

В. Ю. Маріна, В. І. Маріна

ЄДИНИЙ ПІДХІД ДО ОПИСУ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКУ МІКРО- ТА МАКРОСТАНІВ
ПРИ ЗВОРОТНОМУ ТА НЕЗВОРОТНОМУ ДЕФОРМУВАННІ
ПОЛІКРИСТАЛІВ

*Технічний Університет Молдови,
пр. Штефан чел Маре, 168, 2004, Кишинів, Молдова;
e-mail: vasilemarina21@yahoo.com*

Abstract. The problem of the relationship between local and general mechanical parameters which describe the thermorheological properties of polycrystalline materials is considered. The changing of parameters characterizing the relationship between the fluctuations of stresses and strains at two levels of structure is analyzed. At that, the assumption of the invariance of the distribution density function of the elastic limits of the sub-elements in the process of irreversible deformation is used. This research is carried out based on the inconsistency of principles of macroscopic measures with the corresponding microscopic analogs and orthogonality of stress and strain fluctuations. It is shown that at the small values of hardening coefficient of sub-elements, which are characteristic of the stages of easy-sliding monocrystals, this model describes such specific effects as a platform or a yield tooth and a change in elastic characteristics under non-reversible deformation.

Key words: tensor, stress, strain, structure, anisotropy, single crystal, polycrystal.

Вступ.

Експериментальні дослідження закономірностей незворотного деформування при повторному змінному неізотермічному складному навантаженні з витримками виявили надзвичайно складну картину поведінки конструкційних матеріалів. До найбільш плідних концепцій, що застосовуються при створенні сучасних теорій, які визначають рівняння стану, відноситься концепція, згідно з якою репрезентативний (представницький) об'єм макроскопічно однорідного тіла представляється у вигляді скінченного або нескінченного числа пов'язаних між собою під-елементів, які мають різні термо-реологічні властивості. Кожен під-елемент ототожнюється з безліччю матеріальних частинок усередині представницького об'єму, який характеризується однаковим тензором незворотної деформації. При цьому передбачається, що умова неперервності середовища забезпечується дією п'яти незалежних систем ковзання. Експериментально встановлене небазисне ковзання дозволяє описати скалярні властивості матеріалів в області незворотного деформування в термінах модулів девіаторів напружень і деформацій. В роботах [5 – 7] встановлена замкнута система рівнянь, на основі якої можна побудувати систему визначальних рівнянь на макроскопічному рівні, якщо відомі фізичні рівняння на мікроскопічному рівні. Дослідження проводилися в рамках допущення пружної ізотропії матеріальних частинок. У даній роботі поведінка полікристалічних матеріалів досліджується з урахуванням пружної анізотропії матеріальних частинок. При переході в область незворотного деформування під-елементи грають роль проміжного структурного рівня. Рівняння зв'язку між флуктуаціями напружень і деформацій сформульовано на рівні матеріальних частинок, що відносяться до даного під-елемента і на рівні системи під-елементів. У цьому підході складна картина зовні не пов'язаних між собою особливостей незворотного деформування матеріалів, які проявляються при різних програмних змінах навантаження і температури, стає осяжною і взаємозалежною.

§1. Основні рівняння багатоелементних моделей.

Для опису термореологічної поведінки матеріалів в рамках моделей, що враховують неоднорідні процеси деформування і навантаження, скористаємося рівняннями Хілла [3]

$$t_{ij} = \langle \tilde{t}_{ij} \rangle = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \tilde{t}_{ij} dV; \quad d_{ij} = \langle \tilde{d}_{ij} \rangle; \quad \langle \tilde{t}_{ij} \tilde{d}_{ij} \rangle = t_{pq} d_{lq}, \quad (1.1)$$

де $\tilde{t}_{ij}, \tilde{d}_{ij}$ – тензори напружень і деформацій в кожній точці області ΔV_0 , відповідно; $\langle \cdot \rangle$ – знак осереднення за об'ємом ΔV_0 . Вирази (1.1) задовольняють рівняння рівноваги суцільного середовища і геометричні рівняння Коші, а на поверхні S_0 виконуються наступні граничні умови:

$$\tilde{u}_{i/S_0} = u_i = d_{ij} x_j; \quad d_{ij} = \text{const}; \quad p_{i/S_0}^{(n)} = t_{ij} n_j; \quad t_{ij} = \text{const}.$$

Рівняння (1.1) необхідні, але недостатні для побудови системи визначальних рівнянь на макроскопічному рівні на основі фізичних співвідношень на мікроскопічному рівні. Для отримання замкнутої системи рівнянь необхідно сформулювати додаткові припущення.

