}^i(t,x) \right\| < \Delta(\varepsilon) \qquad (17)$$

при всіх $t \in R_+$ і $x \in B_\varepsilon \setminus \{0\}$.

Покажемо, що припустимий розв'язок $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ системи (18) задовольняє оцінці $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$ при $\|x_0\| < \Delta(\varepsilon)$ і при всіх $t \ge t_0$, якщо наближене керування (14) побудоване за допомогою функції Ляпунова задовольняє умову Ліпшиця:

$$|V(t,x) - V(t,x')| \le \mathrm{L}\|x - x'\| \qquad (18)$$

при всіх $(t,x) \in R_+ \times B_\varepsilon \setminus \{0\}$, $\mathrm{L} > 0$ – стала Ліпшиця. Покажемо, що має місце наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай керування (13), побудоване на основі диференційовної функції* $V(t,x)$, *що задовольняє оцінці (18), стабілізує нульовий розв'язок системи (15) до рівномірно асимптотично стійкого, і крім того виконуються умови наслідку 1 і умова (17). Тоді нульовий розв'язок системи (16) стабілізується керуванням (13) до стійкого.*

Доведення. Будемо розглядати функцію $V(t,x)$, що задовольняє оцінці (18) і керування (13) побудоване на основі цієї функції. У наслідку 1 приймемо $q = 1$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta_1(\varepsilon) > 0$ так, що виконується нерівність $b(\delta_1) < a(\varepsilon)$. Тут $a(r)$ і $b(r)$ – функції класу Хана з умови $(2)'$ теореми 3. Далі виберемо $0 < \Delta(\varepsilon) < \delta_1$ настільки малим, що виконується нерівність $a(\delta_1) - L\Delta(\varepsilon) > 0$, де L – стала Ліпшиця з оцінки (18). Нехай виконується умова (17) і припустимий розв'язок $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ при $\|x_0\| < \Delta(\varepsilon)$ задовольняє умові $\|x(t,t_0,x_0)\| = \varepsilon$ в певний момент $t \in R_+$. Тоді знайдуться значення $t_1, t_2 \in R_+$ такі, що $\|x(t_1,t_0,x_0)\| = \delta_1$ і $\|x(t_2,t_0,x_0)\| = \varepsilon$ та при всіх $t \in (t_1,t_2)$ для розв'язання $x(t)$ вірна оцінка $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$. У той же час при виконанні умов теореми 5 при всіх $t \in [t_1,t_2]$ маємо оцінку

$$dV(t,x(t))/dt \le -V(t,x(t)) + L\left\| \sum_{i=k+1}^{m} f_i(t,x)\tilde{u}^i(t,x) \right\| \le -a(\delta_1) + L\Delta(\varepsilon) \le 0 \qquad (19)$$

в області $\|x\| < \varepsilon$.

З умови $(2)'$ теореми 3 і оцінки (19) отримуємо нерівності

$$a(\varepsilon) \le V(t_2, x(t_2)) \le V(t_1, x(t_1)) \le b(\delta_1) .$$

Це суперечить вибору величини δ_1. Отже, при всіх $t \ge t_0$ вірна оцінка $\|x(t,\, t_0,\, x_0)\| < \varepsilon$. Таким чином, керування (13) стабілізує нульовий розв'язок системи (16) за умови (17).

3.2 Стабілізація руху до екві-обмеженого. Припустимо, що вектор-функції $f_i(t,x)$, $i = 0,1,\dots m$ в системі (10) неперервні на $R_+ \times R^n$ і функція Ляпунова $V(t,x) > 0$ означена при $0 \le t < \infty$ і $\|x\| \ge r$, де r може бути як завгодно великим.

Будемо розглядати систему (16) в контексті з наступним означенням.

