

Є. А. Сторожук

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН І СТІЙКІСТЬ ГНУЧКОЇ КРУГОВОЇ
ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ВРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ
ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: stevan@ukr.net*

Abstract. The statement is given and the exact solution is obtained for the geometrically nonlinear problem for a long cylindrical shell compliant to the transverse shear under the action of a local static load. The basic equations are written according to the geometrically nonlinear theory of the shallow shells in the quadratic approximation, Timoshenko's hypothesis, and Hooke's law. The results are obtained using the generalized functions for a shell with the hinged longitudinal edges loaded by the piecewise uniform pressure.

Key words: long cylindrical shell, geometric nonlinearity, transverse shear, local loading, exact solution, generalized functions.

Вступ.

Циліндричні оболонки кругового та некругового поперечного перерізу, виготовлені з композитних матеріалів, знаходять широке застосування в різних галузях техніки як конструктивні елементи машин і приладів. Для таких матеріалів характерні анізотропія механічних властивостей, неоднорідність структури, низька зсувна жорсткість. Високі вимоги до точності й достовірності результатів досліджень зазначених елементів конструкцій вимагають крім врахування дійсних умов експлуатації, також і врахування особливостей їх деформування (деформацій поперечного зсуву і великих прогинів).

Значну кількість результатів з розрахунку циліндричних оболонок отримано з використанням чисельних, наближених аналітичних і експериментальних методів, за допомогою яких досліджено напружено-деформований стан (НДС), стійкість і коливання структурно однорідних і неоднорідних (з отворами, вирізами, ребрами жорсткості) циліндричних оболонок кругового і некругового поперечного перерізу [3, 6, 8, 9, 12, 14 – 18].

Особливий інтерес представляє одержання точних розв'язків задач даного класу в геометрично нелінійній постановці [1, 2, 4, 5, 7, 11, 20], що дозволяє розглянути поведінку оболонки у всій області деформування – як докритичній, так і закритичній, і виконати аналіз НДС залежно від геометричних і механічних параметрів, а також видів навантаження й контурних умов. В переважній більшості випадків точні розв'язки геометрично нелінійних крайових задач для циліндричних оболонок отримані на основі гіпотез Кірхгофа–Лява і співвідношень теорії пологих оболонок.

Вперше аналітичний (точний) розв'язок задачі про нелінійне деформування циліндричної оболонки було отримано в класичній постановці для нескінченно довгої пологої оболонки кругового поперечного перерізу [1].

Відзначимо, що точні розв'язки лінійно-пружних задач статки для замкнутих і відкритих довгих циліндричних оболонок овального поперечного перерізу з неперервним і східчасто-змінним радіусами кривизни наведені в роботі [19].

Нижче дано постановку геометрично нелінійних задач статки для податливої на поперечний зсув нескінченно довгої пологої циліндричної оболонки кругового поперечного перерізу при дії кусково-рівномірного навантаження, отримано аналітичні (точні) розв'язки задач даного класу й наведено конкретні числові результати дослідження НДС і стійкості незамкнутої оболонки з шарнірно закріпленими повздовжніми краями.

§1. Постановка задачі, основні співвідношення і розв'язувальні рівняння.

Розглянемо незамкнену полого нескінченно довгу кругову циліндричну оболонку радіуса R і товщини h з шарнірно закріпленими повздовжніми краями, виготовлену із трансверсально-ізотропного матеріалу. Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат (x, y, z) з початком у вершині поперечного перерізу, де x, y, z – довжини твірної, дуги напрямної і нормалі до серединної поверхні оболонки (рис. 1). Вважаємо, що оболонка має сталі жорсткісні характеристики й знаходиться під дією симетричного відносно вершини нормального поверхневого навантаження інтенсивності q , яке рівномірно розподілене по нескінченно довгій смужці шириною $2a$ та прикладене з боку опуклості оболонки, як показано на рис. 1. З викладеного вище випливає, що переміщення, деформації й напруження в кожному поперечному перерізі оболонки будуть однаковими, а всі шукані величини будуть змінюватися тільки вздовж напрямної (будуть залежати тільки від координати y ($-b \leq y \leq b$)).

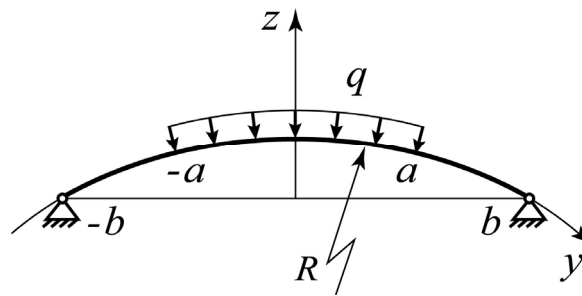


Рис. 1

Нехай при підвищених рівнях діючого навантаження в оболонці виникають великі (скінченні) прогини, порівняні з товщиною. При дослідженні НДС даного класу гнучких циліндричних оболонок будемо використовувати рівняння геометрично нелінійної теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні, яка базується на гіпотезі прямої лінії (враховується деформація поперечного зсуву).

Відповідно до прийнятої моделі переміщення і деформації оболонки розподілені по товщині наступним чином:

$$u^z = u + z\vartheta; \quad w^z = w; \quad (1.1)$$

$$\varepsilon^z = \varepsilon + z\mu; \quad \gamma^z = \gamma, \quad (1.2)$$

де u, w – тангенціальне переміщення і прогин точок серединної поверхні оболонки; ϑ – кут повороту нормалі; ε, μ, γ – мембранна, згинна та поперечна зсувна компоненти деформації оболонки, які визначаються за формулами:

$$\varepsilon = \frac{du}{dy} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2; \quad \mu = \frac{d\vartheta}{dy}; \quad \gamma = \vartheta + \frac{dw}{dy}. \quad (1.3)$$

Зв'язок внутрішніх зусиль і момента з компонентами деформації оболонки подано на основі закону Гука у вигляді:

$$N = D_N \varepsilon; \quad D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad Q = D_Q \gamma; \quad D_Q = m G_{yz} h; \quad (1.4)$$

$$M = D_M \mu; \quad D_M = D_N h^2 / 12.$$

У співвідношеннях (1.4) позначено: N, Q – тангенціальне і перерізує зусилля; M – згинний момент; D_N, D_M, D_Q – жорсткісні характеристики оболонки; E, ν – модуль пружності й коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки в площині ізотропії; G_{yz} – модуль зсуву в площині поперечного перерізу; m – коефіцієнт, який залежить від характеру розподілу зсуву по товщині.

Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\frac{dN}{dy} = 0; \quad \frac{d}{dy} \left(Q + N \frac{dw}{dy} \right) - \frac{N}{R} + q_z = 0; \quad \frac{dM}{dy} - Q = 0, \quad (1.5)$$

де q_z – нормальна складова поверхневого навантаження.

Зазначимо, що оскільки діюче навантаження напрямлене до центра кривизни, то тангенціальне зусилля N є нерозтягуючим ($N \leq 0$).

На підставі (1.3) – (1.5) приходимо до системи нелінійних розв'язувальних рівнянь у переміщеннях:

$$\frac{d}{dy} \left\{ D_N \left[\frac{du}{dy} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \right] \right\} = 0;$$

$$D_Q \left(\frac{d\vartheta}{dy} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) + \frac{d}{dy} \left\{ D_N \left[\frac{du}{dy} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \right] \frac{dw}{dy} \right\} - \quad (1.6)$$

$$- \frac{D_N}{R} \left[\frac{du}{dy} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \right] = -q_z;$$

$$D_M \frac{d^2 \vartheta}{dy^2} - D_Q \left(\vartheta + \frac{dw}{dy} \right) = 0.$$

При розв'язанні конкретних крайових задач до системи рівнянь (1.6) потрібно приєднати відповідні граничні умови.

