

П.З.Луговий, С.П.Орленко

**ВПЛИВ НЕСИМЕТРІЇ ТРИШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ
ОБОЛОНОК НА ЇХ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН
ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057. Київ, Україна: e-mail: plugovu@inmech.kiev.ua*

Abstract. The stress-strain state of the asymmetric three-layer cylindrical shells is considered under non-stationary loads. The asymmetry of the three-layer structure is that the load-bearing layers are made of the differing materials. An equation of motion of the asymmetric three-layer cylindrical shell with a light filler reinforced with the stiffeners is derived using independent static and kinematic hypotheses for each layer. The Timoshenko's model of the theory of shells and rods is used in the analysis of the elements of the elastic structure. The numerical results on the stress-strain state and the nature of oscillations of a three-layer asymmetric elastic structure with load-bearing layers made of differing materials were obtained using the finite element method. An influence of the physical and mechanical parameters of layers and geometry of the shell on the shell stress-strain state at axisymmetric pulse loads is studied in a wide range.

Key words: three-layer asymmetric cylindrical shell, lightweight filler, reinforcing ribs, unsteady loads, stress-strain state, numerical analysis.

Вступ.

Початок розгляду задач динамічної поведінки несиметричної тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем покладений в дослідженні впливу несиметрії тришарової циліндричної оболонки з пінопластовим заповнювачем на її напружено-деформований стан при внутрішньому нормальному осесиметричному імпульсному навантаженні [11]. Використання заповнювача з легких матеріалів дозволяє при невеликому збільшенні ваги конструкції істотно підвищити її згинальну жорсткість, а також значно збільшити її демпфуючі можливості. За своїми властивостями і конструкцією тришарові оболонки поділяються на симетричні і несиметричні. Симетричними вважаються тришарові оболонки, в яких серединна поверхня є симетричною відносно заповнювача і несучих шарів. Дослідженню стаціонарних [1, 3 – 5, 14] і нестационарних [2, 6 – 10, 17 – 20] процесів в симетричних шаруватих оболонках присвячено багато робіт. Динамічна поведінка тришарових оболонок з несиметричною структурою пакету шарів вивчена набагато менше [12]. Разом з тим, дослідження таких оболонок має як теоретичне, так і практичне значення, оскільки вони є досить жорсткими конструкціями.

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Несиметрична тришарова циліндрична оболонка з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішнього (індекс 1) та зовнішнього (індекс 2) несучих шарів різної товщини і виготовлених з різних матеріалів, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних армуючих ребер (індекс j), жорстко з'єднаних із несучими шарами. Оболонка має постійну загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі коор-

динат O, x, z . Координатна лінія x на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ збігається з осовою лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединній поверхні. Величина z вважається позитивною, якщо точка перебуває з боку опуклості серединній поверхні (рис. 1). Неоднорідність дискретного ребристого заповнювача зумовлена наявністю легкого пружного матеріалу в порожнинах між ребрами і несучими шарами.

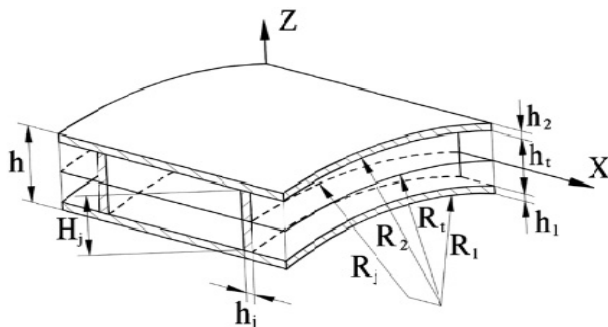


Рис. 1

Вид деформованого стану внутрішнього і зовнішнього несучих шарів може визначитися через компоненти узагальнених векторів переміщень $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$. Поля переміщень для легкого ребристого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщення – $\bar{U}_t = (u_1^t, u_3^t, \varphi_1^t)^T$ згідно з моделлю, запропонованою в [9]. Деформований стан армуючого ребра, спрямованого вздовж лінії головної кривизни оболонки, визначається узагальненим вектором переміщення $\bar{U}_J = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$.

На основі теорії деформації зсуву в оболонках [13] переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах в напрямку x (поздовжній), z (товщина) і t (час) при малих лінійних переміщеннях виражаються таким чином:

$$\begin{aligned} u_1^i(x, z, t) &= u_{01}^i(x, t) + z_i \varphi_1^i(x, t); \\ u_3^i(x, z, t) &= u_{03}^i(x, t) \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де z_i – вертикальна координата несучого шару, яка вимірюється вгору від серединній поверхні кожного несучого шару; φ_1^i – кут повороту нормалі до серединній поверхні несучих шарів.

