

О. Я. Григоренко¹, М. Ю. Борисенко¹, О. В. Бойчук²,
Л. Я. Васильєва³

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТРИКУТНИХ ПЛАСТИН З ОТВОРОМ

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: ayagrigenko1991@gmail.com; mechanics530@gmail.com;

²Миколаївський національний аграрний університет,

вул. Георгія Гонгадзе, 9, 54020, Миколаїв, Україна; e-mail: boychuklena27@gmail.com;

³Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського,

вул. Нікольська, 24, 54000, Миколаїв, Україна; e-mail: lara@vasiliev.mk.ua

Abstract. The finite element method is used for determining the frequencies and modes of free oscillations of the thin isotropic triangular plates of shape with a hole in the center with the different variations of rigid fastening at the edges and hole. The topology of the modes of oscillations for some plates is considered in accordance with the square plates with free and rigid fixed edges. To confirm the numerically calculated frequencies and modes of free oscillations of triangular plates, an experimental method is proposed, which shows a good coincidence of the obtained results with an error that does not exceed 6%.

Key words: triangular plate, hole, natural frequencies, mode, finite element method.

Вступ.

Трикутні пластини з різними варіаціями закріплення широко застосовуються при конструюванні різноманітних тонкостінних інженерних споруд, сучасних будівель, авто-, авіа-, ракетно-космічних та інших конструкцій. Часто такі пластини мають отвори для закріплення та інших технологічних призначень. При моделюванні таких пластин необхідно проводити розрахунок частот і форм вільних коливань на випадок дії різноманітних динамічних навантажень з урахуванням властивостей матеріалу і граничних умов, що є актуальною проблемою сучасної механіки та прикладної математики. У зв'язку з цим необхідно застосувати чисельні та експериментальні методи дослідження частот і форм вільних коливань трикутних пластин.

Тематиці даної роботи присвячено ряд публікацій. В [18] за допомогою покращеного методу Рітца досліджено коливання вільних полігональних і заокруглених полігональних пластин, представлено перші п'ять частот власних коливань пластин правильної форми та еволюцію форм коливань. В [17] комплексно досліджено частоти вільних коливань трикутних пластин з використанням методу Рітца, в якому функції зміщення приймаються у вигляді алгебраїчних многочленів. В [5] розглянуто задачу про коливання в'язкопружної трикутної пластини, досліджено лінії рівнів амплітуди коливань, наведено графіки розподілу амплітуди по висоті трикутника. В [4] на основі чисельного експерименту досліджено функціональний зв'язок між інтегральними фізичними характеристиками в задачах поперечного згину та вільних коливань пружних пластинок у вигляді рівнобедрених трикутників з однорідними та комбінованими граничними умовами. В [6] запропоновано використовувати єдину розрахункову функцію однієї змінної для визначення основної частоти власних коливань пружних ізот-

ропних правильних n -кутних, трикутних і ромбічних шарнірно опертих пластин. В [3] розроблені алгоритми та програми для розв'язування задач, пов'язаних з розрахунком трикутних пластин. В [16] розроблено чисельний метод для розрахунку частот і форм вільних коливань ізотропних та ортотропних трикутних пластин. В [15] на основі теорії деформації зсуву Міндліна представлено аналіз вільних коливань товстих консольних пластин довільної трикутної форми. В [19] в рамках узагальнених гіпотез Кірхгофа досліджується поведінка електрично навантаженої тонкої прямокутної асиметричної біморфної пластини. В [14] запропоновано наближений метод аналізу вільних коливань прямокутних пластин з отвором різної форми, ідея якого полягає в представленні розглянутої пластини, як пластини неоднорідної товщини, тобто отвір розглядається як дуже тонка частина пластини. В [13] досліджено методом найменших квадратів вільні коливання прямокутної пластини з круглим отвором у центрі. В [7] представлено результати дослідження вільних коливань симетричних багатошарових композитних пластин з центральним отвором методом скінченних елементів та експериментальним методом.

