

І. К. Валєєва

## АДГЕЗІЙНИЙ КОНТАКТ ТІЛ З ВИКРИВЛЕНОЮ ШОРСТКОЮ ПОВЕРХНЕЮ

*Інститут проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАНУ,  
вул. Кржижанівського, 3, Київ, Україна; e-mail: valeeva@meta.ua*

**Abstract.** The model of normal adhesive contact between elastic bodies with stochastic surface roughness is considered. The roughness is simulated by the Winkler-Fuss nonlinear layer, which can resist the compressive and tensile (in the case of adhesion) contact stresses. The mechanical properties of the layer are determined by the statistical theories of adhesive contact between the nominally plane rough surfaces. The contact of solids is described by the nonlinear boundary integral equations with non-monotonic operators. Their solutions determine the reduction of effective thickness of the rough layer, contact stresses, contact region, and adhesion force. The formulas for the adhesion force calculation are presented for the most frequent nominal gap between the solids in contact.

**Key words:** adhesive interaction, contact of rough solids, adhesion force.

### Вступ.

Урахування адгезійної взаємодії важливо при вивченні об'єктів малих розмірів з використанням малих сил. Тому важливими є дослідження, що дозволяють оцінювати і прогнозувати адгезійну взаємодію, вивчати фактори, що впливають на адгезійний контакт [1 – 9, 12, 14], виробляти рекомендації для створення поверхонь з контрольованою адгезією.

Для теоретичної оцінки адгезійної взаємодії дослідники зазвичай користуються моделями адгезії гладких пружних тіл [3, 5, 6, 10 – 12, 14], або моделями адгезійної взаємодії між плоскими шорсткими плитами [3, 6, 9, 12, 14]. А при необхідності теоретичної оцінки адгезійної взаємодії шорстких тіл з викривленою номінальною поверхнею використовуються спрощені моделі, які можуть давати істотну похибку [7].

Метою цього дослідження є вивчення адгезійного контакту між шорсткими тілами з викривленою номінальною геометрією поверхні. Контакт тіл моделюється нелінійними граничними інтегральними рівняннями (ГІР), розв'язки яких описують розподіл номінальних контактних напружень, номінальні області контакту, залежність нормальної сили  $P$ , що здавлює контактуючі тіла від їх зближення  $\delta$ . Запропоновано чисельний метод розв'язання ГІР, дана його реалізація на прикладах нормального контакту. Залежність  $P(\delta)$  не є монотонною через наявність сил адгезійної взаємодії і сила адгезії визначається як мінімум залежності  $P(\delta)$ . Найчастіше зустрічається випадок номінальної геометрії контактуючих тіл, що відповідає параболічному зазору між тілами, які утворюють пару тертя. Тому інтерес представляє оцінка величини сили адгезії при контакті таких тіл за допомогою простих формул, а також визначення факторів, що впливають на величину сили адгезії, яку також називають силою відриву.

У роботі отримані формули для визначення сили адгезії для випадку параболічного зазору між контактуючими тілами при DMT-контактах (Derjaguin – Muller – Torogov [3, 5, 14]) нерівностей (тверді тіла, малі радіуси кривизни вершин нерівностей, низька енергія адгезії [14]).

### §1. Рівняння моделі контакту шорстких пружних тіл.

У роботі [4], присвяченій вивченню природи тертя і зносу, сформульовані попередні припущення, які враховуються при дослідженні пружного контакту, а саме: модель шорсткої поверхні складається зі сферичних сегментів, які розташовані на різній висоті; сусідні контакти не впливають один на одного. У роботі шорсткість моделюється пружним нелінійним шаром Вінклера – Фусса [1, 7], який сприймає як стиск, так і розтяг (внаслідок адгезії). Іншими словами, поверхнева шорсткість розглядається як поверхневий шар матеріалу з механічними властивостями, відмінними від об'ємних властивостей. Стохастичні моделі такого шару ґрунтуються на теоріях адгезійного контакту окремих нерівностей – JKR (Johnson – Kendall – Roberts [11, 14]), DMT, або узагальнюючої їх теорії Можі [14].