Кінематичні залежності для несучих шарів при малих деформаціях записуються наступним чином:

$$\varepsilon_{11}^i = \varepsilon_{011}^i + z_i k_{11}^i; \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_3^i}{R_i} \quad i = 1, 2; \quad \gamma_{13}^i = 2\varepsilon_{13}^i = \varepsilon_{013}^i, \quad (1.2)$$

де

$$\varepsilon_{011}^i = \frac{\partial u_{011}^i}{\partial x} + \frac{u_{033}^i}{R_i}; \quad \varepsilon_{013}^i = \frac{\partial u_{033}^i}{\partial x} + \varphi_1^i - \frac{u_{01}^i}{R_i}; \quad k_{11}^i = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial x} \quad (i = 1, 2). \quad (1.3)$$

Тут ε_{011}^i , ε_{013}^i , k_{11}^i – компоненти деформацій серединних поверхонь несучих шарів.

Поля переміщень для легкого заповнювача, засновані на моделі [15]:

$$\begin{aligned} u_1^t(x, z, t) &= \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_{10}^t(x, t) + z_t u_1^t(x, t); \\ u_3^t(x, z, t) &= u_{30}^t(x, t) + z_t u_{31}^t(x, t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Кінематичні залежності для легкого заповнювача для шаруватих оболонок при малих деформаціях запишемо у вигляді:

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{1}{(1+z_t/R_t)} \left(\frac{\partial u_1^t}{\partial x} + \frac{u_3^t}{R_t} \right); \quad (1.5)$$

$$\gamma_{13}^t = 2\varepsilon_{13}^t = \frac{1}{(1+z_t/R_t)} \left(\frac{\partial u_3^t}{\partial x} + \frac{u_1^t}{R_t} \right) + \frac{\partial u_1^t}{\partial z_t},$$

де u_1^t, u_3^t – компоненти узагальненого вектора переміщень легкого заповнювача.

Умови сумісності, які передбачають ідеальне з'єднання між заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування, представлені в наступному вигляді [16]:

$$\begin{cases} u_1^2 |_{z_2=-h_t/2} = u_1^t |_{z_t=h_t/2}; & u_1^1 |_{z_2=h_t/2} = u_1^t |_{z_t=-h_t/2}; \\ u_3^1 |_{z_1=-h_t/2} = u_3^t |_{z_t=h_t/2}; & u_3^2 |_{z_2=h_t/2} = u_3^t |_{z_t=-h_t/2}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Використовуючи вирази для поля переміщень для несучих шарів (1.1), легкого заповнювача (1.4) і умови міжшарової неперервності переміщень (1.6), виведемо спрощені умови спільності переміщень:

$$u_{10}^t = \frac{1}{2} \left[u_{10}^1 + u_{10}^2 - \frac{1}{2} (h_1 u_1^1 - h_2 u_1^2) \right]; \quad u_{11}^t = \frac{1}{h_t} \left[u_{10}^1 - u_{10}^2 - \frac{1}{2} (h_1 u_1^1 + h_2 u_1^2) \right]; \quad (1.7)$$

$$u_{30}^t = \frac{1}{2} (u_{30}^1 + u_{30}^2).$$

Виходячи з припущень жорсткого з'єднання армуючих ребер з циліндричними несучими шарами, записуються умови контакту центрів ваги ребер з несучими шарами.

$$u_1^j = u_1^{jk}(x_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(x_j); \quad (1.8)$$

$$u_3^j = u_3^{jk}(x_j); \quad \varphi_3^j = \varphi_3^{jk}(x_j) \quad k=1,2,$$

де x_j – координата лінії множин точок проєкцій центрів ваги поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучого шару; $h_j^i = 0,5h_j + H_j/2$, h_i ($i=1,2$), h_i – товщини циліндричних несучих шарів; $H_j/2$ – віддаль від осі j -го ребра до поверхні несучих оболонок; товщина легкого заповнювача $h_t = H_j$.

Рівняння руху для несучих шарів і легкого заповнювача, армованого ребрами, виводяться виходячи з варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського, згідно з яким

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (1.9)$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу.

При виведенні рівнянь коливань тришарових несиметричних циліндричних оболонок з легким заповнювачем, армованим ребрами, незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих шарів і заповнювача з легкого матеріалу, а також армуючих ребер жорсткості.

Вирази для повної потенціальної і кінетичної енергії записуються у вигляді:

$$\delta \Pi = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{j=1}^j \Pi^j + \delta \sum_{S_i} \Pi^t; \quad (1.10)$$

$$\delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{j=1}^j K^j + \delta \sum_{S_i} K^t; \quad (1.11)$$

$$\delta \Pi^i = \int_{S_i} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(T_{11}^i \delta \varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta \varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta \varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i \right) dz_i \right] dS_i; \quad (1.12)$$

$$\delta \Pi^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(T_{11}^t \delta \varepsilon_{11}^t + T_{22}^t \delta \varepsilon_{22}^t + T_{13}^t \delta \varepsilon_{13}^t + M_{11}^t \delta \kappa_{11}^t \right) dz_t \right] dS_i; \quad (1.13)$$

$$\delta \Pi^j = \int_{L_j} T_{22}^j \delta \varepsilon_{22}^j dL_j; \quad (1.14)$$

$$\delta K^i = \int_{S_i} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \partial u_1^i + \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \partial u_3^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_1^i}{\partial t^2} \partial \phi_1^i \right) \right] dz_i \right\} dS_i; \quad (1.15)$$

$$\delta K^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho_t h_t \left(\frac{\partial^2 u_{10}^t}{\partial t^2} \partial u_{10}^t + \frac{\partial^2 u_{11}^t}{\partial t^2} \partial u_{11}^t + \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^2 u_{30}^t}{\partial t^2} \partial u_{30}^t \right) dz_t \right] dS_i; \quad (1.16)$$

$$\delta K^j = \int_{L_j} \left[\rho_j F^j \left(\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial t^2} \partial u_1^j + \frac{\partial^2 u_3^j}{\partial t^2} \partial u_3^j \right) + \rho_j \left(I_{kr}^j \frac{\partial^2 \phi_1^j}{\partial t^2} \partial \phi_1^j \right) \right] dL_j. \quad (1.17)$$