Означення 1. Припустимий розв'язок $x(t,t_0,x_0)$ системи (16) стабілізується керуванням виду (13) до екві-обмеженого, якщо для заданого $\alpha > 0$ існує два числа $\beta(\alpha) > 0$ і $\Delta(\alpha) > 0$ такі, що при $\|x_0\| < \alpha$ виконується оцінка $\|x(t,t_0,x_0)\| < \beta(\alpha)$ при всіх $t \ge t_0$, де $x(t,t_0,x_0)$ – припустимий розв'язок системи (16) при умові

$$\left\| \sum_{i=k+1}^{m} f_i(t,x)\tilde{u}^i(t,x) \right\| < \Delta(\alpha) \qquad (20)$$

при всіх $t \ge t_0$ і $\alpha < \|x\| < \beta(\alpha)$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай керування (13) побудовано на основі функції Ляпунова $V(t,x)$, для якої виконуються умови:*

(1) існує функція $a \in KR$ –класу Хана і функція $b \in K$ –класу Хана такі, що

$$a(\|x\|) \le V(t,x) \le b(\|x\|)$$

при всіх $t \ge t_0$ і $x \in R^n$;

(2) $|V(t,x) - V(t,x')| \le k(\alpha)\|x - x'\|$, де $k(\alpha) > 0$;

(3) існує $1 < k < m$ таке, що

$$\left\| \sum_{i=2}^{k} p_i(t,x)\tilde{u}^i(t,x) \right\| \le -c(\|x\|) ,$$

де $c(r) > 0$ – неперервна функція.

(4) при заданому $\alpha > 0$ існують $\Delta(\alpha) > 0$ і $\beta(\alpha) > 0$ такі, що виконується умова (20) в області значень $\alpha < \|x\| < \beta(\alpha)$.

Тоді керування (13) стабілізує рух системи (16) до екві-обмеженого в сенсі означення 1.

Доведення. Нехай задано $\alpha > 0$. Виберемо $\beta(\alpha) > 0$ так, щоб $a(\alpha) > b(\beta)$.

При виконанні умов (2), (3) теореми 6 для значень $\alpha \le \|x\| \le \beta(\alpha)$ існують постійні $k(\alpha) > 0$ і $\lambda(\alpha) > 0$ такі, що

$$\sum_{i=2}^{k} p_i(t,x)\tilde{u}^i(t,x) \le -\lambda(\alpha)$$

і

$$dV(t,x)/dt \le \sum_{i=2}^{k} p_i(t,x)\tilde{u}^i(t,x) + k(\alpha)\left\| \sum_{i=k+1}^{m} p_i(t,x)\tilde{u}^i(t,x) \right\| \tag{21}$$

при всіх $0 \le t < \infty$ і $\alpha \le \|x\| < \beta(\alpha)$.

При виконанні умови (4) теореми 6 виберемо $\Delta(\alpha)$ так, що $\Delta(\alpha) \le \lambda(\alpha)/k(\alpha)$. При цьому з оцінки (21) отримуємо

$$dV(t,x)/dt \le 0 \tag{22}$$

в області значень $0 \le t < \infty$ і $\alpha \le \|x\| \le \beta(\alpha)$ як тільки виконується оцінка (20). З оцінки (22) при $\|x_0\| < \alpha$ випливає, що припустиме рішення $x(t)$ задовольняє нерівності $\|x(t)\| < \beta(\alpha)$ при всіх $t \in R_+$. Цим теорема 6 доведена.

4. Стабілізація розв'язків скалярного поліноміального рівняння.

Розглядається скалярне рівняння збуреного руху з поліноміальним керуванням у вигляді

$$dx/dt = f_0(t,x) + f_1(t,x)u(t,x) + \ldots + f_m(t,x)u^m(t,x)\,; \tag{23}$$

$$x(t_0) = x_0\,, \tag{24}$$

де $x \in R$, функції $f_i(t,x) \in C(R_+ \times R, R)$ та локально Ліпшицеві, керування $(u,\ldots,u^m) \in \bar{U}$, де $\bar{U}$ – припустима множина скалярних керувань.

Припускається, що функції $f_i(t,x)$ при $i = 0,1,2,\ldots,m$ – однорідні поліноми.

Нехай для номінального рівняння

$$dx/dt = f_0(t,x)\,, \tag{25}$$

де $f_0 \in C(R_+ \times R,\, R)$, $f(t,0) = 0$ при всіх $t \in R_+$ побудована диференційовна функція $V(t,x) > 0$ при $x \in R \setminus \{0\}$ і $t \in R_+$.