#### 1.1. Контактний тиск між номінально плоскими шорсткими поверхнями.

Контакт двох пружних напівпросторів, обмежених номінально плоскими шорсткими поверхнями, може бути замінений, при певних обмеженнях, контактом жорсткої гладкої плоскої поверхні  $z = t_a$  і пружного напівпростору  $z \leq 0$ , який обмежений деякою умовною номінально плоскою шорсткою поверхнею [3, 14]. Приведений модуль пружності задається формулою  $E^* = \left( (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2 \right)^{-1}$ , де  $E_1, E_2$  і  $\nu_1, \nu_2$  – модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона матеріалів шорстких контактуючих тіл, відповідно.

Припускається, що всі вершини умовних нерівностей номінальної шорсткої площини мають однаковий (ефективний) радіус кривизни  $R$  і рівномірно розподілені у площині зі щільністю  $\eta_s$ .  $R = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1}$  – радіус кривизни умовних нерівностей [3] ( $R_1, R_2$  – радіуси кривизни нерівностей границь вихідних пружних напівпросторів);  $w = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12}$  – робота адгезії. Функція  $\varphi_S(z) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-z^2/2\sigma^2)$  є щільністю ймовірності для гауссового розподілу висот вершин нерівностей зі стандартним відхиленням  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  (rms). Тут  $\sigma_1, \sigma_2$  – стандартні відхилення висот нерівностей шорстких границь початкових напівпросторів, що мають гауссовий розподіл. Більш детально основні елементи статистичної теорії номінально плоских шорстких поверхонь і їх адгезійного контакту описано у роботах [3, 9, 14].

Відповідно до [6, 12, 14] номінальний контактний тиск між номінально плоскими шорсткими поверхнями при гауссовому розподілі висот вершин нерівностей представляється у вигляді

$$p_f(d) = \frac{\eta_s P_c}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{d-\delta_p}^{\infty} g\left(\frac{\delta}{\delta_c}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz = \eta_s P_c p^*, \quad \delta = z - d, \quad (1.1)$$

де  $p^* = p / (h_s P_c)$  – безрозмірний номінальний контактний тиск. Величини  $P_c = 1,5\pi w R$  і  $\delta_c = 3/4 \left( (\pi^2 w^2 R) / (E^{*2}) \right)^{1/3}$  приймаються як характерні масштаби при малих навантаженнях  $P$  і зближеннях  $\delta$  пар, що контактують. Прийняті тут величини мають простий механічний зміст у JKR-теорії:  $P_c$  і  $\delta_c$  є точними абсолютними величинами сили відриву і мінімальної величини переміщення, відповідно. Ці масштаби може бути вибрано довільно, використовуючи визначальні параметри  $E^*$ ,  $w$  і  $R$ . Функціональна залежність  $P_i / P_c = g(\delta_i / \delta_c)$  для окремої нерівності визначається адгезійними теоріями гладких пружних тіл [14]. Наприклад, у DMT-теорії адгезійного контакту для окремих нерівностей функція  $g$  представляється у вигляді  $g(\delta_i / \delta_c) = (\delta_i / \delta_c)^{3/2} / \sqrt{3} - 4/3$ ,  $\delta_i \geq 0$ , а у JKR-теорії і узагальнюючій теорії Можі задається

неввно (див. [14]). Прийнято також наступні визначення:  $\delta_p$  – абсолютна величина мінімального переміщення нерівності для конкретної залежності  $P_i / P_c = g(\delta_i / \delta_c)$ , що розглядається. У JKR-теорії [11, 14]  $\delta_p = \delta_c$  контакту, у DMT-теорії  $\delta_p = 0$  [5, 14].  $|d|$  – відстань між границею жорсткого тіла  $z = d$  і номінальною границею пружного напівпростору  $z = 0$ . Для  $d \geq t_a$  адгезійна взаємодія дуже мала і нею можна знехтувати. Негативні значення  $d$  відповідають положенню номінальної границі жорсткого тіла нижче  $z = 0$ .