В рівняннях (1.12) – (1.17) величини F^j , I_{kr}^j відповідають геометричним характеристикам поперечних армуючих ребер; ρ_j – питома вага матеріалу армуючого ребра; ρ_i ($i = 1, 2$), ρ_t – питомі ваги матеріалів несучих шарів і легкого заповнювача, відповідно.

Слід зазначити, що при розрахунку потенціальної і кінетичної енергії для легкого заповнювача у виразах $\delta \Pi^t$ та δK^t інтегрування проводиться за об'ємом, величина якого збільшена на величину обсягу армуючих ребер. Але цей факт практично не впливає на загальну похибку теорії оболонок, оскільки обсяг армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для тришарових оболонок обертання не перевищує 2,5 – 5%.

Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянні (1.9), з урахуванням співвідношень (1.10) – (1.17), отримаємо систему рівнянь руху 12-го порядку для тришарової несиметричної циліндричної оболонки з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами при осесиметричному імпульсному навантаженні

$$\frac{\partial T_{11}^i}{\partial x} + \frac{\partial T_{11}^i}{R_1} - \frac{4}{h_i^2} M_{13}^i = \rho_i h_i \frac{\partial u_0^i}{\partial t^2}; \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial T_{13}^i}{\partial x} - \frac{T_{11}^i}{R_1} - \frac{R_3^i}{h_i} - \frac{1}{R_i h_i} M_{11}^i - \frac{4}{h_i^2} M_3^i + \frac{1}{h_i} \frac{\partial M_{13}^i}{\partial x} - \left(1 + \frac{h_i}{2R_i} \right) P_i = \rho_i h_i \frac{\partial u_3^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}^i}{\partial x} - T_{13}^i + \frac{2h_i}{h_i^2} M_{13}^{*t} = \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial \phi_i}{\partial t^2} \quad i = 1, 2; \quad \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} + \frac{1}{R_t} T_{13}^t + \frac{8}{h_t^2} M_{13}^{*t} - \frac{1}{R_t} T_{13}^{*t} = \rho_t h_t \frac{\partial u_0^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} - T_{13}^{*t} + \frac{1}{R_t} M_{13}^t = \rho_t h_t \frac{\partial u_1^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} + \frac{8}{h_t^2} M_3^t - \frac{1}{R_t} T_{11}^t = \rho_t h_t \frac{\partial u_{30}^t}{\partial t^2};$$

$$T_{11}^i = \rho_j F^j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad T_{13}^i = \rho_j F^j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad M_{11}^i = \rho_j I_{kr}^j \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2},$$

де зусилля і моменти для несучих шарів можна записати наступним чином:

$$T_{11}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{11}^i dz_i; \quad M_{11}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} z_i \sigma_{11}^i dz_i; \quad T_{13}^i = k_s \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{13}^i dz_i,$$

а зусилля і моменти для легкого заповнювача представимо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} T_{11}^t &= \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{11}^t dz_t; & M_{11}^t &= \int_{-h_t/2}^{h_t/2} z_t \sigma_{11}^t dz_t; & T_{13}^{*t} &= k_s \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma_{13}^t dz_t; \\ T_{13}^t &= \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \sigma_{13}^t dz_t; & M_{13}^{*t} &= \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) z_t \sigma_{13}^t dz_t; & M_{13}^t &= \int_{-h_t/2}^{h_t/2} z_t \sigma_{13}^t dz_t. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Для дискретних армуючих елементів заповнювача зусилля і моменти обраховуються за такими формулами:

$$T_{11j} = \int_{F_j} \sigma_{11j} dF_j; \quad Q_{13j} = \int_{F_j} \sigma_{13j} dF_j; \quad M_{11j} = \int_{F_j} z_j \sigma_{11j} dF_j. \quad (1.20)$$

$P_1(x, t)$, $P_2(x, t)$ – розподілене осесиметричне імпульсне внутрішнє і зовнішнє навантаження, відповідно.

Узагальнений закон Гука запишемо у вигляді

$$T_{11}^t = E^t (\varepsilon_{11}^t + \nu^t \varepsilon_{22}^t); \quad T_{22}^t = E^t (\varepsilon_{22}^t + \nu^t \varepsilon_{11}^t); \quad T_{13}^t = G_{13}^t \varepsilon_{13}^t; \quad M_{11}^t = D_{11}^t k_{11}^t, \quad (1.21)$$

де

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{\partial u_1^t}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_3^t}{R_t}; \quad \varepsilon_{13}^t = \varphi_1^t; \quad k_{11}^t = \frac{\partial \varphi_1^t}{\partial x}; \quad (1.22)$$

E^t , G_{13}^t , D_{11}^t – фізико-механічні параметри заповнювача; R_t – приведений радіус заповнювача; φ_1^t – кут повороту нормалі до серединної поверхні легкого заповнювача.