На першому етапі розвитку теорії використовувалися найпростіші варіанти взаємодії: $\tilde{t}_{ij} = t_{ij}$ – однорідний напружений стан або $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}$ – однорідний деформований стан. В рамках подібних припущень не вдається описати різноманіття ефектів, які спостерігаються при деформуванні матеріалів. Більш реалістична схема взаємодії матеріальних частинок запропонована Кренером [4]. Він відкрив новий шлях з формулюванням так званої «самоузгодженої» схеми, що відноситься до задачі про включення в нескінченну матрицю. Кожне зерно полікристала згідно з його схемою послідовно розглядається як включення в «матриці» всіх інших зерен; поведінка полікристала розраховується за допомогою деякого адекватного осереднення по всіх зернах. Підхід Кренера приводить до дуже зручного «априорного» закону взаємодії, який легко виводиться з розв'язку задачі про включення, отриманої Ешелбі. Це спрощення основане на пружній взаємодії між «матрицею» та включенням, в результаті якого Кренер отримав наступні кінематичні рівняння зв'язку:

$$\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = 2b_2 (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}); \quad 2b_2 = 2G \frac{7-5\mu}{8-10\mu}; \quad (1.2)$$

$$\bar{\sigma}_0 - \sigma_0 = (6b_1 + 2b_2)(\varepsilon_0 - \bar{\varepsilon}_0); \quad b_1 = 2G \frac{3-5\mu}{8-10\mu}, \quad (1.3)$$

де G – модуль зсуву; μ – коефіцієнт Пуассона,

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{t}_{ij} - \tilde{\sigma}_0 \delta_{ij}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{d}_{ij} - \tilde{\varepsilon}_0 \delta_{ij}; \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} \tilde{t}_{ii}; \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} \tilde{d}_{ii}. \quad (1.4)$$

Рівняння (1.2) і (1.3) не узгоджуються з третім рівнянням Хілла $\langle \langle \tilde{t}_{ij} \tilde{d}_{ij} \rangle \rangle = \langle \tilde{t}_{ij} \rangle \langle \tilde{d}_{ij} \rangle$ і дають завищені внутрішні напруження в незворотній області деформування.

Для врахування природної тенденції матеріалу до зниження флуктуацій напружень всередині представницького об'єму ΔV_0 Бервейс і Заул [1] ввели в аналіз так звану «пластичну функцію акомодатії». Такий підхід можливий тільки при обмеженні ізотропної пружнопластичної взаємодії між включенням і матрицею. У цій моделі параметр b_2 зменшується з ростом пластичної деформації майже на два порядки при випробуванні на одноосовий розтяг однофазних полікристалічних матеріалів. Дана

модель і різні її модифікації також не узгоджуються з третім рівнянням Хілла і з першим законом термодинаміки. Крім того, для однофазних полікристалічних матеріалів з кубічною симетрією, вони призводять до зміни тільки девіаторних величин в процесі оборотного і необоротного деформування. Таким чином, для кульових величин тензорів напружень і деформацій випливають ті самі наслідки, як в моделях $\tilde{t}_{ij} = t_{ij}$ або $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}$. Відзначимо і «штучне» введення поняття пластичної релаксації напружень.