Шорсткість розглядається як шар Вінклера – Фусса, механічні властивості якого характеризуються залежністю номінального тиску, що діє на нього, від переміщення  $\Delta$  (обтиску шорсткого шару). У DMT-теорії адгезійного контакту окремих нерівностей механічні властивості нелінійного шару Вінклера – Фусса описуються функцією [8, 14]

$$p(\Delta) = \begin{cases} \frac{\eta_S P_c}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sigma}{\delta_c} \right)^{3/2} F_{3/2}(d^*) - \frac{4}{3} \eta_S P_c F_0(d^*), & \Delta > 0; \\ 0, & \Delta \leq 0; \end{cases} \quad (1.2)$$

де

$$d^* = \frac{t_a - \Delta}{\sigma}; \quad F_n(d^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^n \exp\left[-\frac{1}{2}(t + d^*)^2\right] dt.$$

Прийнято, що  $p > 0$  відповідає стиску, а  $p < 0$  – розтягу шару. Величину  $\Delta$  можна розглядати як обтиснення шорсткого шару. Величина  $t_a$  обирається, виходячи з того, що при  $d \geq t_a$  або  $\Delta \leq 0$  адгезійною взаємодією можна знехтувати, і можна вважати, що  $p_f(d) = 0$ . Наприклад, при DMT-контактах нерівностей, якщо виконуються умова  $0,2 \leq \delta_c / \sigma \leq 3$ , можна вибрати  $t_a = 3\sigma$  [14].

Залежність (1.2) визначається геометричними параметрами шорсткості, матеріалами контактуючих тіл і їх адгезійними властивостями. Повна карта областей адекватності різних моделей контакту матеріалам контактуючих пар гладких тіл запропонована в [13].

**1.2 Граничні рівняння контактної задачі для шорстких пружних тіл.** Контакт двох шорстких пружних тіл, обмежених кривими номінальними поверхнями, без втрати загальності може бути замінено контактом абсолютно жорсткого гладкого тіла і шорсткого пружного напівпростору [3, 14]. Схема індентування гладкого жорсткого тіла у шорсткий пружний напівпростір  $x_3 \geq 0$  представлена на рис. 1.

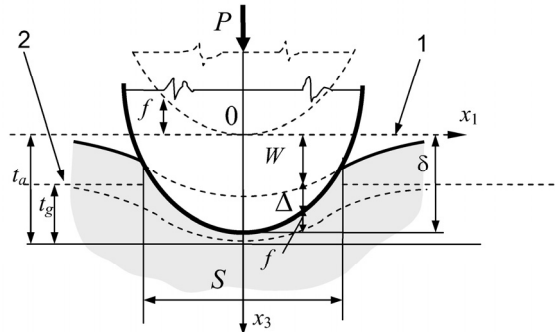


Рис. 1

Прийнято наступні позначення:  $P$  – сила, що вдавлює тіло у напівпростір;  $\delta$  – зближення контактуючих тіл (глибина індентування); умовна межа адгезійної взаємодії на рис. 1 представлена лінією 1, а умовна межа шорсткої поверхні – лінією 2;  $f$  – номінальний зазор між тілом і умовною межею адгезійної взаємодії  $x_3 = 0$  перед деформацією;  $W$  – нормальне (в напрямку осі  $x_3$ ) пружне переміщення границі напівпростору  $x_3 = 0$ , що викликане силою  $P$ ;  $S$  – номінальна область контакту;  $t_g$  – умовна геометрична напівтовщина шорсткого шару;  $t_a$  – відстань між умовною межею адгезійної взаємодії і віссю  $x$ ,  $t_a \geq t_g$  (при  $d \geq t_a$  взаємодією (умовних) тіл, що контактують, можна знехтувати, величина  $t_a$  залежить від величини  $d_c / \sigma$ ) [7, 8]. Якщо адгезії немає, то  $t_a = t_g$ ;  $\Delta$  – зменшення (обтиснення) шорсткого шару після деформації,  $\Delta \geq 0$  (на рис. 1 величина  $(-\Delta)$  є переміщенням гладкої площини з положення  $z = t_a$ ). Переміщення  $W$  визначається формулою [3]

$$W(x) = \theta \int_S K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}; \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2); \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in S,$$

де  $\theta = (\pi E^*)^{-1}$ ;  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{-1/2}$ .