Повну похідну по t функції $V(t,x)$ в силу рівняння (23)

$$\frac{dV}{dt}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f_0(t,x) + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f_i(t,x)\right)u^i(t,x) \tag{26}$$

зобразимо у вигляді

$$\frac{dV}{dt}(t,x) = w^*(t,x) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t,x)u^i(t,x)\,, \tag{27}$$

де

$$w^*(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f_0(t,x)\,; \quad p_i(t,x) = \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f_i(t,x), \;\; i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m\,.$$

Права частина співвідношення (27) являє собою поліном ступеня m щодо шуканого керування $u^i(t,x)$, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m$.

Розглянемо алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$p_m(t,x)u^m + p_{m-1}(t,x)u^{m-1} + \ldots + p_1(t,x)u + w^*(t,x) = 0 \tag{28}$$

в області значень $(t,x) \in R_+ \times \bar{D}$, де $\bar{D}$ – відкритий інтервал на R.

Відомо [3], що рівняння (28) з літерними коефіцієнтами не має розв'язку в радикалах при $m > 4$.

Припустимо, що розв'язок алгебраїчного рівняння (28) існує при всіх $(t,x)\in R_+\times\bar{D}$. Якщо $v_1,\ldots,v_m$ – дійсні корені рівняння (28), то вони містяться в інтервалі $(-N,N)$, де

$$N=1+\frac{\sup\limits_{(t\in R_+,x\in\bar{D})}\max\limits_{i\in[1,m-1]}(|p_i(t,x)|,|w^*(t,x)|)}{\sup\limits_{(t\in R_+,x\in\bar{D})}|p_m(t,x)|}. \tag{29}$$

Поряд з цією формулою для меж коренів алгебраїчного рівняння (28), на основі відомих результатів ([7], стор. 214), можна вказати і більш точні межі.

Дійсні корені алгебраїчного рівняння (28) утворюють множини значень припустимих управлінь $\bar{U}$. Припустиме керування $\bar{u}(t,x)$ міститься в інтервалі

$$-N\le\bar{u}(t,x)\le N$$

при всіх $t\in[t_1,t_2],(t_1,t_2)\in R_+$.

Зауваження 1. Відомо, що припустиме керування в реальній системі має певний фізичний зміст. Наприклад, в задачі про дальність польоту ракети з обмеженим прискоренням, однією зі складових керування є швидкість витрати маси ракети ([5], стор. 78 – 84).

Якщо умова $V(t,x)>0$ виконується разом з умовою

$$w^*(t,x)+\sum_{i=1}^{m}p_i(t,x)\bar{u}^i(t,x)=0, \tag{30}$$

то рішення $x=0$ рівняння (23) при керуванні $\bar{u}(t,x)$ буде стійким в силу теореми Ляпунова про стійкість [6].

Зауваження 2. Припускається, що корені $v_i,\ldots,v_m$ рівняння (28) задовольняють умову $v_i(t,x)\cap v_j(t,x)=\emptyset$ при всіх $i\ne j$, $i,j=1,2,\ldots,m$ і при всіх $(t,x)\in R_+\times\bar{D}\setminus\{0\}$.

5. Стабілізація руху в окремому випадку.

Продовжимо розгляд рівняння (23) при деяких припущеннях про номінальну систему (25). Припустимо, що в співвідношенні (27) функція $w^*(t,x)\le 0$ в області значень $(t,x)\in R_+\times\bar{D}$, тобто нульовий розв'язок рівняння (25) стійкий за Ляпуновим.

При цьому зі співвідношення (27) випливає оцінка

$$\frac{dV}{dt}(t,x)\le\sum_{i=1}^{m}p_i(t,x)u^i(t,x) \tag{31}$$

в області значень $(t,x)\in R_+\times\bar{D}$.