Більш загальний підхід був запропонований в [5 – 7]. У доповненні до рівнянь Хілла (1.1) був прийнятий постулат про ортогональність тензорів флуктуацій напружень і деформацій

$$(\tilde{t}_{ij} - t_{ij})(\tilde{d}_{ij} - d_{ij}) = 0. \quad (1.5)$$

Підставляючи (1.4) в (1.5), встановимо перший тип рівнянь зв'язку мікростанів і макростанів

$$(\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon_{ij}) = 3(\tilde{\sigma}_0 - \sigma_0)(\tilde{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0). \quad (1.6)$$

При записі виразу (1.6) використовувалися співвідношення

$$\tilde{t}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_0 \delta_{ij}; \quad \tilde{d}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_0 \delta_{ij}.$$

Для флуктуацій девіаторних складових прийняті як у Кренера лінійні залежності

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = B(\varepsilon_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}), \quad (1.7)$$

де $B \neq 2b_2$ – внутрішній параметр, який містить інформацію про мікроскопічні характеристики під-елементів і відображає різницю між флуктуаціями напружень і флуктуаціями деформацій. Співвідношення (1.5), (1.7) задовольняють третьому рівнянню Хілла і першим законам термодинаміки.

З рівнянь (1.1) видно, що усереднення за об'ємом напружень, деформацій і їх добутків єдиним чином залежить від даних на поверхні представницького об'єму. Однак, не всі мікроскопічні змінні мають цю специфічну властивість. Зокрема, в [5, 7] показано, що природні макроміри енергії зміни об'єму і форми відрізняються від усереднення за обсягом своїх мікромір. Для розширення системи (1.1), (1.6) і (1.7) в [5 – 7] запропоновано принцип екстремуму невідповідності макроскопічних заходів з відповідними середніми значеннями мікроскопічних аналогів. Зокрема

$$\Delta = \langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle - \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle = \text{Extr}. \quad (1.8)$$

Вирази (1.1), (1.6) – (1.8) вважаються справедливими як для оборотних, так і необоротних процесів деформування. В силу цього на основі співвідношень (1.1), (1.6) – (1.8) вдається описати з єдиних позицій взаємозв'язки мікро- і макростанів при оборотній і незворотній деформації полікристалічних матеріалів.

У даній роботі проаналізуємо закономірність зміни параметра B в незворотній області деформування, а на його основі – флуктуації напружень і деформацій в залежності від плинності під-елемента, коефіцієнта зміцнення і констант пружності кристалів.

§2. Апробація моделі в пружній області.

У наведених виразах (1.1) – (1.8) фігурують напруження і деформації на локальному $(\tilde{t}_{ij}, \tilde{d}_{ij})$ і макроскопічному рівні (t_{ij}, d_{ij}) . При цьому, в оборотній області під $\tilde{t}_{ij}, \tilde{d}_{ij}$ маються на увазі середні значення напружень і деформацій в підмножині частинок з однаковою орієнтацією кристалографічних осей відносно глобальної системи координат. В рамках даної формалізації на основі локального фізичного закону

$$\tilde{t}_{ij} = c_{ijnm} \tilde{d}'_{nm}$$

і співвідношень (1.6) – (1.8) встановимо взаємозв'язок $t_{ij} \sim d_{ij}$, де c_{ijmn} – тензор пружних констант в кристалографічній системі координат; \tilde{t}'_{ij} , \tilde{d}'_{ij} – компоненти відповідних тензорів в кристалографічній системі координат. Найбільш доступні для огляду результати виходять для однофазних полікристалічних матеріалів з кубічною решіткою [7]

$$B = 2c_{44}\sqrt{\frac{2A+3}{A(3A+2)}}; \quad A = \frac{2c_{44}}{c_{11}-c_{12}}; \quad G = c_{44}\sqrt{\frac{3A+2}{A(2A+3)}} = \sqrt{G_V G_R}; \quad (2.1)$$

$$\tilde{\sigma}'_{ij}(A, \sigma_{nm}, \Omega) = \begin{cases} \frac{5(1+A)a_{in}(\Omega)a_{jn}(\Omega)\sigma_{nm}}{2+3A+\sqrt{A(2+3A)(3+2A)}}, & i = j; \\ \frac{5(1+A)\sqrt{A}a_{in}(\Omega)a_{jn}(\Omega)\sigma_{nm}}{(2+3A)\sqrt{A}+\sqrt{(2+3A)(3+2A)}}, & i \neq j; \end{cases} \quad (2.2)$$

$$|\tilde{\sigma}_0 - \sigma_0| = \sqrt{\frac{c_{11}+2c_{12}}{6c_{44}} \sqrt{\frac{A(3A+2)}{2A+3}} (\tilde{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij})(\tilde{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{ij})}, \quad (2.3)$$

де c_{11} , c_{12} , c_{44} – константи пружності кристала з кубічною решіткою; $a_{in}(\Omega)$ – матриця напрямних косинусів даної кристалографічної системи координат щодо глобальної системи; A – фактор анізотропії монокристалів; G_V – модуль зсуву, отриманий Войгта в 1928 році в рамках наближення $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}$; G_R – модуль зсуву, отриманий Рейсом в 1929 році в рамках наближення $\tilde{t}_{ij} = t_{ij}$.