Відзначимо, що однією зі складностей задач коливань неоднорідних пружних структур з урахуванням дискретності ребер, армуючих легкий заповнювач, є наявність розривних коефіцієнтів в трьох останніх рівняннях коливань (1.18). Виходячи з цього, створюються чисельні алгоритми в гладкій області і «склеюються» на лініях розривів з урахуванням кінематичних умов сполучення. Але наявність сучасних обчислювальних скінченно-елементних комплексів дозволяє отримувати чисельні розв'язання подібних задач [9, 11].

§2. Числові результати.

Дослідимо конкретний випадок, коли несучі шари несиметричної тришарової циліндричної оболонки виготовлені з різних матеріалів, а всі армуючі елементи виготовлені з матеріалу одного з несучих шарів. У цьому випадку система рівнянь (1.18) розпадається на дві системи не тільки за рахунок наявності армуючих ребер, а також за рахунок того, що несучі шари виготовлені з різних матеріалів. Відповідна початково-крайова задача вирішується за допомогою скінченно-елементного методу.

Створена скінченно-елементна модель оболонки відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в тілі з енергією мас і доданих інерційних сил та відповідно до принципу Даламбера має вигляд:

$$\Pi = E - W, \quad (2.1)$$

де E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал прикладених сил.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (2.1) набуває вигляду

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (2.2)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.3)$$

відповідають співвідношенням

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = -\sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}. \quad (2.4)$$

Досліджено динамічний напружено-деформований стан двох типів несиметричної тришарової циліндричної оболонки з несучими шарами, які виготовлені з різних матеріалів. У моделях використаний тривимірний об'ємний скінченний елемент, який гарантує точність і достовірність отриманих результатів.

Геометричні і фізико-механічні параметри першого типу оболонки:

$L = 0,4$ м; $h_1 = 0,01$ м = h_2 ; $h_t = 0,02$ м; $R_1 = 0,08$ м; $R_2 = 0,11$ м; $R_t = 0,10$ м; $E_2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_2 = \nu_j = 0,3$; $\rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_1 = 0,3$; $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; відношення модулів пружності несучих шарів і легкого заповнювача: $(E_1 + E_2)/2E_t = 50$; $(E_1 + E_2)/2E_t = 500$; $\rho_t = 25$ кг/м³; $\nu_t = 0,33$.

Для другого типу оболонки:

$L = 0,4$ м; $h_1 = 0,01$ м = h_2 ; $h_t = 0,02$ м; $R_1 = 0,08$ м; $R_2 = 0,11$ м; $R_t = 0,10$ м; $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_2 = 0,3$; $\rho_2 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $E_1 = E_j = 7 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_1 = \nu_j = 0,3$; $\rho_1 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; відношення модулів пружності несучих шарів і легкого заповнювача: $(E_1 + E_2)/2E_t = 50$; $(E_1 + E_2)/2E_t = 500$; $\rho_t = 25$ кг/м³; $\nu_t = 0,33$.

Створена скінченно-елементна модель (рис. 2), включала 19200 скінченних елементів і 22680 вузлів.

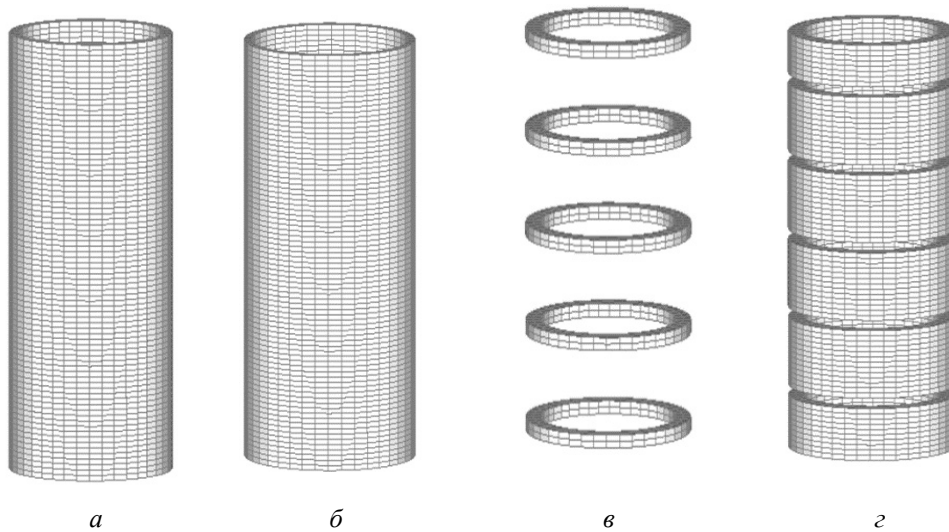


Рис. 2

На оболонку діє осесиметричне імпульсне навантаження у вигляді $P_3 = A \sin \frac{\pi t}{T} \times [\eta(t) - \eta(t-T)]$; $\eta(t)$ – функція Хевісайда. В розрахунках покладалося $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Армуючі елементи розташовані в точках:
 $x_j = [11 + (k-1)15]\Delta x$; $\Delta x = L/80 = 0,4\text{ м}/80 = 0,05$ м, $k = 1-5$.