Поряд з вищезгаданими методами дослідження коливань пластин широко практично застосовуються числові та експериментальні методи. Одним з таких методів є метод скінченних елементів (МСЕ), який є основою роботи багатьох сучасних програм для інженерного розрахунку, наприклад, програми FEMAP з розв'язувачем NX Nastran, яка використовується в ряді досліджень [8 – 12]. В [2] визначаються частоти та форми вільних коливань тонкої жорстко закріпленої квадратної пластини сталі товщини на основі двох чисельних методів. Дослідження проводились методом скінченних елементів, який реалізовано на FEMAP, і методом Релея – Рітца, який модифіковано та реалізовано на ЕОМ в середовищі Delphi.

В [1] досліджуються динамічні характеристики тонкої ізотропної жорстко закріпленої квадратної пластини за допомогою реалізації неklasичного експерименту Хладні та МСЕ.

Метою даної роботи є визначення чисельним (МСЕ) та експериментальним методами частот та форм вільних коливань ізотропних тонких трикутних пластин правильної форми з отвором при різних варіаціях закріплення.

§1. Основні співвідношення.

Рівняння руху в МСЕ за відсутності демпфування має вигляд

$$\mathbf{K}\bar{\Phi}_j + \mathbf{M}\ddot{\bar{\Phi}}_j = 0, \quad (1.1)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи, відповідно; $\bar{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -тому ступеню свободи, який відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\bar{\Phi}_j(t) = \bar{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (1.2)$$

Після підстановки функцій (1.2) в рівняння руху визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\bar{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\bar{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1.3)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення частот і форм вільних коливань при відсутності дисипації енергії і демпфування використовує метод Ланцоша як основний.

§2. Побудова розрахункової моделі.

За допомогою FEMAP було побудовано геометричну модель пластини у вигляді правильного трикутника зі стороною $a = 207,846$ мм, товщиною $h = 2$ мм та отвором в центрі радіусом $r = 6$ мм. Як матеріал пластини був вибраний алюміній з наступними параметрами: модуль Юнга $E = 71$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$, густина $\rho = 2710$ кг/м³. Пластина досліджувалась при різних варіантах жорстко закріплених країв (C_c) та отвору (C_h) і вільних країв (F_c) та отвору (F_h) (рис. 1). Для порівняння також була побудована геометрична модель пластини без отвору.

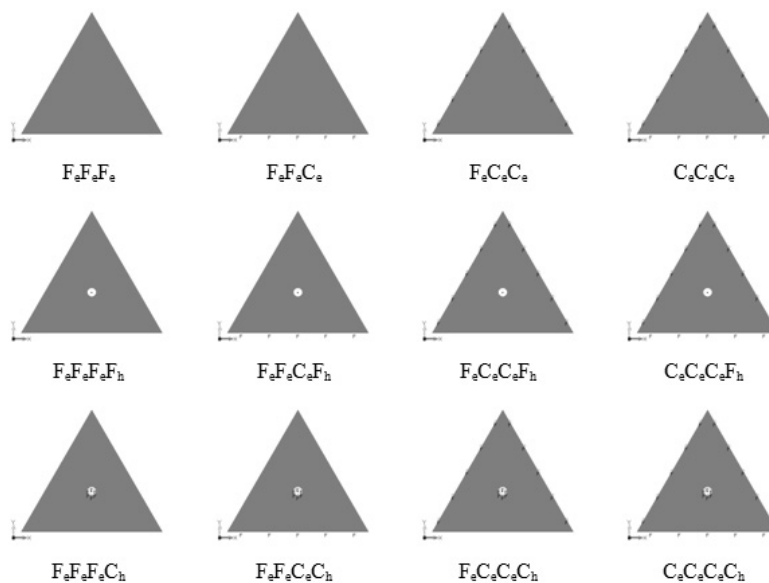


Рис. 1

Скінченно-елементну модель пластини з отвором наведено на рис. 2. Розрахунок проводився на визначення частот і форм вільних коливань трикутних пластин з отвором з різними граничними умовами.

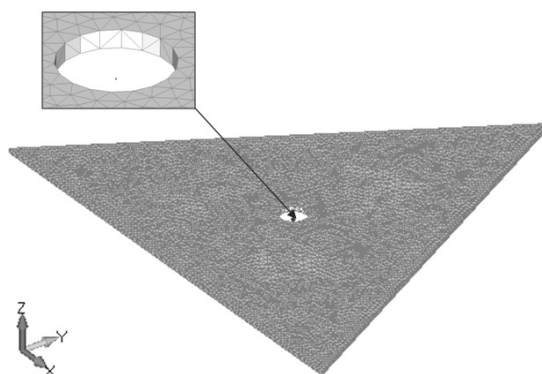


Рис. 2

§3. Результати числових розрахунків.