Для тіл з викривленою номінальною поверхнею нормальний контакт моделюється нелінійними граничними інтегральними рівняннями. Контактна задача може бути зведена до дослідження одного рівняння типу Гаммерштейна [1, 7, 8] з параметром  $\delta$

$$u(x) + \theta \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(u(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = \delta - f(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2); \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega, \quad (1.3)$$

де  $u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  – єдина невідома функція,  $\Omega$  – довільна область, яка містить номінальну область контакту  $S$ .

**1.3. Безрозмірне формулювання контактної задачі.** У разі, коли зазор  $f(\mathbf{x}) = A|\mathbf{x}|^k$ ,  $k \geq 1$ , можна перейти до безрозмірного формулювання контактної задачі [1, 7, 8]. У безрозмірних величинах  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02})$ ;  $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02})$ ;  $U$ ,  $\delta_0$ ,  $p_0$ ,  $\Omega_0$ :

$$\mathbf{x}_0 = (A/\delta)^{1/k} \mathbf{x}; \quad \mathbf{y}_0 = (A/\delta)^{1/k} \mathbf{y}; \quad U(\mathbf{x}_0) = u\left(\mathbf{x}_0 (\delta/A)^{1/k}\right) \delta^{-1}; \quad \delta_0 = \delta/\delta_c;$$

$$p_0(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)) = \theta \delta_c^{(1-k)/k} A^{-1/k} p(\delta U(\mathbf{x}_0)) = \kappa p^*(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)); \quad \kappa = \theta \delta_c^{(1-k)/k} A^{-1/k} \eta_S P_c \quad (1.4)$$

нелінійне інтегральне рівняння контактної задачі (1.3) набуває вигляду:

$$U(\mathbf{x}_0) + \delta_0^{(1-k)/k} \int_{\Omega_0} K(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) p_0(\delta_0 U(\mathbf{y}_0)) d\mathbf{y}_0 = 1 - |\mathbf{x}_0|^k; \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \Omega_0, \quad (1.5)$$

де  $U(\mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_0$  – невідома безрозмірна функція, що залежить від безрозмірного параметра  $\delta_0$ ;  $\Omega_0 = (|x_{01}| \leq 1 + \varepsilon; |x_{02}| \leq 1 + \varepsilon)$  і величина  $\varepsilon > 0$  вибираються так, щоб виконувалося включення  $S_0 = \{\mathbf{x}_0 : U(\mathbf{x}_0) > 0\} \subseteq \Omega_0$ , де  $S_0$  – безрозмірна область контакту; функція  $p^*(\cdot)$  визначається формулою (1.2). Основними безрозмірними параметрами задачі нормального контакту (1.5) є параметр шорсткості  $\delta_c^*$ ,  $\delta_0$  і  $\kappa = \theta \delta_c^{(1-k)/k} A^{-1/k} \eta_S P_c$ .

Для дискретизації рівняння (1.5) застосовується метод колокації і дискретне рівняння розв'язується модифікованим методом Ньютона, аналогічно [7].

Знаючи розв'язок  $U(\mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_0$  рівняння (1.5) можна отримати всі характеристики контакту тіл: зменшення ефективної товщини шорсткого шару  $\Delta(\mathbf{x})$ , контактні напруження  $p(\mathbf{x})$ , область контакту  $S$ , залежність сили  $P$ , що прикладена до тіл, від їх зближення  $\delta$ , силу адгезії  $F$ . Сила  $P$  представляється у вигляді [1, 8]

$$P = \int_{\Omega} p(u(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \pi E^* \delta_c^{(1+k)/k} A^{-1/k} P_0;$$

$$P_0 = \delta_0^{2/k} \int_{\Omega_0} p_0(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{x}_0 = \eta_S P_c \delta_0^{2/k} \int_{\Omega_0} p^*(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{x}_0. \quad (1.6)$$

## §2. Результати розрахунку і їх аналіз.

Розглянемо осесиметричну задачу, коли номінальний зазор між тілами до деформації визначається функцією  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}^2$ . Аналізується випадок контакту шорсткого напівпростору з твердим тілом, обмеженим сферичною шорсткою поверхнею номінального радіусу  $R_S$  (тобто  $k = 2$ ,  $A = (2R_S)^{-1}$ ), коли величина безрозмірного параметру  $\kappa = 0,255$  (див. (1.4)). Контакт окремих нерівностей описується DMT-теорією адгезійної взаємодії. У цьому випадку механічні властивості шару Вінклера – Фусса описуються функцією (1.2).