У випадку, коли повздовжні краї оболонки шарнірно закріплені, граничні умови записуються так:

$$w(\pm b) = 0; \quad \left. \frac{d\vartheta}{dy} \right|_{y=\pm b} = 0; \quad u(\pm b) = 0. \quad (1.7)$$

Останню з умов (1.7) на одному краї можна замінити еквівалентною умовою

$$\Delta = \int_{-b}^b \frac{du}{dy} dy = 0, \quad (1.8)$$

яка означає, що зближення між краями відсутнє.

Інтегруючи перше рівняння системи (1.6), отримуємо, що

$$N = D_N \left[\frac{du}{dy} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \right] = C_0 = \text{const}, \quad (1.9)$$

тобто, тангенціальне зусилля не змінюється вздовж напрямної.

З врахуванням (1.9) перепишемо друге рівняння системи (1.6) у вигляді

$$(D_Q + N) \frac{d^2 w}{dy^2} + D_Q \frac{d\vartheta}{dy} = \frac{N}{R} - q_z. \quad (1.10)$$

Введемо безрозмірні величини [7, 10]:

$$\eta = \frac{y}{b}; \quad \xi = \frac{a}{b}; \quad \tilde{w} = \frac{wR}{b^2}; \quad \tilde{u} = \frac{u}{k^2 b^3}; \quad \tilde{\vartheta} = \frac{\vartheta}{kb};$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{k^2 b^3}; \quad \tilde{k} = \frac{kb^2}{h}; \quad \tilde{q} = \frac{qb^2}{kD_M}; \quad \beta = \frac{D_M}{D_Q b^2}; \quad (1.11)$$

$$\tilde{N} = \frac{Nb^2}{D_M}; \quad \tilde{Q} = \frac{Qb}{D_M k}; \quad \tilde{M} = \frac{M}{D_M k},$$

де $k = 1/R$ – кривизна циліндра.

Враховуючи, що діюче навантаження q_z є кусково-рівномірне, представимо його за допомогою одиничної східчастої функції Хевісайда $H(\eta \pm \xi)$:

$$\tilde{q}_z = -\tilde{q} [H(\eta + \xi) - H(\eta - \xi)]. \quad (1.12)$$

Тоді рівності (1.9) та (1.10), (1.6) набудуть такого вигляду:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\eta} + \tilde{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\eta} \right)^2 = \frac{\tilde{N}}{12\tilde{k}^2} \quad (1.13)$$

та

$$(1 + \beta\tilde{N}) \frac{d^2 \tilde{w}}{d\eta^2} + \frac{d\tilde{\vartheta}}{d\eta} = \beta\tilde{N} + \beta\tilde{q} [H(\eta + \xi) - H(\eta - \xi)];$$

$$\beta \frac{d^2 \tilde{\vartheta}}{d\eta^2} - \tilde{\vartheta} - \frac{d\tilde{w}}{d\eta} = 0. \quad (1.14)$$

Система (1.14) є системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і її загальний розв'язок (безрозмірні прогин \tilde{w} і кут повороту $\tilde{\vartheta}$) виражається лінійно через праву частину, тобто через параметр навантаження \tilde{q} . З іншого боку, у вирази для коефіцієнтів системи (1.14) входить безрозмірне тангенціальне зусилля \tilde{N} , яке нелінійно залежить від \tilde{q} , що спричиняє нелінійну залежність \tilde{w} і $\tilde{\vartheta}$ від \tilde{q} .

Крайові умови (1.7), (1.8) у безрозмірних величинах запишуться наступним чином:

$$\tilde{w}(\pm 1) = 0; \quad \left. \frac{d\tilde{\vartheta}}{d\eta} \right|_{\eta=\pm 1} = 0; \quad \tilde{u}(\pm 1) = 0; \quad (1.15)$$

$$\tilde{\Delta} = \int_{-1}^1 \frac{d\tilde{u}}{d\eta} d\eta = 0. \quad (1.16)$$

Зведемо систему (1.14) до одного диференціального рівняння. Для цього спочатку диференціюємо один раз друге рівняння системи (1.14)

$$\beta \frac{d^3 \tilde{g}}{d\eta^3} - \frac{d\tilde{g}}{d\eta} - \frac{d^2 \tilde{w}}{d\eta^2} = 0, \quad (1.17)$$

а далі за допомогою першого рівняння цієї системи вилучаємо з рівняння (1.17) похідні від кута повороту \mathcal{G} .

За умови $-\beta^{-1} < \tilde{N} \leq 0$ отримаємо відносно безрозмірного прогину \tilde{w} лінійне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами такого виду:

$$\frac{d^4 \tilde{w}}{d\eta^4} + \lambda^2 \frac{d^2 \tilde{w}}{d\eta^2} = \lambda^2 + \tilde{q}(1 + \beta\lambda^2) \left\{ \beta \frac{d}{d\eta} [\delta(\eta + \xi) - \delta(\eta - \xi)] - H(\eta + \xi) + H(\eta - \xi) \right\}, \quad (1.18)$$

де $\lambda^2 = -\frac{\tilde{N}}{1 + \beta\tilde{N}}$; $\delta(\eta \pm \xi)$ – дельта-функція Дірака.

§2. Побудова розв'язку геометрично нелінійної задачі.

Загальний розв'язок (\tilde{w}) рівняння (1.18) знаходиться як сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (\tilde{w}^*) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (\tilde{w}^{**}).

Розв'язок однорідного рівняння, яке відповідає рівнянню (1.18), шукаємо за методом Ейлера. У випадку, коли $-\beta^{-1} < \tilde{N} < 0$ (тангенціальне зусилля є стискаючим), характеристичне рівняння $t^4 + \lambda^2 t^2 = 0$ має один двократний дійсний корінь і два спряжені чисто уявні корені: $t_{1,2} = 0$; $t_{3,4} = \pm i\lambda$; $i = \sqrt{-1}$.

Враховуючи наведені вище значення коренів характеристичного рівняння, запишемо загальний розв'язок однорідного рівняння у вигляді:

$$\tilde{w}^* = \sum_{i=1}^4 C_i \tilde{w}_i(\eta), \quad (2.1)$$

де C_i – сталі інтегрування; $\tilde{w}_i(\eta)$ – фундаментальна система розв'язків: $\tilde{w}_1 = 1$; $\tilde{w}_2 = \eta$; $\tilde{w}_3 = \cos \lambda\eta$; $\tilde{w}_4 = \sin \lambda\eta$.

За допомогою формули Коші

$$\tilde{w}^{**} = \int_{-1}^{\eta} K(\eta, t) f(t) dt \quad (2.2)$$

отримаємо такий вираз для частинного розв'язку неоднорідного рівняння (1.18):

$$\tilde{w}^{**} = \sum_{i=1}^4 \tilde{w}_i(\eta) \int_{-1}^{\eta} \frac{W_{4i}(t) f(t)}{W(t)} dt. \quad (2.3)$$

Тут $K(\eta, t)$ – функція Коші, яка за змінною η задовольняє однорідному рівнянню і спеціальним початковим умовам в точці $\eta = t$ та залежить від t , як від параметра; $f(t)$ – права частина неоднорідного рівняння; $W(t)$ – визначник Вронського фундаментальної системи розв'язків $\tilde{w}_i(t)$; $W_{4i}(t)$ – алгебраїчні доповнення елементів останнього (четвертого) рядка визначника Вронського.