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань трикутних пластин правильної форми з отвором з вісьмома різними варіантами жорсткого закріплення та трикутних пластин правильної форми з чотирма різними варіантами жорсткого закрі-

плення. Частоти вільних коливань трикутних пластин з вільними краями представлені в табл. 1 та гістограмі (рис. 3).

Таблиця 1

Форма	$f, \text{Гц}$		
	$F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e C_h$
1	393,57	390,45	200,11
2	406,64	404,19	200,16
3	406,64	404,20	255,02
4	966,35	964,24	510,38
5	966,36	964,24	510,43
6	1035,44	1035,28	787,64
7	1323,71	1305,60	1035,73
8	1836,20	1834,87	1039,86
9	1839,69	1837,61	1039,93
10	1839,71	1837,63	1290,38

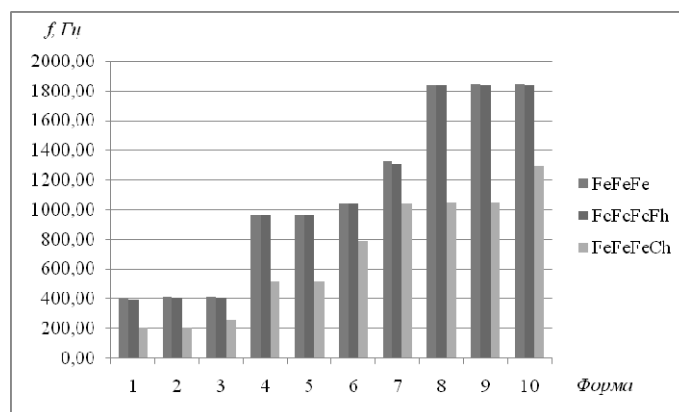


Рис. 3

Порівняння перших п'яти форм коливань всіх розглянутих трикутних пластин з вільними краями представлені на рис. 4.

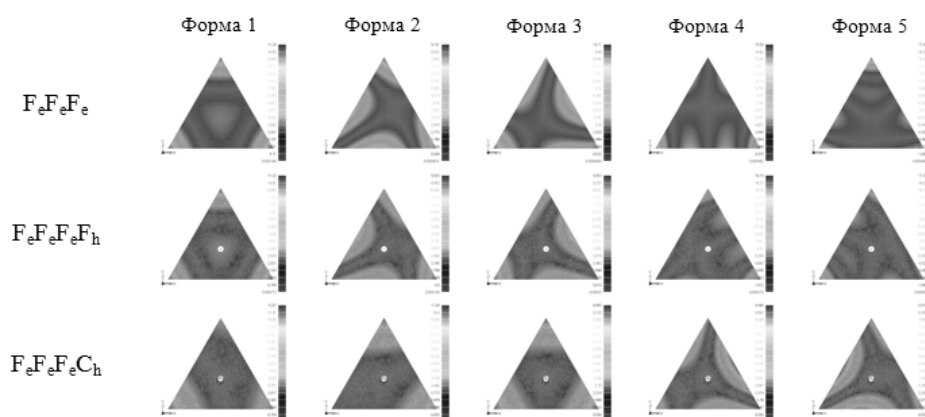


Рис. 4

Частоти вільних коливань трикутних пластин з жорстко закріпленим одним краєм та вільними іншими представлені в табл. 2 та гістограмі (рис. 5).