Контакт тіл моделюється нелінійними граничними інтегральними рівняннями (1.3) або у безрозмірному вигляді (1.5). У рівнянні (1.5) використовуються безрозмірні залежності (1.4):  $p_0(\Delta_0) = \kappa p^*(\Delta_0)$ , де  $\Delta_0 = \delta_0 U(\mathbf{x}_0)$ . Графіки функцій  $p^*(\Delta_0)$  при DMT-контактах нерівностей представлені на рис. 2 при  $\delta_c^* = 0, 2; 0, 4; 0, 6; 1; 2; 10$  відповідно лініями 1 – 6. Розв'язки рівняння (1.5) визначають зміну ефективної товщини шорсткого шару при його деформації, розподіл номінального контактного тиску, номінальну область контакту, залежність нормальної сили  $P$  від зближення тіл (див. (1.4)).

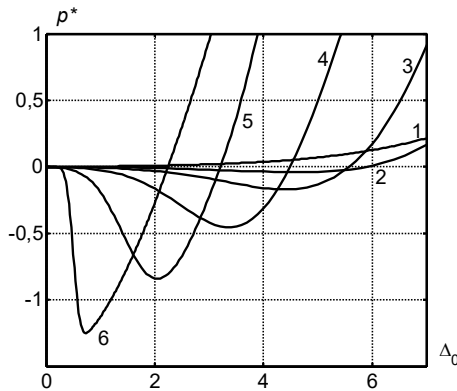


Рис. 2

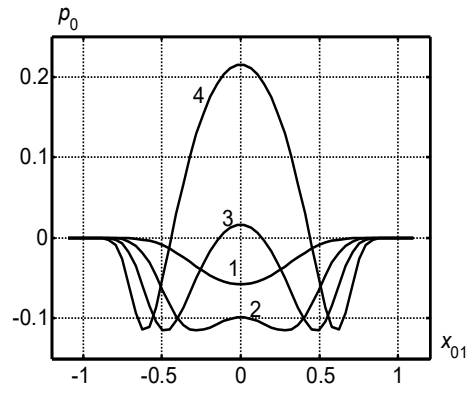


Рис. 3

Результати розрахунків для нормального контакту з параболічним зазором представлені на рис. 3 для наступних контактних параметрів  $\kappa = 0,255$ ,  $\delta_c^* = 1$ . Графіки залежності номінального контактного тиску  $p_0(\mathbf{x}_0)$  від координати при  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, 0)$  представлені на рис. 3 для зближень  $\delta_0 = \delta/\delta_c = 4; 5; 6; 8$  лініями 1 – 4 відповідно. При малих значеннях  $\delta_0$  контактний тиск (рис. 3) негативний в усій області контакту, що відповідає номінальним розтягуючим напруженням, які є наслідком адгезії. При зростанні  $\delta_0$  розтяг виникає лише поблизу межі області контакту.

Надаючи величині  $\delta_0$  різні значення і розв'язуючи рівняння (1.5), чисельно будуються функціональні залежності, що визначають зв'язок контактних характеристик: нормальної сили  $P_0$  зі зближенням тіл  $\delta_0$ . Перехід до розмірних змінних здійснюється за формулами (1.4) і (1.6). При адгезійному контакті залежності  $P_0(\delta_0)$  і, відповідно, залежності  $P(\delta)$  не є монотонними, і тому система (1.3) або (1.5) може мати неєдиний розв'язок при заданій силі  $P$ . Негативні значення навантаження при малих зближеннях обумовлені впливом адгезії, а мінімум функції  $F_0 = \min_{\delta_0} P_0$  дорівнює безрозмірній силі адгезії (силі відриву).