З використанням співвідношень (2.1) і (2.3) приходимо до розгорнутої форми запису загального розв'язку неоднорідного рівняння:

$$\begin{aligned} \tilde{w} = C_1 + C_2\eta + C_3 \cos \lambda\eta + C_4 \sin \lambda\eta + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\tilde{q}}{2\tilde{N}^2} \left\{ H(\eta + \xi) \left[4\sin^2 0,5\lambda(\eta + \xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \tilde{N}(\eta + \xi)^2 \right] - H(\eta - \xi) \left[4\sin^2 0,5\lambda(\eta - \xi) + \tilde{N}(\eta - \xi)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для обчислення кута повороту нормалі через прогин в роботі отримана така формула:

$$\tilde{g} = -\frac{d\tilde{w}}{d\eta} - \beta(1 + \beta\tilde{N})\frac{d^3\tilde{w}}{d\eta^3} + \beta^2\tilde{q}[\delta(\eta + \xi) - \delta(\eta - \xi)]. \quad (2.5)$$

Після підстановки в (2.5) значень похідних від прогину вираз для кута повороту набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \tilde{g} = -C_2 + \lambda(1 + \beta\tilde{N})(C_3 \sin \lambda\eta - C_4 \cos \lambda\eta) - \eta + \\ + \frac{\tilde{q}}{\lambda\tilde{N}} \left\{ H(\eta + \xi) [\sin \lambda(\eta + \xi) - \lambda(\eta + \xi)] - H(\eta - \xi) [\sin \lambda(\eta - \xi) - \lambda(\eta - \xi)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Безрозмірні згинний момент і перерізує зусилля обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{M} = -\tilde{N}(C_3 \cos \lambda\eta + C_4 \sin \lambda\eta) - 1 + \\ + \frac{\tilde{q}}{\tilde{N}} \left\{ H(\eta + \xi) [\cos \lambda(\eta + \xi) - 1] - H(\eta - \xi) [\cos \lambda(\eta - \xi) - 1] \right\}; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\tilde{Q} = \lambda\tilde{N}(C_3 \sin \lambda\eta - C_4 \cos \lambda\eta) - \frac{\tilde{q}\lambda}{\tilde{N}} [H(\eta + \xi) \sin \lambda(\eta + \xi) - H(\eta - \xi) \sin \lambda(\eta - \xi)].$$

Визначення сталих інтегрування. Задовольняючи граничні умови $\tilde{w}(\pm 1) = 0$, $\left. \frac{d\tilde{g}}{d\eta} \right|_{\eta=\pm 1} = 0$, приходимо до системи чотирьох лінійних рівнянь, яка розпадається на дві системи відносно C_2, C_4 та C_1, C_3 :

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 \sin \lambda = -\frac{\tilde{q} \sin \lambda \sin \lambda\xi}{\tilde{N}^2} - \frac{\tilde{q}\xi}{\tilde{N}}; \\ C_4 \sin \lambda = -\frac{\tilde{q} \sin \lambda \sin \lambda\xi}{\tilde{N}^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

та

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 \cos \lambda = -\frac{1}{2} - \frac{\tilde{q} \sin \lambda \sin \lambda\xi}{\tilde{N}^2} - \frac{\tilde{q}\xi}{\tilde{N}}; \\ C_3 \cos \lambda = -\frac{1}{\tilde{N}} - \frac{\tilde{q} \sin \lambda \sin \lambda\xi}{\tilde{N}^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Система (2.8) має один розв'язок за умови, що $\sin \lambda \neq 0$:

$$C_2 = -\frac{\tilde{q}\xi}{\tilde{N}}; \quad C_4 = -\frac{\tilde{q} \sin \lambda \xi}{\tilde{N}^2}. \quad (2.10)$$

Якщо ж $\sin \lambda = 0$, тобто $\lambda = \pi, 2\pi, \dots$, то система (2.8) має безліч розв'язків: $C_2 = -\frac{\tilde{q}\xi}{\tilde{N}}$; C_4 – довільне дійсне число. При досягненні параметром внутрішнього зусилля значення $\lambda = \pi$ симетрична відносно лінії $\eta = 0$ форма рівноваги оболонки вперше стає нестійкою та з'являється несиметрична складова прогину.

Зазначимо, що при $\sin \lambda = 0$ сталу інтегрування C_4 можна визначити з граничної умови (1.16) [11].

При розв'язанні системи (2.9) потрібно розглянути два випадки.

Випадок 1. Визначник системи (2.9) відмінний від нуля ($\cos \lambda \neq 0$). Тоді з (2.9) знаходимо

$$C_1 = \frac{1}{\tilde{N}} - \frac{1}{2} - \frac{\tilde{q}\xi}{\tilde{N}}; \quad C_3 = -\frac{\tilde{N} + \tilde{q} \sin \lambda \sin \lambda \xi}{\tilde{N}^2 \cos \lambda}. \quad (2.11)$$

Враховуючи значення сталих інтегрування, із співвідношень (2.4), (2.6), (2.7) одержимо остаточні вирази для прогину, кута повороту, згинного моменту і перерізувального зусилля:

$$\tilde{w} = \frac{1}{\tilde{N}} - \frac{\cos \lambda \eta}{\tilde{N} \cos \lambda} + \frac{\eta^2 - 1}{2} + \frac{\tilde{q}}{\tilde{N}^2} \left\{ -\tilde{N} \xi (1 + \eta) - \frac{\sin \lambda \xi \sin \lambda (1 + \eta)}{\cos \lambda} + \right. \\ \left. + H(\eta + \xi) \left[1 - \cos \lambda (\eta + \xi) + 0,5 \tilde{N} (\eta + \xi)^2 \right] - H(\eta - \xi) \left[1 - \cos \lambda (\eta - \xi) + 0,5 \tilde{N} (\eta - \xi)^2 \right] \right\};$$

$$\tilde{g} = -\eta + \frac{\sin \lambda \eta}{\lambda \cos \lambda} - \frac{\tilde{q}}{\tilde{N} \lambda} \left\{ -\lambda \xi + \frac{\sin \lambda \xi \cos \lambda (1 + \eta)}{\cos \lambda} - \right. \\ \left. - H(\eta + \xi) [\sin \lambda (\eta + \xi) - \lambda (\eta + \xi)] + H(\eta - \xi) [\sin \lambda (\eta - \xi) - \lambda (\eta - \xi)] \right\}; \quad (2.12)$$

$$\tilde{M} = -1 + \frac{\cos \lambda \eta}{\cos \lambda} - \frac{\tilde{q}}{\tilde{N}} \left\{ -\frac{\sin \lambda \xi \sin \lambda (1 + \eta)}{\cos \lambda} - \right. \\ \left. - H(\eta + \xi) [\cos \lambda (\eta + \xi) - 1] + H(\eta - \xi) [\cos \lambda (\eta - \xi) - 1] \right\};$$

$$\tilde{Q} = -\frac{\lambda \sin \lambda \eta}{\cos \lambda} - \frac{\lambda \tilde{q}}{\tilde{N}} \left[-\frac{\sin \lambda \xi \cos \lambda (1 + \eta)}{\cos \lambda} + \right. \\ \left. + H(\eta + \xi) \sin \lambda (\eta + \xi) - H(\eta - \xi) \sin \lambda (\eta - \xi) \right].$$

В результаті виконання граничної умови (1.16) ($\tilde{\Delta} = 0$) отримаємо залежність між безрозмірними параметрами навантаження й тангенціального зусилля у вигляді квадратного рівняння відносно \tilde{q}

$$A\tilde{q}^2 + 2B\tilde{q} + C = 0, \quad (2.13)$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами:

$$A = S_1 \sin^2 \lambda + S_2 \cos^2 \lambda + S_3 \sin \lambda \cos \lambda; \\ B = S_4 \sin \lambda + S_5 \cos \lambda + S_6 \cos^2 \lambda; \\ C = S_7 \sin^2 \lambda + S_8 \cos^2 \lambda + S_9 \sin \lambda \cos \lambda, \quad (2.14)$$