Згідно (2.3) флуктуації кульового тензора виражаються через флуктуації девіатора напружень і фактора анізотропії кристала. Таким чином, в результаті нелінійної системи рівнянь зв'язку (1.6), (1.7) неоднорідне поле об'ємних деформацій виникає навіть при чистому макроскопічному зсуві. У даній роботі досліджувався вплив виду навантаження на величину найбільшого локального напруження $\tilde{t}_1 = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_0$. Числові розрахунки, проведені для міді, показують, що навіть при чистому стиску на локальному рівні є матеріальні частки, в яких $\tilde{t}_1 > 0$. Якщо, наприклад, прийняти в якості критерію руйнування на локальному рівні найбільшу лінійну деформацію, то на неї впливають всі три інваріанти тензора деформації, а в незворотній області будуть впливати ще три інваріанти тензора напружень. Отже, виходячи з елементарного критерію руйнування на локальному рівні, що дозволяє визначити невідомі матеріальні функції і константи з простого експерименту, на макроскопічному рівні вимальовується дуже складна картина впливу на міцність матеріалу всіх параметрів задачі.

В роботі [9] проведено зіставлення значень модулів зсуву, отриманих в рамках моделей Кренера (G_K) і Марина (G_M). В результаті було встановлено наступну фундаментальну нерівність

$$G_K \geq G_M.$$

У разі однофазних полікристалічних матеріалів з кубічними решітками G_M визначається на основі формули (2.1), а G_K – з кубічного рівняння [4]

$$G_K^3 + a_1 G_K^2 + a_2 G_K + a_3 = 0,$$

де

$$a_1 = \frac{1}{8}(5c_{11} + 4c_{12}); \quad a_2 = -\frac{1}{8}(7c_{11} - 4c_{12})c_{44}; \quad a_3 = -\frac{1}{8}(c_{11} + 2c_{12})(c_{11} - c_{12})c_{44}.$$

В роботі [9] зіставлялися теоретичні та експериментальні значення G_M і G_K для багатьох полікристалічних матеріалів з кубічною решіткою. Показано, що досліджувані моделі добре узгоджуються з експериментальними даними, при цьому G_M ближче до $G_{\text{екс}}$, ніж G_K .

У даній роботі дуже проста формула (2.1) ($G = \sqrt{G_V G_R}$), отримана для однофазних полікристалічних матеріалів з кубічними решітками, зіставлялася з результатами експериментальних досліджень полікристалів гексагональної, тетрагональної і орторомбічної симетрії (Be, Cd, Co, In, S, Sn, TiO₂, U, Y, Zn) [13]. Найбільша відмінність між розрахунковими й експериментальними даними виявилася для цинку – 3,51%. Виходячи з даних зіставлень можна зробити висновок, що зазначену формулу можна застосовувати і при визначенні пружних констант полікристалів з більш низькою симетрією кристалічної решітки.

Встановлення закономірності флуктуацій кульового тензора $\tilde{\sigma}_0$, яке відсутнє в моделі Кренера і інших моделях ($\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$), проводилися в [8]. На основі встановленого взаємозв'язку між флуктуаціями девіаторних і кульових величин в [8] вдається описати, наприклад, такі термомеханічні ефекти матеріалів, як розсіювання механічної енергії при навантаженні в пружній області. В якості макроскопічної міри таких ефектів служить невідповідність між величинами $\langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle \neq \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle \langle \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle$; $\langle \tilde{\sigma}_0 \tilde{\epsilon}_0 \rangle \neq \langle \tilde{\sigma}_0 \rangle \langle \tilde{\epsilon}_0 \rangle$.