Таблиця 2

Форма	$f, \text{Гц}$		
	$F_e F_e C_e$	$F_e F_e C_e F_h$	$F_e F_e C_e C_h$
1	102,33	101,93	222,44
2	398,83	396,75	539,26
3	440,38	439,67	737,36
4	1025,49	1022,59	1079,48
5	1057,90	1056,97	1093,65
6	1234,54	1219,03	1928,06
7	1905,57	1904,13	1965,97
8	1907,46	1904,92	2652,20
9	2286,56	2279,55	2691,55
10	2370,33	2363,98	2756,17

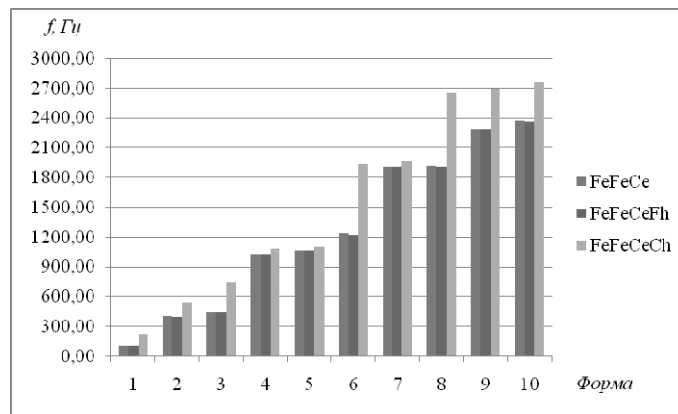


Рис. 5

Порівняння перших п'яти форм коливань всіх розглянутих трикутних пластин з жорстко закріпленим одним краєм та вільними іншими представлено на рис. 6.

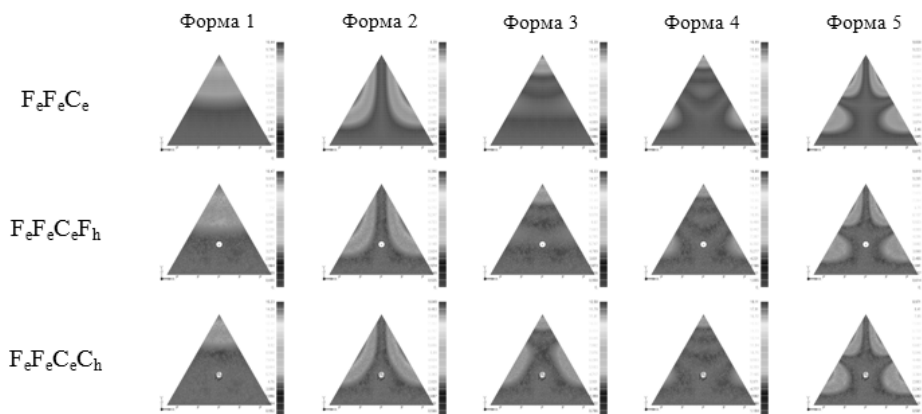


Рис. 6

Частоти вільних коливань трикутних пластин з жорстко закріпленими двома краями та одним вільним представлено в табл. 3 та гістограмі (рис. 7).

Таблиця 3

Форма	$f, \text{Гц}$		
	$F_e C_e C_e$	$F_e C_e C_e F_h$	$F_e C_e C_e C_h$
1	458,91	458,55	677,01
2	1096,14	1094,07	1136,97
3	1172,04	1160,01	2018,56
4	1975,70	1973,50	2636,53
5	2228,08	2220,90	2660,32
6	2268,81	2262,62	2719,09
7	3139,98	3135,23	3198,44
8	3423,98	3403,42	4112,24
9	3734,42	3714,05	4149,27
10	3749,99	3727,50	4365,72

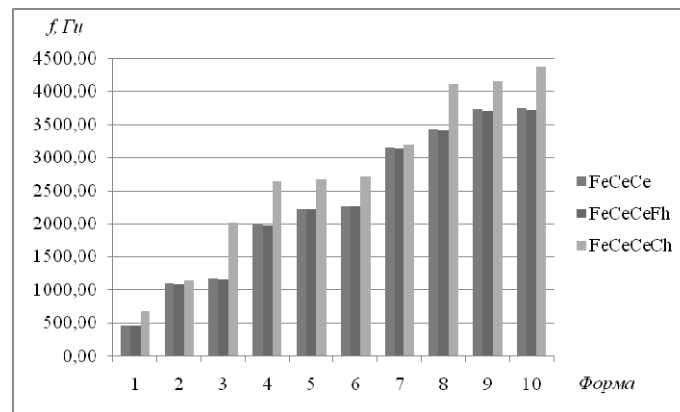


Рис. 7

Порівняння перших п'яти форм коливань всіх розглянутих трикутних пластин з жорстко закріпленими двома краями та одним вільним представлені на рис. 8.