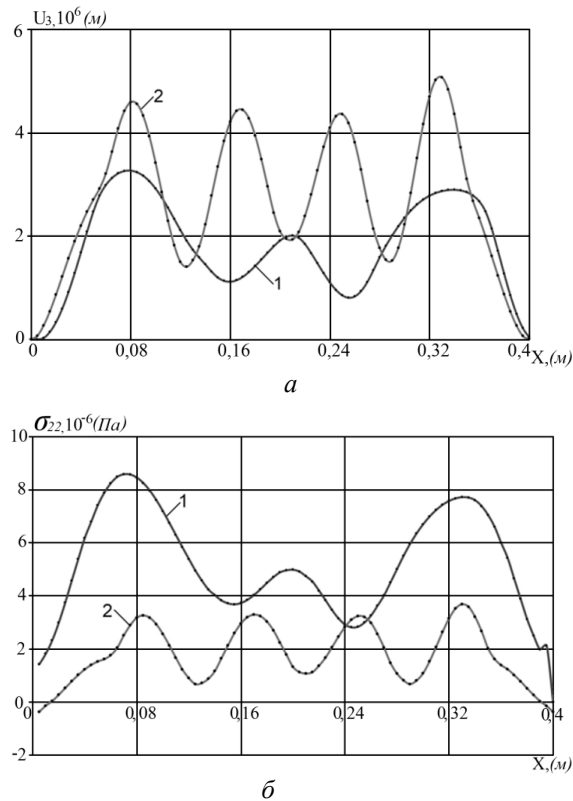
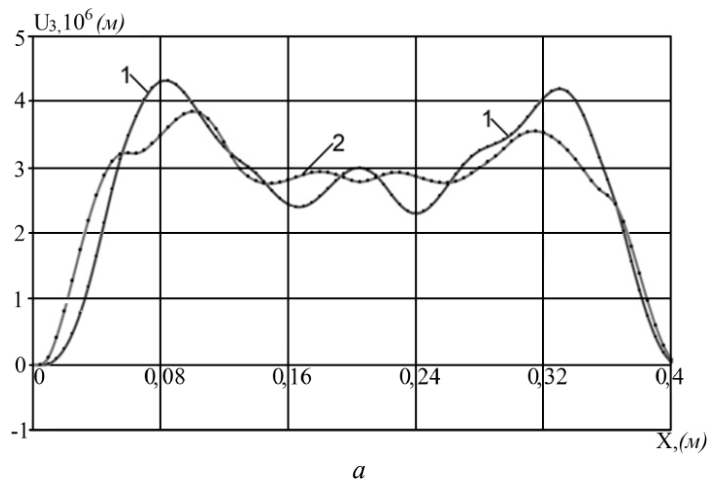


Рис. 3

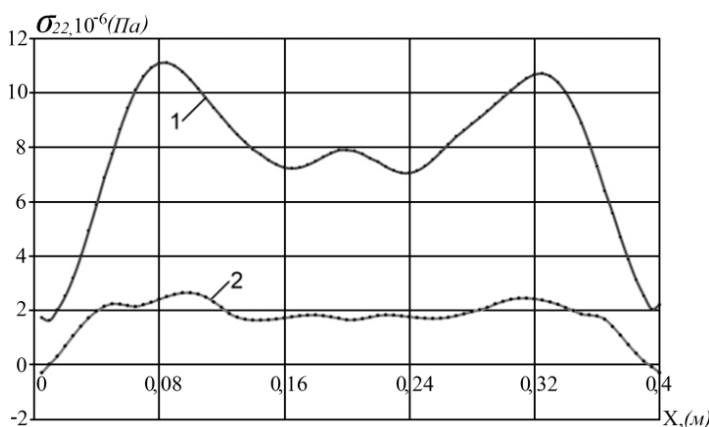
На рис. 3, а в приведених масштабах показано залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки, в якій зовнішній несучий шар виготовлений зі сплаву АМГ-6, а внутрішній – зі сталі (перший випадок). Легкий заповнювач відсутній. Крива з індексом 1 відповідає прогину внутрішнього несучого шару – u_3^1 , а крива з індексом 2 – зовнішньому несучому шару – u_3^2 . (Такі позначення дійсні для всіх подальших графіків даної роботи). Для даної тришарової структури ці максимуми досягаються в момент часу $t = 3,0 T$, а власна перша частота коливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2517 Гц. На рис. 3, б в приведених масштабах показано залежності максимальних напружень σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (перший випадок). Легкий заповнювач відсутній.