де

$$S_2 = \frac{2\xi^2(3-2\xi)}{3\tilde{N}^2} + \frac{2(\sin 2\lambda\xi - 2\lambda\xi)}{\lambda\tilde{N}^3} + \frac{\lambda(2\lambda\xi \cos 2\lambda\xi - \sin 2\lambda\xi) + 2\lambda^2 \sin^2 \lambda \xi}{2\tilde{N}^4}; \\ S_1 = \frac{\lambda^2 \sin^2 \lambda \xi}{\tilde{N}^4}; \quad S_3 = \frac{\lambda^3 \xi \sin 2\lambda\xi + (4\tilde{N} - \lambda^2) \sin^2 \lambda \xi}{\lambda\tilde{N}^4}; \quad S_4 = \frac{\lambda^2 \sin \lambda \xi}{\tilde{N}^3}; \quad S_6 = -\frac{2\xi}{\tilde{N}^2};$$

$$S_5 = \frac{\lambda^3 \xi \cos \lambda \xi + (2\tilde{N} - \lambda^2) \sin \lambda \xi}{\lambda \tilde{N}^3}; \quad S_7 = \frac{\lambda^2}{\tilde{N}^2}; \quad S_8 = \frac{\lambda^2}{\tilde{N}^2} - \frac{\tilde{N}}{3k^2} - \frac{2}{3}; \quad S_9 = -\frac{\lambda}{\tilde{N}^2}.$$

Квадратне рівняння (2.13) має дійсні розв'язки

$$\tilde{q}_1 = -\frac{B + |\cos \lambda| \sqrt{\tilde{D}}}{A}; \quad \tilde{q}_2 = -\frac{B - |\cos \lambda| \sqrt{\tilde{D}}}{A} \quad (2.15)$$

при невід'ємних значеннях його дискримінанта

$$D = B^2 - A \cdot C = \tilde{D} \cos^2 \lambda \geq 0;$$

$$\begin{aligned} \tilde{D} = & S_5^2 - S_4^2 + 2S_1S_7 + 2S_4S_6 \sin \lambda + 2S_5S_6 \cos \lambda - (S_1S_8 + S_2S_7 + S_3S_9) \sin^2 \lambda + \\ & + (S_6^2 - S_2S_8 - S_1S_7) \cos^2 \lambda + (S_1S_9 + S_3S_7 - S_2S_9 - S_3S_8) \sin \lambda \cos \lambda. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Зазначимо, що вираз для \tilde{D} отримано з врахуванням таких залежностей між величинами S_i : $S_4^2 - S_1S_7 = 0$; $2S_4S_5 - S_1S_9 - S_3S_7 = 0$.

Випадок 2. Визначник системи (2.9) дорівнює нулю ($\cos \lambda = 0$), тоді система (2.9) має безліч розв'язків, оскільки друге рівняння цієї системи не дозволяє визначити сталу C_3 : $C_1 = \frac{1}{\tilde{N}} - \frac{1}{2} - \frac{\tilde{q}_1 \xi}{\tilde{N}}$; C_3 – довільне дійсне число. Тому при $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) розв'язок рівняння (1.18) визначається неоднозначно (з точністю до множника C_3 при тригонометричній функції $\cos \lambda \eta$).

Неоднозначність розв'язку можна усунути, якщо дослідити границі виразів для прогину, кута повороту, згинного моменту і перерізуючого зусилля (2.12) при $\lambda \rightarrow \lambda_n$.

Зазначимо, що при переході функції $\tilde{q}(\lambda)$ через точку λ_n має місце зміна однієї гілки розв'язку рівняння (2.13) на іншу.

Враховуючи сказане вище, обчислимо границі тих доданків у виразах (2.12), знаменники яких прямують до нуля при $\lambda \rightarrow \lambda_n$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left[\frac{\cos \lambda \eta}{\tilde{N} \cos \lambda} - \frac{\tilde{q} \sin \lambda \xi \sin \lambda (1 + \eta)}{\tilde{N}^2 \cos \lambda} \right] = \\ & = - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left[\frac{\cos \lambda \eta}{\tilde{N} \cos \lambda} - \frac{\tilde{q} (\sin \lambda \cos \lambda \eta + \cos \lambda \sin \lambda \eta) \sin \lambda \xi}{\tilde{N}^2 \cos \lambda} \right] = \\ & = - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left[\frac{(\tilde{N} + \tilde{q} \sin \lambda \xi \sin \lambda) \cos \lambda \eta}{\tilde{N}^2 \cos \lambda} + \frac{\tilde{q} \sin \lambda \xi \sin \lambda \eta}{\tilde{N}^2} \right] = \\ & = - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left\{ \frac{[A\tilde{N} - (B \pm \sqrt{\tilde{D}} \cos \lambda) \sin \lambda \xi \sin \lambda] \cos \lambda \eta}{A\tilde{N}^2 \cos \lambda} - \frac{(B \pm \sqrt{\tilde{D}} \cos \lambda) \sin \lambda \xi \sin \lambda \eta}{A\tilde{N}^2} \right\} = \\ & = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left[\frac{(B \sin \lambda \xi \sin \lambda - A\tilde{N}) \cos \lambda \eta}{A\tilde{N}^2 \cos \lambda} \pm \frac{\sqrt{\tilde{D}} \sin \lambda \xi \sin \lambda \cos \lambda \eta}{A\tilde{N}^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(B \pm \sqrt{\tilde{D}} \cos \lambda) \sin \lambda \xi \sin \lambda \eta}{A\tilde{N}^2} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left\{ \frac{[(S_5 \cos \lambda + S_6 \cos^2 \lambda) \sin \lambda \xi \sin \lambda - \tilde{N}(S_2 \cos^2 \lambda + S_3 \sin \lambda \cos \lambda)] \cos \lambda \eta}{\tilde{N}^2 (S_1 \sin^2 \lambda + S_2 \cos^2 \lambda + S_3 \sin \lambda \cos \lambda) \cos \lambda} + \right. \\
&\quad + \frac{(S_4 \sin \lambda + S_5 \cos \lambda + S_6 \cos^2 \lambda \pm \sqrt{\tilde{D}} \cos \lambda) \sin \lambda \xi \sin \lambda \eta}{(S_1 \sin^2 \lambda + S_2 \cos^2 \lambda + S_3 \sin \lambda \cos \lambda) \tilde{N}^2} \pm \\
&\quad \left. \pm \frac{\sqrt{\tilde{D}} \sin \lambda \xi \sin \lambda \cos \lambda \eta}{(S_1 \sin^2 \lambda + S_2 \cos^2 \lambda + S_3 \sin \lambda \cos \lambda) \tilde{N}^2} \right\} = \\
&= \frac{[(S_5 \pm \sqrt{\tilde{D}}) \sin \lambda \xi - S_3 \tilde{N}] \cos \lambda \eta + S_4 \sin \lambda \xi \sin \lambda \eta}{S_1 \tilde{N}^2 \sin \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n}; \quad (2.17) \\
&\quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left[\frac{\sin \lambda \eta}{\lambda \cos \lambda} - \frac{\tilde{q} \sin \lambda \xi \cos \lambda (1 + \eta)}{\lambda \tilde{N} \cos \lambda} \right] = \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left[\frac{\sin \lambda \eta}{\lambda \cos \lambda} - \frac{\tilde{q} (\cos \lambda \cos \lambda \eta - \sin \lambda \sin \lambda \eta) \sin \lambda \xi}{\lambda \tilde{N} \cos \lambda} \right] = \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left[\frac{(\tilde{N} + \tilde{q} \sin \lambda \xi \sin \lambda) \sin \lambda \eta}{\lambda \tilde{N} \cos \lambda} - \frac{\tilde{q} \sin \lambda \xi \cos \lambda \eta}{\lambda \tilde{N}} \right] = \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left\{ \frac{[A \tilde{N} - (B \pm \sqrt{\tilde{D}} \cos \lambda) \sin \lambda \xi \sin \lambda] \sin \lambda \eta}{\lambda A \tilde{N} \cos \lambda} + \frac{(B \pm \sqrt{\tilde{D}} \cos \lambda) \sin \lambda \xi \cos \lambda \eta}{\lambda A \tilde{N}} \right\} = \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left[\frac{(A \tilde{N} - B \sin \lambda \xi \sin \lambda) \sin \lambda \eta}{\lambda A \tilde{N} \cos \lambda} \mp \frac{\sqrt{\tilde{D}} \sin \lambda \xi \sin \lambda \sin \lambda \eta}{\lambda A \tilde{N}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(B \pm \sqrt{\tilde{D}} \cos \lambda) \sin \lambda \xi \cos \lambda \eta}{\lambda A \tilde{N}} \right] = \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left\{ \frac{[\tilde{N}(S_2 \cos^2 \lambda + S_3 \sin \lambda \cos \lambda) - (S_5 \cos \lambda + S_6 \cos^2 \lambda) \sin \lambda \xi \sin \lambda] \sin \lambda \eta}{\lambda \tilde{N} (S_1 \sin^2 \lambda + S_2 \cos^2 \lambda + S_3 \sin \lambda \cos \lambda) \cos \lambda} + \right. \\
&\quad + \frac{(S_4 \sin \lambda + S_5 \cos \lambda + S_6 \cos^2 \lambda \pm \sqrt{\tilde{D}} \cos \lambda) \sin \lambda \xi \cos \lambda \eta}{\lambda (S_1 \sin^2 \lambda + S_2 \cos^2 \lambda + S_3 \sin \lambda \cos \lambda) \tilde{N}} \mp \\
&\quad \left. \mp \frac{\sqrt{\tilde{D}} \sin \lambda \xi \sin \lambda \sin \lambda \eta}{\lambda (S_1 \sin^2 \lambda + S_2 \cos^2 \lambda + S_3 \sin \lambda \cos \lambda) \tilde{N}} \right\} = \\
&= \frac{[S_3 \tilde{N} - (S_5 \pm \sqrt{\tilde{D}}) \sin \lambda \xi] \sin \lambda \eta + S_4 \sin \lambda \xi \cos \lambda \eta}{\lambda S_1 \tilde{N} \sin \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