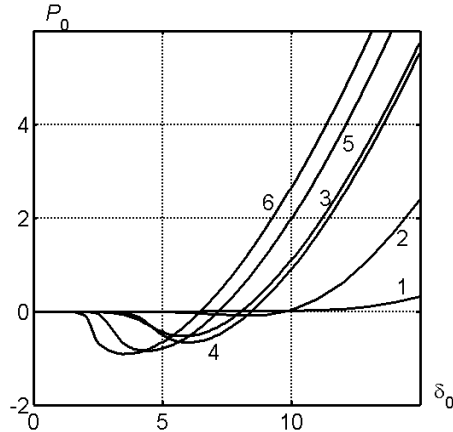


Рис. 4

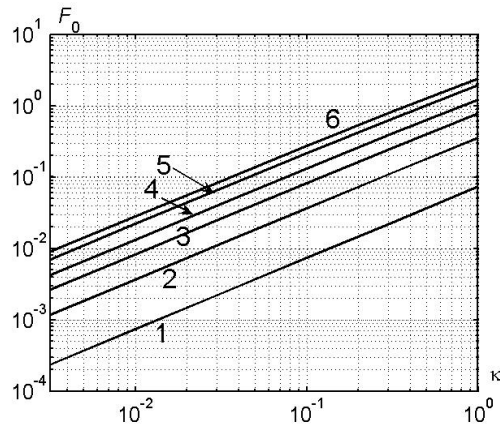


Рис. 5

Залежності безрозмірної нормальної сили  $P_0$  від безрозмірного зближення  $\delta_0$  представлено на рис. 4 при різних величинах  $\delta_c/\sigma = \delta_c^* = 0, 2; 0, 4; 0, 8; 1; 1, 5; 2$  лініями 1 – 6 відповідно. Відзначимо, що величина  $\delta_c^*$  пов'язана з параметром адгезії Тейбора  $\theta_a$  співвідношенням  $\theta_a = 9\pi/(8\sqrt{3}\delta_c^{*3/2})$  [6].

Представлено графіки залежностей безрозмірної сили адгезії  $F_0 = -\min_{\delta_0} P_0(\delta_0)$  від параметру  $\kappa$  при різних значеннях параметру шорсткості  $\delta_c/\sigma = \delta_c^* = 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 8; 1$  (рис. 5) лініями 1 – 6 відповідно, що базуються на результатах інтенсивного комп'ютерного моделювання.

Формулу  $F_0 = 3,99\kappa^{0,982}0,622^t$ ,  $t = (\sigma/\delta_c)^{1,78}$  для оцінки безрозмірної сили адгезії отримано на основі результатів великої кількості чисельних експериментів з моделювання адгезійного контакту. Оцінка проводилася методом найменших квадратів для параметрів в діапазоні значень  $\delta_c^* \geq 0,2$  і  $0,3 \cdot 10^{-3} \leq \kappa \leq 3$ . Перехід до розмірних змінних здійснюється за формулою (1.6) і силу адгезії можна визначати за формулою

$$F = 3,99\pi E^* \delta_c^{3/2} A^{-1/2} \kappa^{0,982} 0,622^t, \quad t = (\sigma/\delta_c)^{1,78} = (1/\delta_c^*)^{1,78}. \quad (2.1)$$

Формулу (2.1) можна привести до вигляду  $F = 25,6wR^{1/2} A^{-1/2} \kappa^{0,982} 0,622^t$ .

Враховуючи, що  $\kappa^{0,982} \approx \kappa$ , для оцінки сили адгезії можна застосувати формулу

$$F = 4,21\eta_S P_c \delta_c A^{-1} 0,622^t = 31,9\eta_S w^{5/3} R^{4/3} E^{*-2/3} A^{-1} 0,622^t. \quad (2.2)$$

### §3. Приклад адгезійного контакту і оцінки сили адгезії.

Розглядається контакт шорсткого сферичного наконечника з аморфного вуглецю (модуль Юнга  $E_1 = 348$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu_1 = 0,33$ ) з гладкою поверхнею ал-

мазного напівпростору (модуль Юнга  $E_2 = 1330$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu_2 = 0,11$ ). Деталі експериментів і моделювання контакту сферичного індентора з аморфного вуглецю з алмазною поверхнею методом молекулярної динаміки представлено у роботах [10, 15]. Приведений модуль пружності

$$E^* = \left( \frac{(1-0,33^2)}{348} + \frac{(1-0,11^2)}{1330} \right)^{-1} = 303 \text{ ГПа};$$

$$\theta = (303 \cdot 10^9 \pi)^{-1} = 1,05 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \text{ Н}^{-1};$$

робота адгезії  $w = 0,3 \text{ Дж м}^{-2}$ ; рівноважна відстань між плоскими поверхнями  $z_0 = 0,19 \text{ нм}$  [15].