На рис. 4, а в приведених масштабах наведено залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1 + E_2)/2E_t = 50$. Для даної тришарової структури ці максимуми досягаються в момент часу $t = 3,05 T$, а власна перша частота ко-

ливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2715 Гц. На рис. 4, б в приведених масштабах наведено залежності максимальних нормальних напружень σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1 + E_2)/2E_t = 50$.



а



б

Рис. 4

На рис. 5, а в приведених масштабах наведено залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки, які досягаються в момент часу $t = 3,15 T$ (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1 = E_2)/2E_t = 500$. Власна перша частота коливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2549 Гц. На рис. 5, б в приведених масштабах наведено залежності напруження σ_{22} від координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1 = E_2)/2E_t = 500$.

На рис. 6, а в приведених масштабах наведено залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки, у якої зовнішній несучий шар виготовлений зі сталі, а внутрішній – зі сплаву АМГ-6 (другий випадок). Легкий заповнювач відсутній. Для даної тришарової структури ці максимуми досягаються в мо-

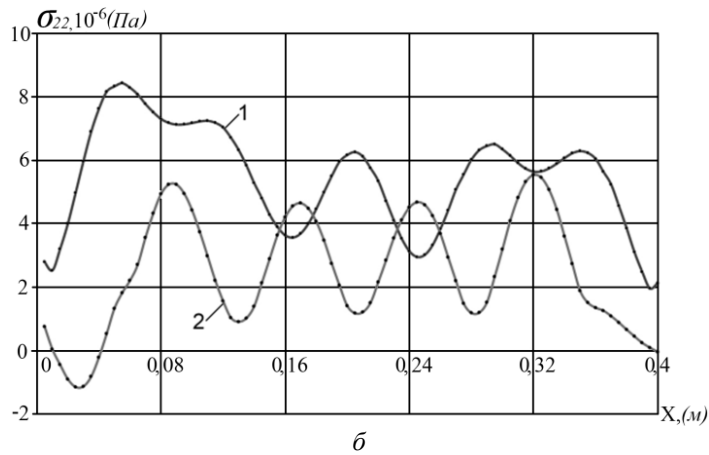
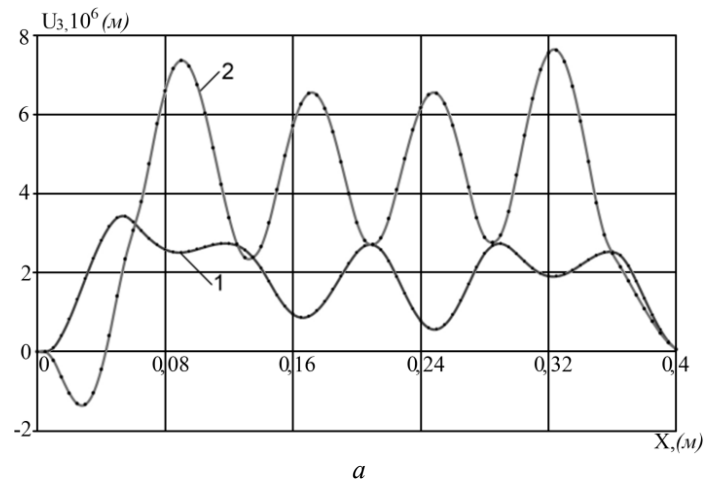
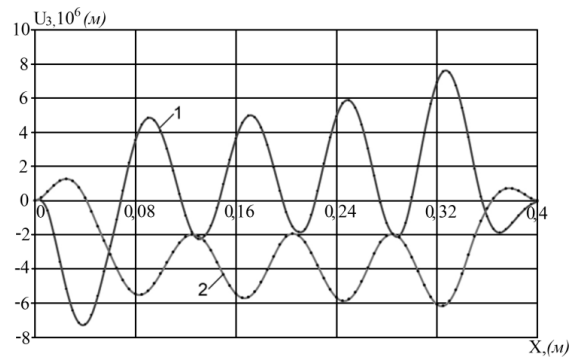


Рис. 5

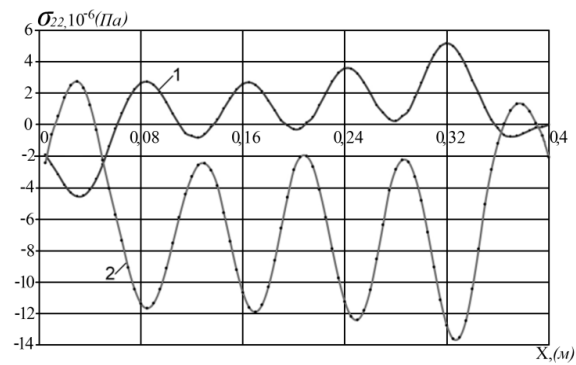
мент часу $t = 2,5 T$, а власна перша частота коливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2394 Гц. На рис. 6, б в приведених масштабах наведені залежності напруження σ_{22} від координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок). Легкий заповнювач відсутній.

На рис. 7, а в приведених масштабах наведено залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок). Легкий заповнювач: $(E_1 = E_2)/2E_t = 50$. Максимуми досягаються в момент часу $t = 3,35 T$, а власна перша частота коливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2651 Гц. На рис. 7, б в приведених масштабах наведено залежності максимальних нормальних напружень σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок). Легкий заповнювач: $(E_1 = E_2)/2E_t = 50$.