Якщо $\tilde{D} \geq 0$ в деякому околі точки λ_n , то при $\lambda \rightarrow \lambda_n$ існують границі (2.17), навантаження \tilde{q} та решти доданків у виразах для прогину, кута повороту, згинного моменту і перерізуючого зусилля, а тому існують і відповідні границі цих функцій:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \tilde{w}_{1,2} &= \frac{\eta^2 - 1}{2} + \left\{ \frac{1}{\tilde{N}} + \frac{[(S_5 \pm \sqrt{\tilde{D}}) \sin \lambda \xi - S_3 \tilde{N}] \cos \lambda \eta + S_4 \sin \lambda \xi \sin \lambda \eta}{S_1 \tilde{N}^2 \sin \lambda} \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_n} + \\
&+ \frac{S_4}{S_1 \tilde{N}^2 \sin \lambda} \left\{ \tilde{N} \xi (1 + \eta) - H(\eta + \xi) \left[1 - \cos \lambda (\eta + \xi) + 0,5 \tilde{N} (\eta + \xi)^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + H(\eta - \xi) \left[1 - \cos \lambda (\eta - \xi) + 0,5 \tilde{N} (\eta - \xi)^2 \right] \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_n}; \\
\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \tilde{q}_{1,2} &= -\eta + \frac{[S_3 \tilde{N} - (S_5 \pm \sqrt{\tilde{D}}) \sin \lambda \xi] \sin \lambda \eta + S_4 \sin \lambda \xi \cos \lambda \eta}{\lambda S_1 \tilde{N} \sin \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} - \quad (2.18) \\
&- \frac{S_4 \left\{ \lambda \xi + H(\eta + \xi) [\sin \lambda (\eta + \xi) - \lambda (\eta + \xi)] - H(\eta - \xi) [\sin \lambda (\eta - \xi) - \lambda (\eta - \xi)] \right\}}{\lambda S_1 \tilde{N} \sin \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n}; \\
\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \tilde{M}_{1,2} &= -1 - \frac{[(S_5 \pm \sqrt{\tilde{D}}) \sin \lambda \xi - S_3 \tilde{N}] \cos \lambda \eta + S_4 \sin \lambda \xi \sin \lambda \eta}{S_1 \tilde{N} \sin \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} - \\
&- \frac{S_4 \left\{ H(\eta + \xi) [\cos \lambda (\eta + \xi) - 1] - H(\eta - \xi) [\cos \lambda (\eta - \xi) - 1] \right\}}{S_1 \tilde{N} \sin \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n}; \\
\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \tilde{Q}_{1,2} &= - \frac{\lambda [S_3 \tilde{N} - (S_5 \pm \sqrt{\tilde{D}}) \sin \lambda \xi] \sin \lambda \eta + \lambda S_4 \sin \lambda \xi \cos \lambda \eta}{S_1 \tilde{N} \sin \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} + \\
&+ \frac{\lambda S_4 [H(\eta + \xi) \sin \lambda (\eta + \xi) - H(\eta - \xi) \sin \lambda (\eta - \xi)]}{S_1 \tilde{N} \sin \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

Величина навантаження, при якій оболонка знаходиться в стані рівноваги, в даному випадку визначається з другого рівняння системи (2.9):

$$\tilde{q}_n = - \frac{\tilde{N}_n}{\sin \lambda_n \sin \lambda_n \xi}; \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \tilde{N}_n = - \frac{\lambda_n^2}{1 + \beta \lambda_n^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.19)$$

Вираз для нормального напруження має вигляд

$$\sigma = \frac{N}{h} + \frac{12M}{h^3} z \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) \quad (2.20)$$

або в безрозмірних величинах

$$\tilde{\sigma} = \tilde{N} + 12\tilde{k}\tilde{M}\tilde{z} \quad (-0,5 \leq \tilde{z} \leq 0,5), \quad (2.21)$$

де $\tilde{\sigma} = hb^2 \sigma / D_M$; $\tilde{z} = z / h$.

Таким чином, точний розв'язок нелінійної крайової задачі (1.13) – (1.16) отримано в параметричній формі з величиною λ в якості параметра.

Залежності $\tilde{w}(\tilde{q}), \tilde{\vartheta}(\tilde{q}), \tilde{Q}(\tilde{q}), \tilde{M}(\tilde{q}), \tilde{\sigma}(\tilde{q})$ при фіксованому значенні координати η отримуються у результаті виконання наступних кроків. Спочатку за допомогою рівнянь (2.14) – (2.16) чисельно знаходимо залежність $\tilde{q}(\lambda)$. Далі з виразів для $\tilde{w}, \tilde{\vartheta}, \tilde{Q}, \tilde{M}$ (2.12) і $\tilde{\sigma}$ (2.21), перебираючи λ і враховуючи зв'язок $\tilde{q}(\lambda)$, одержуємо залежності $\tilde{w}(\tilde{q}), \tilde{\vartheta}(\tilde{q}), \tilde{Q}(\tilde{q}), \tilde{M}(\tilde{q}), \tilde{\sigma}(\tilde{q})$.

§3. Характерні (граничні) значення параметра кривизни.

Чисельний аналіз виразу \tilde{D} свідчить про те, що для кожного значення параметра кривизни \tilde{k} існує певне значення параметра внутрішнього зусилля λ_{\max} , для якого $\tilde{D}(\lambda) > 0$ при $\lambda < \lambda_{\max}$, $\tilde{D}(\lambda_{\max}) = 0$ і $\tilde{D}(\lambda) < 0$ при $\lambda > \lambda_{\max}$.

Значення параметра кривизни, для якого $\lambda_{\max} = \pi/2$, позначається $\tilde{k}_{\pi/2}$ і знаходиться з умови

$$\tilde{D}|_{\lambda=\pi/2} = 0. \quad (3.1)$$

Рівняння для визначення параметра $\tilde{k}_{\pi/2}$ має вигляд

$$S_5^2 - S_4^2 + 2S_1S_7 + 2S_4S_6 - S_1 \left(\frac{\pi^2}{4\tilde{N}_{\pi/2}^2} - \frac{\tilde{N}_{\pi/2}}{3\tilde{k}_{\pi/2}^2} - \frac{2}{3} \right) - S_2S_7 - S_3S_9 = 0, \quad (3.2)$$

де $\tilde{N}_{\pi/2} = -\pi^2 / (4 + \beta\pi^2)$.