З правої частини нерівності (31) виділимо алгебраїчне рівняння

$$p_m(t,x)u^{m-1}(t,x)+p_{m-1}(t,x)u^{m-2}(t,x)+\ldots+p_1(t,x)=0 \tag{32}$$

і припустимо, що $p_m(t,x)\ne 0$ при всіх $(t,x)\in R_+\times\bar{D}$. Рівняння (32) зобразимо у вигляді

$$u^{m-1}(t,x)+\bar{p}_{m-1}(t,x)u^{m-2}(t,x)+\ldots+\bar{p}_1(t,x)=0, \tag{33}$$

де

$$\bar{p}_{m-1}(t,x)=\frac{p_{m-1}(t,x)}{p_m(t,x)},\ \ldots,\ \bar{p}_1(t,x)=\frac{p_1(t,x)}{p_m(t,x)}.$$

Якщо $v_1, \ldots, v_{m-1}$ корені рівняння (33) , то керування $\tilde{u}(t,x)$ знаходиться в інтервалі

$$-N \le \tilde{u}(t,x) \le N . \qquad (34)$$

Очевидно, що якщо керування $\tilde{u}(t,x)$ разом з нерівністю $w^*(t,x) \le 0$ призводять співвідношення (26) до оцінки

$$\frac{dV}{dt}(t,x) \le \sum_{i=1}^{m-1} p_i(t,x)\tilde{u}^{m-1}(t,x) \le 0 , \qquad (35)$$

то керування $\tilde{u}(t,x)$ стабілізує розв'язок $x=0$ рівняння (23) до стійкого в разі стійкості за Ляпуновим номінального поліноміальною рівняння (25).

Приклад 1. Розглядається скалярне поліноміальне рівняння

$$dx/dt = a_0(t)x + a_1(t)x^3u + a_2(t)x^5u^2 + a_3(t)x^7u^3 ; \qquad (36)$$

$$x(t_0) = x_0 , \qquad (37)$$

де $a_i(t) \in C(R_+, R)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $u \in U$.

Для номінального рівняння

$$dx/dt = a_0(t)x \qquad (38)$$

розглядатимемо функцію Ляпунова $V(x) = x^2$, $x \in R \setminus 0$. Функція $w^*(t,x)$ має вигляд $w^*(t,x) = 2a_0(t)x^2$.

Функції $p_i(t,x)$, $i = 1, 2, 3$ мають вигляд

$$p_1(t,x) = 2a_1(t)x^4;\ p_2(t,x) = 2a_2(t)x^6;\ p_3(t,x) = 2a_3(t)x^8 . \qquad (39)$$

Враховуючи (39), співвідношення (31) приймає вигляд

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) \le 2a_1(t)x^4u + 2a_2(t)x^6u^2 + 2a_3(t)x^8u^3 . \qquad (40)$$

Звідси маємо алгебраїчне рівняння

$$p_1(t,x)u + p_2(t,x)u^2 + p_3(t,x)u^3 = 0$$

з одним нульовим коренем.

Розглянемо рівняння

$$p_3(t,x)u^2 + p_2(t,x)u + p_1(t,x) = 0 \qquad (41)$$

і припустимо, що $p_3(t,x) \ne 0$ при всіх $(t,x) \in R_+ \times \bar{D}$. Рівняння (41) зобразимо у вигляді

$$u^2(t,x) + p(t,x)u(t,x) + q(t,x) = 0 , \qquad (42)$$

де

$$p(t,x) = p_2(t,x)/p_3(t,x);\ q(t,x) = p_1(t,x)/p_3(t,x) .$$

Так як розв'язком рівняння (42) є функції

$$u_1(t,x) = \frac{1}{2}(-p(t,x) + \sqrt{D}) ;\ \ u_2(t,x) = \frac{1}{2}(-p(t,x) - \sqrt{D}) ,$$

де $D = p^2(t,x) - 4q(t,x)$, то керування $\tilde{u}(t,x) = u_1(t,x)$ (або $\tilde{u}(t,x) = u_2(t,x)$) разом з нерівністю (35) стабілізують розв'язок $x = 0$ рівняння (36) до стійкого.

Приклад 2. Розглянемо вкорочене скалярне рівняння (23) у вигляді

$$dx / dt = f_0(t,x) + f_1(t,x)u(t,x) , \tag{43}$$

де $x \in R$, $f_0, f_1 \in C(R_+ \times R, R)$, $u(t,x) \in U$.