Радіус сферичного наконечника  $R_S = 150 \text{ нм}$ . Тоді  $k = 2$ ,  $A = (2R_S)^{-1} = 3,33 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$ . Параметри шорсткості поверхні  $\sigma = 0,03 \text{ нм}$ ,  $R = 3,38 \text{ нм}$ ,  $\eta_S = 4,54 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-2}$ ,  $\sigma R \eta_S = 0,046$ . Розрахункові параметри для окремої нерівності:

$$\delta_c = \frac{3}{4} \left( \frac{\pi^2 w^2 R}{E^{*2}} \right)^{1/3} = \frac{3}{4} \left( \frac{\pi^2 \cdot 0,3^2 \times 3,38 \cdot 10^{-9}}{(303 \cdot 10^9)^2} \right)^{1/3} = 2,4 \cdot 10^{-11} \text{ м}; \quad \delta_c^* = 0,8;$$

$$P_c = 1,5\pi w R = 1,5\pi \times 0,3 \times 3,38 \cdot 10^{-9} = 4,78 \cdot 10^{-9} \text{ Н}.$$

Безрозмірний параметр  $\kappa$  (див. (1.2))

$$\kappa = \theta \delta_c^{(1-k)/k} A^{-1/k} \eta_S P_c =$$

$$= 1,05 \cdot 10^{-12} \times (2,4 \cdot 10^{-11})^{-1/2} \times (3,33 \cdot 10^6)^{-1/2} \times 4,54 \cdot 10^{17} \times 4,78 \cdot 10^{-9} = 0,255.$$

Величина параметра Можі [14] для такого контакту  $\lambda = 0,73 \delta_c / z_0 \approx 0,09$  відповідає DMT-теорії контакту окремих нерівностей. У цьому випадку для оцінки величини сили адгезії можна скористатися формулою (2.1) або (2.2). Користуючись формулою (2.1) визначаємо величину сили адгезії

$$F = 3,99\pi \cdot 303 \cdot 10^9 \cdot (2,4 \cdot 10^{-11})^{3/2} (3,33 \cdot 10^6)^{-1/2} 0,255^{0,982} \cdot 0,622 \text{ Н}, \text{ де}$$

$$t = (1/\delta_c^*)^{1,78} = 1,49.$$

Отримуємо  $F = 31,6 \cdot 10^{-9} \text{ Н}$ . Оцінка за формулою (2.2) дає результат

$$F = 4,21 \cdot 4,54 \cdot 10^{17} \cdot 4,78 \cdot 10^{-9} \cdot 2,4 \cdot 10^{-11} \cdot (3,33 \cdot 10^6)^{-1} 0,622^{1,49} = 32,5 \cdot 10^{-9} \text{ Н}.$$

### Висновок.

Моделювання адгезійного контакту шорстких тіл з викривленою номінальною геометрією проводиться методом граничних інтегральних рівнянь. Отримані розв'язки визначають обчислення ефективної товщини шорсткого шару, контактні напруження, номінальну область контакту при різних зближеннях контактуючих тіл і параметрах шорсткості. Сила адгезії визначається чисельно як  $F = -\min P(\delta)$  для різних параметрів шорсткості поверхні і макропараметрів контактуючих тіл.