Звідки знаходимо

$$\tilde{k}_{\pi/2} = \sqrt{\tilde{N}_{\pi/2} / 3 \left[\frac{\pi^2}{4\tilde{N}_{\pi/2}^2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{S_1} (S_5^2 + S_1S_7 + 2S_4S_6 - S_2S_7 - S_3S_9) \right]}. \quad (3.3)$$

Аналогічно з умови $\tilde{D}|_{\lambda=\pi} = 0$ визначаємо значення параметра кривизни \tilde{k}_{π} , для якого $\lambda_{\max} = \pi$:

$$\tilde{k}_{\pi} = \sqrt{\tilde{N}_{\pi} / 3 \left[\frac{\pi^2}{\tilde{N}_{\pi}^2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{S_2} (S_6 - S_5)^2 \right]}. \quad (3.4)$$

Тут $\tilde{N}_{\pi} = -\pi^2 / (1 + \beta\pi^2)$.

Отримані граничні значення $\tilde{k}_{\pi/2}$ і \tilde{k}_{π} розбивають область зміни параметра кривизни на три проміжки.

1) $0 < \tilde{k} < \tilde{k}_{\pi/2}$ ($0 < \lambda_{\max} < \pi/2$). В цьому проміжку залежність $\tilde{w}(\tilde{q})$ у вершині оболонки є монотонно зростаючою і існує тільки одна стійка симетрична форма рівноваги оболонки (втрати стійкості немає).

2) $\tilde{k}_{\pi/2} \leq \tilde{k} < \tilde{k}_{\pi}$ ($\pi/2 \leq \lambda_{\max} < \pi$). В цьому діапазоні залежність $\tilde{w}(\tilde{q})$ має точки максимуму і мінімуму (верхнє і нижнє критичні значення навантаження) та існують дві різні форми стійкої рівноваги оболонки, перехід між якими відбувається за рахунок хлопка.

3) $\tilde{k} \geq \tilde{k}_{\pi}$ ($\lambda_{\max} \geq \pi$). В цьому випадку можлива втрата стійкості оболонки за рахунок біфуркації з переходом до несиметричної форми рівноваги.

§4. Критичні значення навантаження.

Верхнє і нижнє критичні значення навантаження, які відповідають точкам максимуму та мінімуму залежності $\tilde{w}(\tilde{q})$ і при досягненні яких відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка, знаходяться з використанням рівняння (2.13) і умови

$$\frac{d\tilde{q}}{d\lambda} = 0. \quad (4.1)$$

В результаті диференціювання рівняння (2.13) з врахуванням умови (4.1) отримаємо:

$$\frac{dA}{d\lambda} \tilde{q}^2 + 2\tilde{q} \frac{dB}{d\lambda} + \frac{dC}{d\lambda} = 0, \quad (4.2)$$

де

$$\frac{dA}{d\lambda} = \frac{dS_1}{d\lambda} \sin^2 \lambda + S_1 \sin 2\lambda + \frac{dS_2}{d\lambda} \cos^2 \lambda - S_2 \sin 2\lambda + \frac{1}{2} \frac{dS_3}{d\lambda} \sin 2\lambda + S_3 \cos 2\lambda;$$

$$\frac{dB}{d\lambda} = \frac{dS_4}{d\lambda} \sin \lambda + S_4 \cos \lambda + \frac{dS_5}{d\lambda} \cos \lambda - S_5 \sin \lambda + \frac{dS_6}{d\lambda} \cos^2 \lambda - S_6 \sin 2\lambda;$$

$$\frac{dC}{d\lambda} = \frac{dS_7}{d\lambda} \sin^2 \lambda + S_7 \sin 2\lambda + \frac{dS_8}{d\lambda} \cos^2 \lambda - S_8 \sin 2\lambda + \frac{1}{2} \frac{dS_9}{d\lambda} \sin 2\lambda + S_9 \cos 2\lambda.$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.13) і (4.2), визначаємо значення \tilde{q} і λ , для яких виконується умова (4.1), тобто, знаходимо критичні точки, в яких відбувається втрата стійкості за рахунок хлопка.

§5. Часткові та граничні випадки.

1. Якщо $\tilde{N} = 0$, то розв'язувальне рівняння (1.18) набуває вигляду

$$\frac{d^4 \tilde{w}}{d\eta^4} = \tilde{q} \left\{ \beta \frac{d}{d\eta} [\delta(\eta + \xi) - \delta(\eta - \xi)] - H(\eta + \xi) + H(\eta - \xi) \right\}. \quad (5.1)$$

Інтегруючи послідовно рівняння (5.1) і задовольняючи граничні умови (1.15) та (1.16), приходимо до таких виразів для узагальнених переміщень, внутрішніх силових факторів і навантаження:

$$\begin{aligned} \tilde{w} = \tilde{q} & \left\{ H(\eta + \xi) \left[\frac{\beta(\eta + \xi)^2}{2} - \frac{(\eta + \xi)^4}{24} \right] - H(\eta - \xi) \left[\frac{\beta(\eta - \xi)^2}{2} - \frac{(\eta - \xi)^4}{24} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\xi \eta^3}{6} + \frac{\xi \eta^2}{2} + \left(\frac{\xi^3}{6} - \beta \xi \right) \eta + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi}{3} - \beta \xi \right\}; \\ \tilde{g} = \tilde{q} & \left[H(\eta + \xi) \frac{(\eta + \xi)^3}{6} - H(\eta - \xi) \frac{(\eta - \xi)^3}{6} - \frac{\xi \eta^2}{2} - \xi \eta - \frac{\xi^3}{6} \right]; \\ \tilde{M} = \tilde{q} & \left[H(\eta + \xi) \frac{(\eta + \xi)^2}{2} - H(\eta - \xi) \frac{(\eta - \xi)^2}{2} - \xi \eta - \xi \right]; \\ \tilde{Q} = \tilde{q} & [H(\eta + \xi)(\eta + \xi) - H(\eta - \xi)(\eta - \xi) - \xi]; \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\tilde{q}_1 = 0; \quad \tilde{q}_2 = \frac{21[25 - 10\xi^2 + \xi^4 + 20\beta(3 - \xi^2)]}{4\xi[42 - 35\xi^2 + 14\xi^4 - 4\xi^5 + 42\beta(5 - 5\xi^2 + 2\xi^3) + 105\beta^2(3 - 2\xi)]}.$$

Зазначимо, що співвідношення (5.2) можна також одержати з формул (2.12) і (2.15), перейшовши в них до границь при $\lambda \rightarrow 0$.

2. Якщо $\xi = 1$ і $-1 \leq \eta \leq 1$, то $H(\eta + \xi) = 1$ та $H(\eta - \xi) = 0$. В результаті маємо випадок, коли оболонка навантажена по всій поверхні рівномірним тиском q (рис. 2).