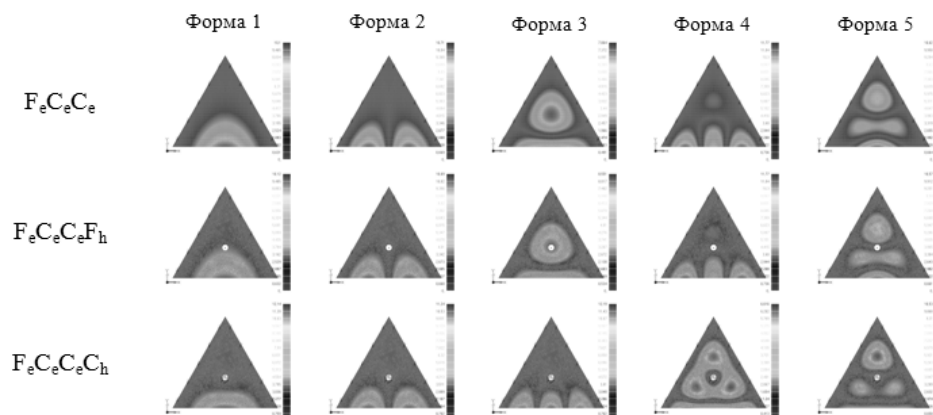


Рис. 8

Частоти вільних коливань трикутних пластин з жорстко закріпленими трьома краями представлені в табл. 4 та гістограмі (рис. 9).

Таблиця 4

Форма	$f, \text{Гц}$		
	$C_e C_e C_e$	$C_e C_e C_e F_h$	$C_e C_e C_e C_h$
1	1144,84	1137,67	2638,85
2	2181,28	2174,50	2659,16
3	2181,34	2174,61	2659,71
4	3401,14	3377,86	4061,68
5	3629,10	3605,24	4062,06
6	3629,25	3605,32	4529,04
7	5030,21	5000,88	5311,51
8	5030,33	5001,05	5311,58
9	5474,08	5444,18	5478,40
10	5479,92	5466,53	6846,71

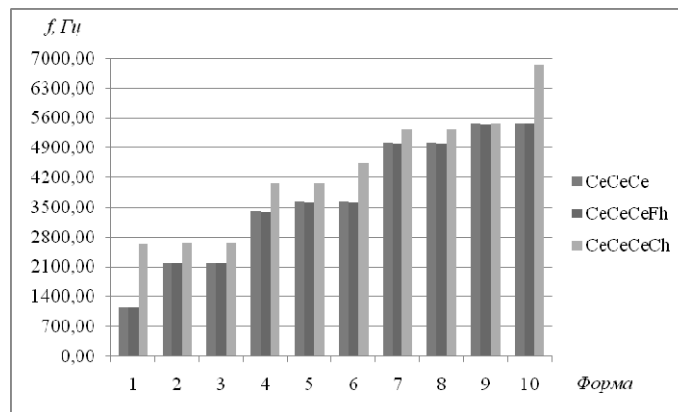


Рис. 9

Порівняння перших п'яти форм коливань всіх розглянутих трикутних пластин з жорстко закріпленими трьома краями представлені на рис. 10.

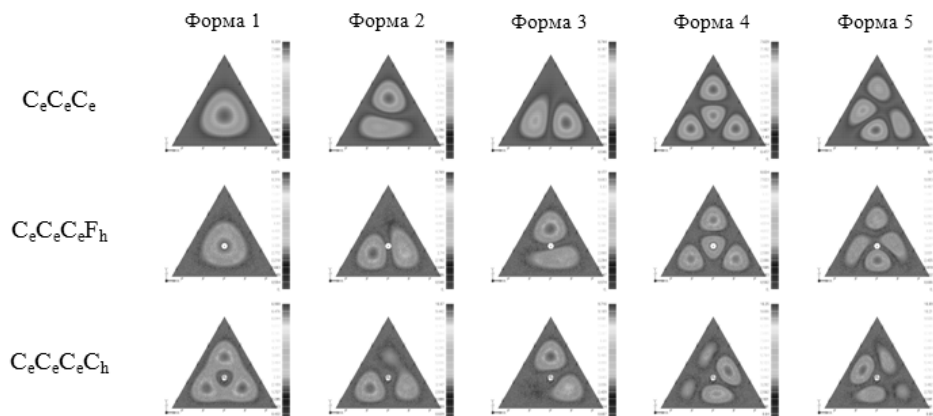


Рис. 10

Встановлена топологія форм коливань для деяких розглянутих пластин у відповідності до квадратних пластин з вільними краями [8, 18] (рис. 11) і жорстко закріпленими краями [2] (рис. 12).