Застосовуючи функцію $V(x) = \frac{1}{2}x^2$, отримаємо вирази для

$$w^*(t,x) = xf_0(t,x) \text{ та } p_1(t,x) = xf_1(t,x) .$$

Нехай $p_1(t,x) > 0$ при всіх $(t,x) \in R_+ \times R \setminus \{0\}$. Керування $\bar{u}(t,x)$ виберемо згідно формули

$$\bar{u}(t,x) = -\frac{w^*(t,x) + |x|\sqrt{f_0^2(t,x) + x^2 f_1^4(t,x)}}{p_1(t,x)} . \tag{44}$$

Неважко бачити, що при керуванні (44) вздовж розв'язку $x(t)$ рівняння (43) виконується оцінка

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = -|x|\sqrt{f_0^2(t,x) + x^2 f_1^4(t,x)} < 0 . \tag{45}$$

З нерівності (45) випливає, що керування (44) стабілізує розв'язок $x = 0$ рівняння (43) до асимптотично стійкого.

6. Завершальні зауваження.

У цій статті пропонується один спосіб побудови керування для поліноміального неавтономного рівняння. Цей спосіб заснований на застосуванні неполіноміальної функції Ляпунова та розв'язанні алгебраїчного рівняння високого порядку.

При використанні наближеного керування методом функцій Ляпунова для поліноміальної системи вказані умови стійкості та екві-обмеженості руху. Цікавим є поширити цей підхід на псевдо-лінійні афінні системи [11] з поліноміальною правою частиною.

Автори висловлюють подяку професору О.Ю. Александрову за корисне обговорення результатів даної статті і зроблені зауваження.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Для неавтономних поліноміальних рівнянь запропоновано метод побудови стабілізуючого керування на основі прямого методу Ляпунова та розв'язку алгебраїчного рівняння високого порядку. Вказана умова існування допустимого керування, що стабілізує рух до асимптотичної стійкості. Встановлено керування, що стабілізує рух системи до екві-обмеженого. Для скалярного поліноміального рівняння вказано межу існування стабілізуючого керування. Розглянуто окремий випадок для номінальної поліноміальної системи та наведено приклади, що ілюструють загальні результати.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: поліноміальні рівняння, стабілізація стану рівноваги, стійкість, екві-обмеженість.

1. *Александров А.Ю.* Устойчивость движений неавтономных динамических систем. – Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 2004. – 186 с.
2. *Ван дер Варден Б.Л.* Современная алгебра. – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1934. – 239 с.
3. *Гайшун І.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. – Минск: Ін-т матем. НАН Беларуси, 1999. – 409 с.
4. *Зубов В.І.* Лекции по теории управления. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 495 с.
5. *Лейтман Дж.* Введение в теорию оптимального управления. – Москва: Наука, 1968. – 190 с.

6. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1950. – 386 с.
7. *Мишина А.П., Проскуряков І.В.* Высшая алгебра, под ред. П.К. Рашевского. – Москва: Наука, 1965. – 300 с.
8. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications – 1983. – **7**, N 11. – P. 1163 – 1173.
9. *Kucera V.* Polynomial control: Past, Present, and Future // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. – 2007. – **17**, N 8. – P. 682 – 705.
10. *Martynyuk A.A., Chernienko V.A.* Sufficient Conditions for the Stability of Motion of Polynomial Systems // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56,** N 1. – P. 13 – 20.
11. *Martynyuk A.A, Chernetskaya L.N., Martynyuk-Chernienko Yu.A.* Stabilization of the Motion of Pseudo-Linear Affine Systems // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 113 – 120.
12. *Mtar R., Belhaouane M.M., Ayadi HB, Braiek N.B.* An LMI criterion for the global stability analysis of nonlinear polynomial systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2009. – **9**, N 2. – P. 171 – 183.
13. *Roxin E.O.* Control Theory and its Application. – Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1997. – 180 p.
14. *Sontag E.D.* A "universal" construction of Artstein theorem on nonlinear stabilization. – Rutgers University, Report SYCON-89-03, Manuscript, 1989. – 12 p.
15. *Yoshizawa T.* Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions. – Berlin: Springer, 1975. – 231 p.

Надійшла 25.09.2020 Затверджена до друку 24.06.2021