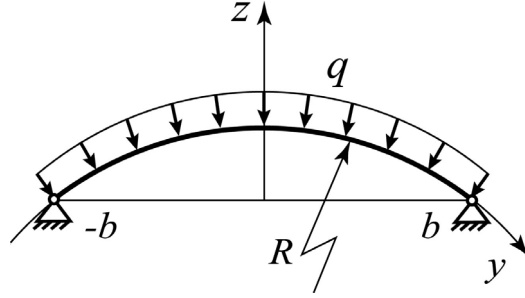


Рис. 2

З формул (2.12) отримаємо такі співвідношення для узагальнених переміщень і внутрішніх силових факторів:

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \left(1 + \frac{\tilde{q}}{\tilde{N}}\right) \left(\frac{\eta^2 - 1}{2} + \frac{1}{\tilde{N}} - \frac{\cos \lambda \eta}{\tilde{N} \cos \lambda}\right); & \tilde{g} &= \left(1 + \frac{\tilde{q}}{\tilde{N}}\right) \left(\frac{\sin \lambda \eta}{\lambda \cos \lambda} - \eta\right); \\ \tilde{M} &= \left(1 + \frac{\tilde{q}}{\tilde{N}}\right) \left(\frac{\cos \lambda \eta}{\cos \lambda} - 1\right); & \tilde{Q} &= -\frac{\lambda \sin \lambda \eta}{\cos \lambda} \left(1 + \frac{\tilde{q}}{\tilde{N}}\right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

3. Якщо $\xi \rightarrow 0$, то $[H(\eta + \xi) - H(\eta - \xi)] / 2\xi \rightarrow \delta(\eta)$ і $2\xi\tilde{q} \rightarrow \tilde{P}$, де $\tilde{P} = Pb / kD_M$. Перейшовши у формулах (2.12) до границь при $\xi \rightarrow 0$, дістанемо відповідні співвідношення для довгої циліндричної панелі, яка навантажена у вершині рівномірно розподіленою вздовж твірної поперечною силою P (рис. 3):

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{1}{\tilde{N}} - \frac{\cos \lambda \eta}{\tilde{N} \cos \lambda} + \frac{\eta^2 - 1}{2} + \frac{\tilde{P}}{\tilde{N}^2} \left[H(\eta)(\tilde{N}\eta + \lambda \sin \lambda \eta) - \frac{(1 + \eta)\tilde{N}}{2} - \frac{\lambda \sin \lambda(1 + \eta)}{2 \cos \lambda} \right]; \\ \tilde{g} &= -\eta + \frac{\sin \lambda \eta}{\lambda \cos \lambda} - \frac{\tilde{P}}{\tilde{N}} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\cos \lambda(1 + \eta)}{2 \cos \lambda} - H(\eta)(\cos \lambda \eta - 1) \right]; \\ \tilde{M} &= -1 + \frac{\cos \lambda \eta}{\cos \lambda} + \frac{\lambda \tilde{P}}{\tilde{N}} \left[\frac{\sin \lambda(1 + \eta)}{2 \cos \lambda} - H(\eta) \sin \lambda \eta \right]; \\ \tilde{Q} &= -\frac{\lambda \sin \lambda \eta}{\cos \lambda} + \frac{\lambda^2 \tilde{P}}{\tilde{N}} \left[\frac{\cos \lambda(1 + \eta)}{2 \cos \lambda} - H(\eta) \cos \lambda \eta \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

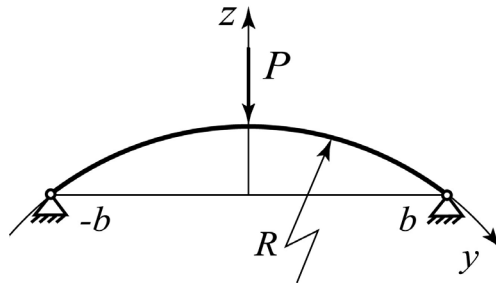


Рис. 3

4. Якщо значення параметра $\beta = 0$, то за отриманими вище формулами обчислюються величини узагальнених переміщень, внутрішніх силових факторів і навантаження для оболонки Кірхгофа – Лява.

§6. Числові результати та їх аналіз.

На основі отриманого точного аналітичного розв'язку геометрично нелінійної задачі (1.13) – (1.16) дослідимо НДС і стійкість податливої на поперечний зсув довгої незамкненої циліндричної оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями при дії кусково-рівномірного нормального тиску, прикладеного з боку опуклості оболонки.

Оболонка виготовлена з трансверсально-ізотропного матеріалу з такими фізико-механічними параметрами:

$$E = 38,4 \text{ ГПа}; G_{yz} = 0,2 \text{ ГПа}; \nu = 0,2; m = 5/6; \beta = 0,139.$$

Для випадку, коли рівномірний тиск розподілений по нескінченно довгій смузі шириною $2a = b$ ($\xi = 0,5$), значення граничних параметрів кривизни дорівнюють: $\tilde{k}_{\pi/2} = 0,986$ і $\tilde{k}_{\pi} = 1,868$.

З використанням співвідношень (2.14) – (2.16) отримано залежність навантаження \tilde{q} від параметра внутрішнього зусилля λ для трьох значень кривизни \tilde{k} . Результати розрахунків наведено на рис. 4, де штрихова лінія відповідає граничному значенню кривизни $\tilde{k}_{\pi/2} = 0,986$, а суцільні – значенням $\tilde{k} = 0,686$ і $\tilde{k} = 1,586$.

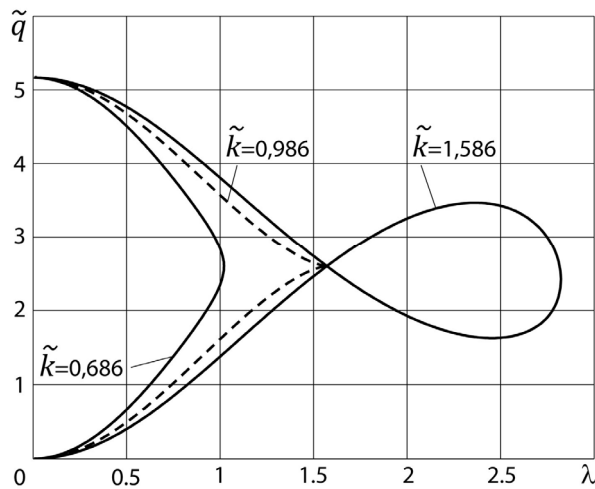


Рис. 4

Аналізуючи вираз для \tilde{D} (2.16) і наведені на рис. 4 результати, можна зробити висновок, що графіки функції $\tilde{q}(\lambda)$ мають дві гілки, кожна з яких відповідає розв'язку квадратного рівняння (2.13). Також варто зазначити, що для $\tilde{k} \geq \tilde{k}_{\pi/2}$ графіки перетинаються в одній точці $\lambda = \pi/2$, а величина навантаження в цій точці не залежить від геометричного параметра \tilde{k} і дорівнює $\tilde{q} = \pi^2 / [(4 + \beta\pi^2) \sin(\pi\xi / 2)]$.

На рис. 5 показано залежність прогину у вершині панелі від навантаження для тих самих значень параметра кривизни, що й на рис. 4. З представлених на рис. 5 даних випливає, що для $\tilde{k} < \tilde{k}_{\pi/2}$ залежність $\tilde{w}|_{\eta=0}(\tilde{q})$ є монотонно зростаючою кривою, для $\tilde{k} > \tilde{k}_{\pi/2}$ графік залежності має точки максимуму і мінімуму, для $\tilde{k} = \tilde{k}_{\pi/2}$ залежність не має максимумів і мінімумів, а тільки точку перегину з дотичною до кривої $\tilde{w}(\tilde{q})$, паралельною вісі $O\tilde{w}$.

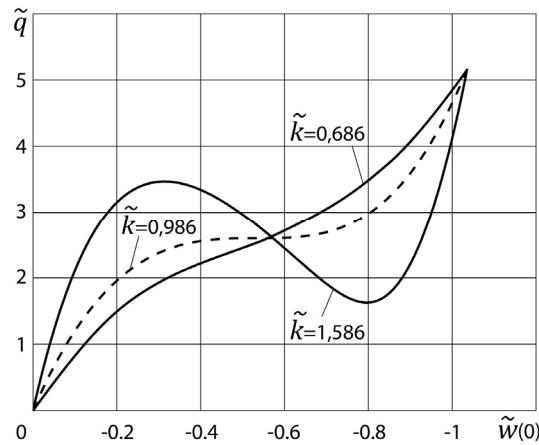


Рис. 5

Пунктирна крива, яка відповідає граничному значенню кривизни $\tilde{k}_{\pi/2}$, розділяє два різних типи деформування оболонки при статичному навантаженні. При $\tilde{k} < \tilde{k}_{\pi/2}$ існує лише одна форма стійкої рівноваги оболонки, а при $\tilde{k} > \tilde{k}_{\pi/2}$ існують дві несуміжні форми стійкої рівноваги, перехід між якими відбувається за рахунок хлопка.