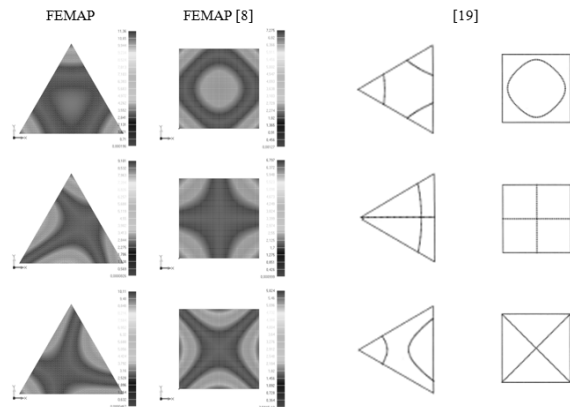


Рис. 11

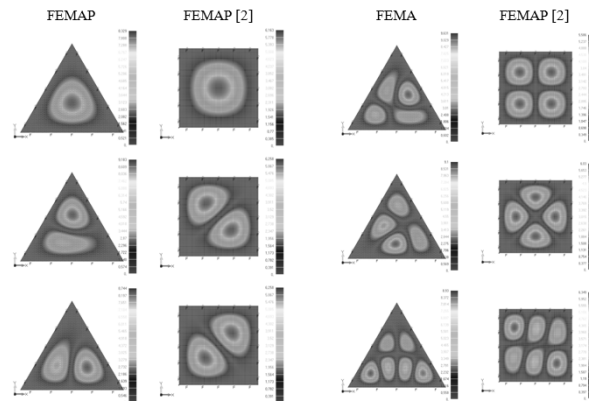


Рис. 12

§4. Методика проведення експерименту.

Для оцінки достовірності розрахованих частот і форм вільних коливань трикутних пластин розроблена експериментальна установка, в якій механічно збуджуються коливання пластини, при цьому спостерігаються форми вільних коливань на фіксованій частоті в реальному часі з можливістю реєстрації їх на фотокамеру. Зібраний п'єзокерамічний вібратор (рис. 13), який представляє собою суцільний стакан (3) з набором п'єзокерамічних круглих шайб (14 штук) із титанату барію з контактними пластинками із мідної тонкої фольги (2), через які забезпечується подача змінної напруги на шайби. Стовпчик шайб притискується інерційним елементом (1) за допомогою різьбового з'єднання. Віброприскорення такого віброзбудження можуть досягати великих значень, які недосяжні іншими типами вібраторів.

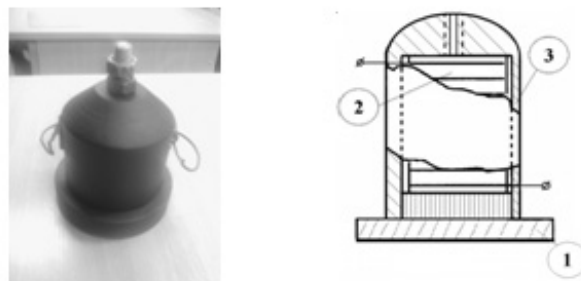


Рис. 13

Експериментальне дослідження поділено на наступні етапи:

1. Зібрати віброкомплекс: вібробудувач, підсилювач, генератор частот, частотомір.
2. Закріпити пластину в центрі мас горизонтально на вібробудувач.
3. Рівномірно покрити поверхню пластини сферичними дрібними елементами.
4. Включити віброкомплекс.
5. Зафіксувати форми коливань збудженої пластини у вигляді рисунків Хладні на відповідних частотах вільних коливань за допомогою цифрової фотокамери.