Для найбільш поширеного випадку номінальної геометрії контактуючих тіл (параболічний зазор між контактуючими тілами), коли номінальний зазор між тілами до деформації визначається функцією  $f(r) = Ar^2$  ( $r$  – полярний радіус), визначена сила адгезії (сила відриву). За результатами обчислень отримана апроксимаційна формула для визначення сили адгезії при різних мікропараметрах шорсткості поверхні і макрогеометричних параметрах контактуючих тіл, коли контакти окремих нерівностей описуються DMT-теорією контакту (тверді тіла, малі радіуси кривизни вершин нерівностей, низька енергія адгезії)

$$F = 3,99\pi E^* \delta_c^{3/2} A^{-1/2} \kappa^{0,982} 0,622^t = 25,58wR^{1/2} A^{-1/2} \kappa^{0,982} 0,622^t,$$

де

$$\kappa = \theta \delta_c^{-1/2} A^{-1/2} \eta_S P_c, \quad \theta = (\pi E^*)^{-1}, \quad P_c = 1,5\pi wR;$$

$$\delta_c = 3/4 \left( (\pi^2 w^2 R) / (E^{*2}) \right)^{1/3}, \quad t = (\sigma / \delta_c)^{1,78}.$$

Формулу протестовано у діапазоні значень параметра шорсткості  $\delta_c^* \geq 0,2$  і  $0,3 \cdot 10^{-3} \leq \kappa \leq 3$ .

Таким чином, результати моделювання підтверджують, що на величину сили адгезії істотно впливають як мікрогеометричні параметри шорсткості, так і макрогеометричні параметри контактуючих тіл.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто модель нормального адгезійного контакту між пружними тілами зі стохастичною шорсткістю поверхні. Шорсткість моделюється нелінійним шаром Вінклера – Фусса, який може сприймати стискаючі та розтягуючі (у разі адгезії) контактні напруження. Механічні властивості шару визначаються статистичними теоріями адгезійного контакту між номінально плоскими шорсткими поверхнями. Контакт твердих тіл описується нелінійними граничними інтегральними рівняннями з немонотонними операторами. Їх розв'язки визначають зменшення ефективної товщини шорсткого шару, контактні напруження, області контакту та силу адгезії. Формули для розрахунку сили адгезії представлено для найбільш поширеного випадку номінального зазору між контактуючими тілами.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** адгезійна взаємодія, контакт шорстких тіл, сила адгезії.

1. Галанов Б.А., Валеєва І.К. Скользящий контакт шероховатых упругих тел с учетом их адгезии // Доп. НАН України – 2014. – № 7. – С. 86 – 94
2. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. – Москва: Наука, 2001. – 478 с.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Наука, 1989. – 510 с.
4. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. – Москва: Машиностроение, 1977. – 526 с.
5. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Y.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles // J. Colloid Interface Sci. – 1975. – **53**, N 2. – P. 314 – 326.
6. Fuller K.N.G., Tabor D. The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // Proc. R. Soc. London. Ser. A. – 1975. – **345**, N 1642. – P. 327 – 342.
7. Galanov B.A. Models of adhesive contact between rough elastic bodies // Int. J. Mech. Sci. – 2011. – **53**. – P. 968 – 977.
8. Galanov B.A., Valeeva I.K. Sliding adhesive contact of elastic solids with stochastic roughness // Int. J. Eng. Sci. – 2016. – **101**. – P. 64 – 80.
9. Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces // Proc. R. Soc. London. Ser. A. – 1966. – **295**, N 1442. – P. 300 – 319.
10. Jacobs T.D.B., Ryan K.E., Keating P.L., et al. The effect of atomic-scale roughness on the adhesion of nanoscale asperities: A combined simulation and experimental investigation // Trib. Lett. – 2013. – **50**. – P. 81 – 93.
11. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the Contact of Elastic Solids // Proc. R. Soc. London. Ser. A. – 1971. – **324**, N 1558. – P. 301 – 313.
12. Johnson K.L. Non-Hertzian contact of elastic bodies. In: The mechanics of the contact between deformable bodies, ed. by de Pater, Kalker. – Delft: University Press. – 1975. – P. 26 – 40.
13. Johnson K.L., Greenwood J.A. An adhesion map for the contact of elastic spheres // J. Colloid Interface Sci. – 1997. – **192**. – P. 326 – 333.
14. Maugis D. Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. – Berlin: Springer, 2000. – 414 p.
15. Vahdat V., Ryan K.E., Keating P.L., et al. Atomic-Scale Wear of Amorphous Hydrogenated Carbon during Intermittent Contact: A Combined Study Using Experiment, Simulation, and Theory // ACS Nano. – 2014. – **8**, N 7. – P. 7027 – 7040.

Надійшла 04.08.2020

Затверджена до друку 24.06.2021