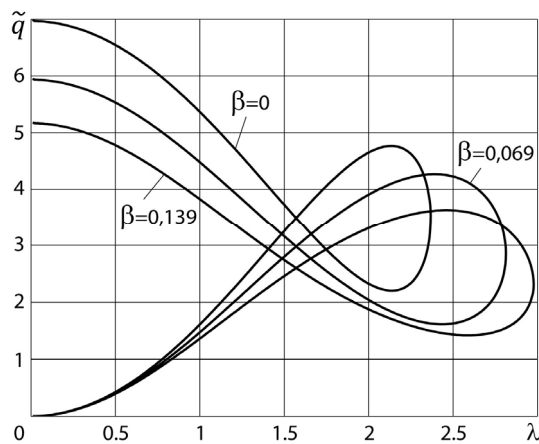


Рис. 6

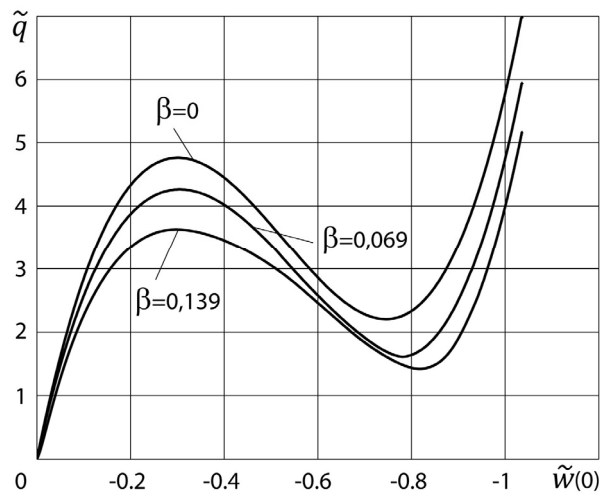


Рис. 7

Вплив параметра поперечного зсуву β на деформування оболонки показано на рис. 6, 7. Результати наведені для трьох значень параметра зсуву $\beta = 0; 0,069; 0,139$ оболонки з кривизною $\tilde{k} = 1,7$.

З представлених даних випливає, що врахування деформацій поперечного зсуву ($\beta \neq 0$) призводить до зменшення значень верхніх і нижніх критичних навантажень в порівнянні з результатами розрахунків для моделі Кірхгофа – Лява ($\beta = 0$). Так, для $\beta = 0,069$ зменшення складає 10,5% і 26,6% , а для $\beta = 0,139$ – 23,8% і 35,5%.

Висновки.

В роботі побудовано аналітичні розв’язки крайових задач для нескінченно довгої трансверсально-ізотропної циліндричної оболонки з врахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву, які дозволяють обчислити точні значення внутрішніх силових факторів і узагальнених переміщень даної оболонки, оцінити її міцність, жорсткість і стійкість за дії статичного кусково-рівномірного навантаження. Як частинні або граничні випадки, з отриманих розв’язків впливають відповідні результати для моделі Кірхгофа – Лява, а також для оболонки, навантаженої рівномірним тиском або рівномірною поперечною силою. Наведені розв’язки також можуть бути еталонними для наближених і чисельних методів. В подальшому представляє інтерес аналітичне дослідження НДС композитної циліндричної оболонки з врахуванням фізичної нелінійності та особливостей її деформування [13].

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Дано постановку та отримано точний розв’язок геометрично нелінійної задачі для податливої на поперечний зсув довгої циліндричної оболонки при дії локального статичного навантаження. Основні рівняння записані згідно з геометрично нелінійною теорією пологих оболонок в квадратичному наближенні, гіпотезою Тимошенка і законом Гука. Конкретні результати отримано з використанням узагальнених функцій для оболонки з шарнірно закріпленими поздовжніми краями, навантаженої кусково-рівномірним тиском.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: довга циліндрична оболонка, геометрична нелінійність, поперечний зсув, локальне навантаження, точний розв’язок, узагальнені функції.

1. Корнишин М.С., Муштару Х.М. Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального равномерного давления // Изв. Казанского филиала АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук. – 1955. – № 7. – С. 36 – 50.
2. Марчук М.В., Тучапский Р.И., Пакош В.С. Исследование деформирования гибких длинных пологих некруговых цилиндрических панелей с защемленными продольными краями на основе уточненной теории // Механика машин, механизмов и материалов. – 2015. – **33**, № 4. – С. 59 – 69.
3. Al-Hassani S.T.S., Darvizeh M., Haftchenari H. An analytical study of buckling of composite tubes with various boundary conditions // Compos. Struct. – 1997. – **39**, N 1-2. – P. 157 – 164.
4. Birman V., Magid M.G. Closed-form solutions of static and dynamic problems of long composite cylindrical shells // Composites Engineering. – 1991. – **1**, N 4. – P. 225 – 233.
5. Carper D.M., Hyer M.W., Johnson E.R. Large deformation behavior of long shallow cylindrical composite panels. Report No. VPI-E-83-37. – Blacksburg: Virginia Polytechnic Inst. and State Univ., 1983. – 171 p.
6. Chen Y.N., Kempner J. Buckling of oval cylindrical shell under compression and asymmetric bending // AIAA J. – 1976. – **14**, N 9. – P. 1235 – 1240.
7. Grigorenko Ya.M., Kharitonova L.V. To Determination of Critical Values of the Load under Deformation of Flexible Non-Circular Cylindrical Shells with Rigidly Fixed Edges // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 11. – P. 1278 – 1287.
8. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Elastoplastic State of Flexible Cylindrical Shells with Two Circular Holes // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 10. – P. 1152 – 1156.
9. Hosseini-Hashemi S., Abaei A.R., Ilkhani M.R. Free vibrations of functionally graded viscoelastic cylindrical panel under various boundary conditions // Compos. Struct. – 2015. – **126**. – P. 1 – 15.
10. Karpov V.V., Semenov A.A. Dimensionless parameters in the theory of reinforced shells // Vestn. Perm. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh. – 2015. – N 3. – P. 74 – 94.
11. Kerr A.D., Soifer M.T. The linearization of the prebuckling state and its effect on the determined instability loads // ASME J. Appl. Mech. – 1969. – **36**, N 4. – P. 775 – 783.
12. Kiseleva T.A., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P. Comparison of scalar and vector FEM forms in the case of an elliptic cylinder // J. Comput. Math. Math. Phys. – 2015. – **55**, N 3. – P. 422 – 431.
13. Maksimyyuk V.A. Solution of Physically Nonlinear Problems of the Theory of Orthotropic Shells Using Mixed Functionals // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 10. – P. 1349 – 1354.
14. Power T.L., Kyriakides S. Localization and propagation of instabilities in long shallow panels under external pressure // ASME J. Appl. Mech. – 1994. – **61**, N 4. – P. 755 – 763.
15. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. – Boca Raton: CRC Press LLC, 2004. – 831 p.
16. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Yatsura A.V. Stress-Strain State Near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 559 – 567.
17. Storozhuk E.A., Maksimyyuk V.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Elastic State of a Composite Cylindrical Shell with a Rectangular Hole // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 5. – P. 504 – 514.
18. Storozhuk E.A., Yatsura, A.V. Analytical-Numerical Solution of Static Problems for Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 313 – 325.
19. Storozhuk E.A., Yatsura, A.V. Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 386 – 397.
20. Yang J.L., Zhang Y., Zhang Z.M. Nonlinear stability analysis of infinitely long laminated cylindrical shallow shells including shear deformation under lateral pressure // Int. J. Mech. Sci. – 1992. – **34**, N 5. – P. 345 – 354.

Надійшла 10.11.2020

Затверджена до друку 24.06.2021