§5. Результати експериментальних досліджень.

За допомогою описаної методики отримані частоти вільних коливань алюмінієвої трикутної пластини правильної форми з отвором в центрі та граничними умовами ($F_e F_c F_{c_h}$). Результати представлені у табл. 5 та гістограмі (рис. 14), де ε – відхилення між результатами. Нумерація форм коливань здійснювалась згідно нумерації форм коливань в FEMAP.

Таблиця 5

Форма	f , Гц		ε , %
	МСЕ	Експ.	
14	2564	2715	5,56
18	3092	3149	1,81
20	4033	4094	1,49
27	5363	5378	0,28
32	6742	6759	0,25
37	7874	7976	1,28

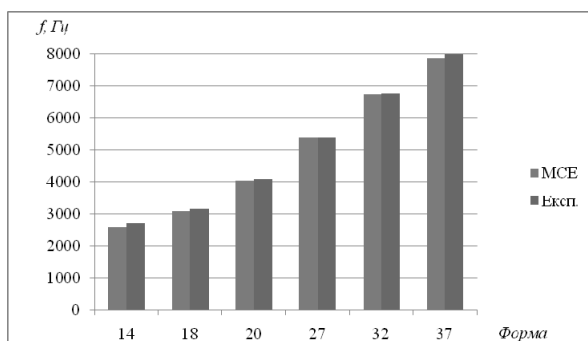


Рис. 14

Для ілюстрації даних приводяться деякі форми коливань на відповідних частотах, які отримані експериментальним і чисельним методами (рис. 15).

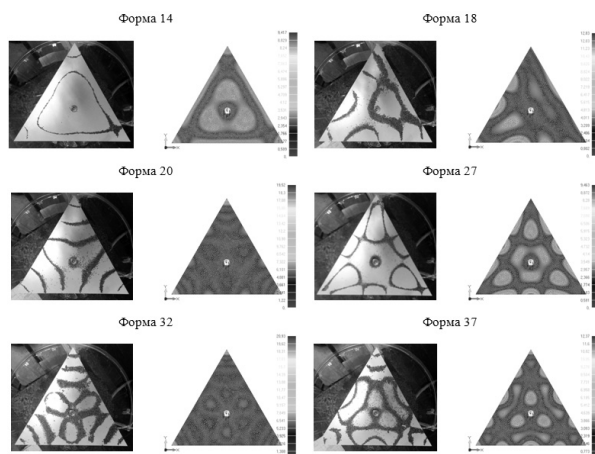


Рис. 15

Висновки.

У роботі методом скінченних елементів визначено частоти і форми вільних коливань тонких ізотропних трикутних пластин правильної форми з отвором в центрі при різних варіаціях жорсткого закріплення на краях та отворі.

Порівнюючи пластини без отвору і з отвором, на який не накладено граничні умови, спостерігається мале відхилення між частотами, яке не перевищує 1,5% для всіх розглянутих варіантів закріплення країв, а це означає, що при відношенні сторони трикутника до радіусу отвору, яке менше $1/35$, є можливість ігнорувати наявність отвору при визначенні частот вільних коливань трикутних пластин будь-яким методом. Жорстке закріплення отвору значно впливає на зміну частоти, таким чином частота коливань пластини, закріпленої по отвору, при всіх вільних краях пластини суттєво знижується в порівнянні з пластиною без отвору і збільшується при всіх варіаціях закріплення країв.

Частоти трикутної пластини з вільними краями не є самими низькими в порівнянні з відповідними частотами при інших варіантах закріплення, проте із збільшенням кількості закріплених країв відповідні частоти зростають.

Наведена топологія форм коливань для деяких розглянутих пластин у відповідності до квадратних пластин з вільними краями і жорстко закріпленими краями.

Для підтвердження чисельно розрахованих частот і форм вільних коливань трикутних пластин запропоновано експериментальний метод, який показав хорошу збіжність отриманих результатів з похибкою, яка не перевищує 6%.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Методом скінченних елементів визначено частоти і форми вільних коливань тонких ізотропних трикутних пластин з отвором в центрі при різних варіаціях жорсткого закріплення на краях та отворі. Наведена топологія форм коливань для деяких розглянутих пластин у відповідності до квадратних пластин з вільними і жорстко закріпленими краями. Для підтвердження чисельно розрахованих частот і форм вільних коливань трикутних пластин запропоновано експериментальний метод, який показав хороше узгодження отриманих результатів з похибкою, яка не перевищує 6%.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: трикутна пластинка, отвір, власна частота, форма коливань, метод скінченних елементів.

1. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Новицький В.С. Застосування експериментального і чисельного методів до дослідження вільних коливань прямокутних пластин // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2019. – № 29. – С. 103 – 112.
2. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Новицький В.С. Чисельний аналіз вільних коливань прямокутних пластин на основі різних підходів // Вісник Запорізького нац. ун-ту, серія фізико-математичні науки. – 2020. – № 1. – С. 33 – 41.
3. Коробко А.В., Гефель В.В. Определение основной частоты колебаний и максимального прогиба пластинок с помощью МИКФ // Вестник ЦРО РААСН. – 2006. – № 5. – С. 81 – 88.
4. Коробко В.И., Бояркина О.В. Взаимосвязь задач поперечного изгиба и свободных колебаний треугольных пластинок // Вестник ЮУрГУ. – 2007. – № 22. – С. 24– 26.
5. Чернышов Н.А., Чернышов А.Д. Вязкоупругие колебания треугольной пластины // Прикл. механика и техн. физика. – 2001. – 42, № 3. – С. 152 – 158.
6. Черняев А.А. Динамический расчет правильных n -угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых пластинок с использованием отношения конформных радиусов в качестве геометрического аргумента // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – № 2. – 2012. – С. 63 – 71.
7. Voay C.G. Free vibration of laminated composite plates with a central circular hole // Composite Struct. – 1996. – 35, N 4, – P. 357 – 368.

8. *Borysenko M., Zavorodnii A., Skupskiy R.* Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone // *J. of Appl. Mathem. and Computational Mech.* – 2019. – **18**, N 1. – P. 5 – 13.
9. *Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V.* Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method // *J. of Mathem. Sci.* – 2016. – **212**, N 2. – P. 182 – 192.
10. *Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V.* Natural Frequencies and Modes of Noncircular Cylindrical Shells with Variable Thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 2, – P. 167 – 172.
11. *Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Y.* Free Vibrations of an Open Non-circular Cylindrical Shell of Variable Thickness. In: *Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W.* (eds) *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials.* – 2020. – **134**. – P. 141 – 154.
12. *Grigorenko A.Ya., Borysenko M.Y., Boychuk E.V., Prigoda A.P.* Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 1. – P. 75 – 84.
13. *Hegarty F., Ariman T.* Elasto-dynamic analysis of rectangular plates with circular holes // *Int. J. of Solids and Struct.* – 1975. – **11**, N 7 – 8. – P. 895 – 906.
14. *Huang M., Sakiyama T.* Free vibration analysis of rectangular plates with variously-shaped holes // *J. of Sound and Vibration.* – 1999. – **226**, N 4. – P. 769 – 786.
15. *Karunasena W., Kitipornchai S., Al-Bermani F.G.A.* Free vibration of cantilevered arbitrary triangular Mindlin plates // *Int. J. of Mech. Sci.* – 1996. – **38**, N 4. – P. 431 – 442.
16. *Lam K.Y., Liew K.M., Chow S.T.* Free vibration analysis of isotropic and orthotropic triangular plates // *Int. J. of Mech. Sci.* – 1990. – **32**, N 5. – P. 455 – 464.
17. *Leissa A.W., Jaber N.A.* Vibrations of completely free triangular plates // *Int. J. of Mech. Sci.* – 1992. – **34**, N 8. – P. 605 – 616.
18. *Wang C.Y.* Vibrations of Completely Free Rounded Regular Polygonal Plates // *Int. J. of Acoustics and Vibration.* – 2015 – **20**, N 2. – P. 107 – 112.
19. *Yanchevskiy I. V.* Excitation of the bending vibrations of a rectangular metal-piezoceramic plate by a nonstationary electric signal // *J. Math. Sci.* – 2012. – **185**, N 6. – P. 852 – 857.

Надійшла 24.11.2020

Затверджена до друку 24.06.2021