На рис. 8, а в приведених масштабах наведено залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок). Легкий заповнювач: $(E_1 = E_2)/2E_t = 500$. Максимуми досягаються в момент часу $t = 2,95 T$, а

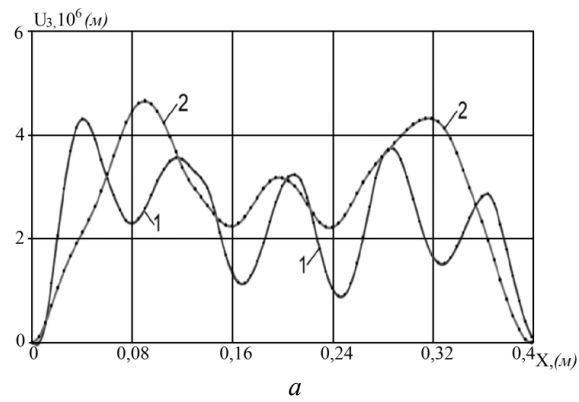


a

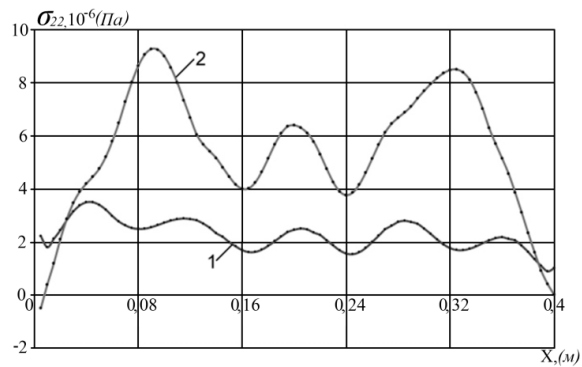


b

Рис. 6

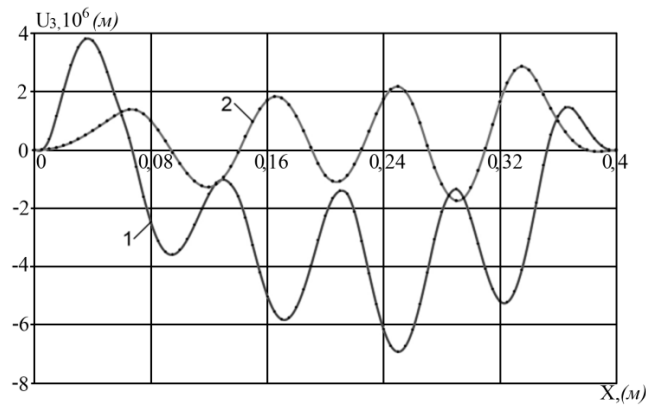


a

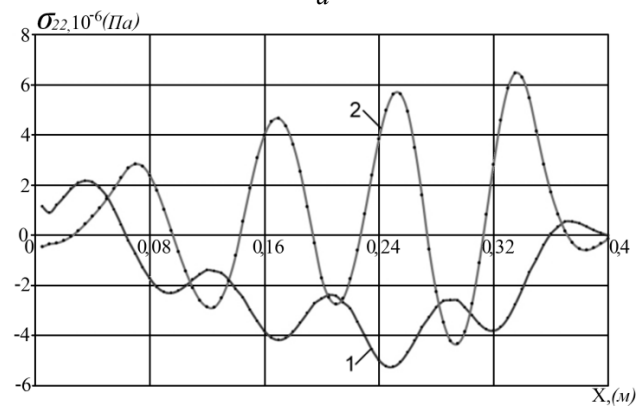


b

Рис. 7



a



б

Рис. 8

власна перша частота складає 2424 Гц. На рис. 8, б в приведених масштабах наведено залежності максимальних нормальних напружень σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок).

Конф. обол.		Параметри				
		t	1 – внутрішній 2 – зовнішній	$u_3^{\max} \cdot 10^6$	$\sigma_{22}^{\max} \cdot 10^{-6}$	1 власна частота, Гц
A/C $h/R = 0,4$	б/п	3,0Г	1	3,51	8,61	2517
			2	5,29	3,32	
	50	3,05Г	1	4,75	11,25	2715
			2	3,79	2,77	
	500	3,15Г	1	3,42	8,25	2549
			2	5,69	5,35	
C/A $h/R = 0,4$	б/п	2,5Г	1	7,61	5,23	2394
			2	- 6,09	- 13,61	
	50	3,35Г	1	4,29	3,51	2651
			2	4,62	9,08	
	500	2,95Г	1	- 6,81	- 5,35	2424
			2	2,84	6,34	

В таблиці зведено результати досліджень динаміки несиметричних тришарових циліндричних оболонок при дії імпульсного розподіленого внутрішнього навантаження. Верхня частина таблиці відповідає випадку, коли внутрішній несучий шар виготовлений зі сталі, а зовнішній – зі сплаву АМГ-6, нижня – навпаки. В останніх трьох стовпчиках наведено: максимальні значення прогинів несучих шарів – u_3^{max} ; максимальні значення напружень в несучих шарах – σ_{22}^{max} ; перші власні частоти несиметричних тришарових оболонок, відповідно. Аналіз даних таблиці свідчить про досить неоднорідні внутрішні коливальні процеси несиметричних тришарових структур при тому, що їх перші власні частоти відрізняються не більше, ніж на 12%.

Висновки.

Проведені дослідження показують, що використання легкого заповнювача з низькими масовими характеристиками дозволяє при порівняно невеликому збільшенні ваги конструкції (на 1-3 відсотки) підвищити її згинальну жорсткість. Таким чином, результати досліджень нестационарних коливань несиметричних тришарових циліндричних оболонок демонструють істотний вплив зміни фізико-механічних параметрів несучих шарів на якісні та кількісні параметри коливань тришарових структур.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто напружено-деформований стан несиметричних тришарових циліндричних оболонок при нестационарних навантаженнях. Несиметрія тришарової структури полягає в тому, що в ній несучі шари виготовлені з відмінних між собою матеріалів. Виведено рівняння руху несиметричної тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем, армованим ребрами жорсткості при використанні незалежних статичних і кінематичних гіпотез до кожного шару. При аналізі елементів пружної структури використана модель Тимошенка теорії оболонок і стержнів. Чисельні результати про напружено-деформований стан і характер коливань тришарової несиметричної пружної структури з несучими шарами, виготовленими з різних матеріалів, отримані за допомогою методу скінчених елементів. У широкому діапазоні досліджено вплив фізико-механічних параметрів шарів і геометрії оболонки на її напружено-деформований стан при осесиметричних імпульсних навантаженнях.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тришарова несиметрична циліндрична оболонка, легкий заповнювач, армуючі ребра, нестационарні навантаження, напружено-деформований стан, аналіз числових результатів.

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
2. Бабаев А.Э., Кубенко В.Д. Нестационарная аэроупругость слоистых оболочек. В кн.: Механика композитов (под ред. А.Н.Гузя): в 12-и томах. Т.9. Динамика элементов конструкций. – Киев: А.С.К., 1999. – С. 247 – 261.
3. Вахрушева М.Ю. Применение вариационно-параметрического метода для получения линейной системы алгебраических уравнений при расчете трехслойных пологих оболочек с дискретным внутренним слоем. // Математическое моделирование, численные методы и комплексы задач. Сб. трудов СПбГАСУ, 1998, – С. 63 – 71.
4. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 288 с.
5. Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И. Расчет трехслойных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1984. – 308с.
6. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Численное моделирование динамического поведения и расчет на прочность многослойных оболочек при импульсном нагружении // Пробл. прочности. – 2000. – № 4. – С. 86 – 96.
7. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Заболотный Г.М. Вынужденные колебания пятислойных цилиндрических оболочек с продольно-поперечным дискретным подкреплением при распределенном нагружении // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла / Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ. – 2011. – № 12. – С. 203 – 209.

8. *Луговой П.З., Скосаренко Ю.В., Орленко С.П.* Применение метода сплайн – коллокации для решения задач статики и динамики конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек // Доп. НАН України. – 2019. – № 8. – С. 25 – 33.
9. *Луговой П.З., Шугайло О.П., Орленко С.П., Деменков В.М.* Коливання теплоізоляційних тришарових циліндричних труб при експлуатаційних навантаженнях // Ядерная и радиационная безопасность. – 2020. – № 3. – С. 55 – 61.
10. *Орленко С.П.* Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем // Доп. НАН України. – 2020. – № 3. – С. 19 – 27.
11. *Орленко С.П.* Вплив несиметрії тришарових циліндричних оболонок з легким заповнювачем на їх напружено-деформований стан при нестационарних навантаженнях // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – № 31. – С. 42 – 52.
12. *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек. В кн: Успехи механики (под ред. А.Н.Гузя): в 6-ти томах. Т.3. – К.: “А.С.К.”, 2007. – С. 141 – 175.
13. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
14. *Устарханов О.М., Муселемов Х. М., Акаева З.К.* Расчёт параметров дискретного заполнителя в виде усеченной пирамиды // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2010. – № 19. – С. 59 – 65.
15. *Frostig Y., Thomsen O.* Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. of Solids and Struct. – 2004. – P. 1697 – 1724.
16. *Kheirikhah M.M., Khalili S.M.R., Fard K.M.* Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory // European J. of Mechanics A/Solids. – 2012. – **31**, N 1 – P. 54 – 66.
17. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P.* Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution Under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1 – P. 22 – 32.
18. *Lugovoi, P.Z., Meish, V.F., Orlenko, S.P.* Numerical Simulation of the Dynamics of Spherical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Ribs under a Shock Wave // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 5. – P. 590 – 598.
19. *Lugovoi P.Z., Skosarenko Yu.V., Orlenko S.P., Shugailo O.P.* Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 5. – P. 524 – 533.
20. *Meish V.F., Meish Yu.A., Belova M.A.* Nonstationary Dynamics of Elliptic Isotropic Conical Shells under Distributed Loads // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 424 – 431.

Надійшла 06.07.2020

Затверджена до друку 24.06.2021