Для однофазних полікристалічних матеріалів з кубічними решітками в [7] встановлена наступна формула:

$$\langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle = \left[1 - 6 \left(\frac{A-1}{5\sqrt{A} + \sqrt{(2+3A)(3+2A)}} \right)^2 \right] \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle \langle \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle. \quad (2.4)$$

На основі (1.1) і (2.4) після нескладних перетворень отримаємо вираз

$$\langle \tilde{\sigma}_0 \tilde{\epsilon}_0 \rangle = \langle \tilde{\sigma}_0 \rangle \langle \tilde{\epsilon}_0 \rangle + 6 \left(\frac{A-1}{5\sqrt{A} + \sqrt{(2+3A)(3+2A)}} \right)^2 \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle \langle \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle. \quad (2.5)$$

З формули (2.5) видно, що невідповідності $\langle \tilde{\sigma}_0 \tilde{\epsilon}_0 \rangle - \langle \tilde{\sigma}_0 \rangle \langle \tilde{\epsilon}_0 \rangle$ залежать від фактора анізотропії A та макроскопічної міри $\langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle \langle \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle$. Для міді [13] – $A = 3,21$, відносна невідповідність мір (2.4) становить 7,8%, в той час, як для алюмінію – $A=1,21$, невідповідність становить лише 0,23%.

§3. Формалізація кристалічного середовища в незворотній області деформування.

Щоб формалізувати поведінку полікристалічних матеріалів в незворотній області навантаження доводиться вдаватися до різних спрощуючих припущень. Як і в роботах [5 – 9, 11, 12] в якості локальної структурної одиниці приймаємо під-елемент, який отожднюємо з безліччю всіх матеріальних частинок усередині ΔV_0 , який має однаковий девіатор необоротних деформацій. Частинки, що належать одному і тому ж під-елементу, можуть мати різні положення і орієнтації кристалічної решітки в представницькому об'ємі ΔV_0 . Кількість всіх частинок з однаковим девіатором необоротних деформацій визначає вагу одного під-елемента, який не змінюється в процесі навантаження. Так як зерна в полікристалах деформуються нерівномірно, то згідно з прийнятим визначенням маса або об'єм одного під-елемента можуть бути скільки завгодно малими величинами. В рамках цієї концепції, область ΔV_0 , яка містить достатню кількість частинок, щоб відображати середні термореологічні властивості ма-

теріалу, представляється у вигляді скінченного або нескінченного числа пов'язаних між собою під-елементів, що мають різні термореологічні властивості.

При навантаженні в незворотній області компоненти девіаторів деформацій під-елементів $\bar{\varepsilon}_{ij}$ і елемента тіла ε_{ij} представляються у вигляді суми оборотних \bar{e}_{ij}, e_{ij} і незворотних компонент \bar{p}_{ij}, p_{ij}

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{e}_{ij} + \bar{p}_{ij}; \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + p_{ij}. \quad (3.1)$$

Хоча в експериментах можна вимірювати лише загальну деформацію, її поділ на дві складові не суперечить концепції побудови теорії на величинах, що підлягають спостереженню. В роботі [6] показано, що в побудованій системі макроскопічних рівнянь фігурує тільки загальна деформація. При цьому, в [5, 11, 12] встановлюється локальний зв'язок не між напруженнями і незворотними деформаціями, а між пружними і незворотними деформаціями. Відповідно до закону центрального приросту, запропонованого в [5], граничні пружні деформації під-елементів можна представити у вигляді суми двох незалежних частин

$$\bar{e}_{ij} = \bar{\tau}_{ij} + \bar{s}_{ij}. \quad (3.2)$$

Тут $\bar{\tau}_{ij}$ – компоненти девіатора граничних пружних деформацій під-елементів в структурно стабільному стані; \bar{s}_{ij} – приріст компонент девіатора граничних пружних деформацій під-елементів в результаті зміни структури при незворотному деформуванні. Величини $\bar{\tau}_{ij}$ відображають термов'язкопластичні властивості під-елементів без урахування зміни структури матеріалу, а \bar{s}_{ij} – в результаті її зміни.

Поширення цієї концепції на випадок анізотропних матеріальних частинок з одного боку радикально спрощує аналіз процесів незворотного деформування, а з іншого – дозволяє узагальнити ряд уявлень, які успішно застосовуються при описі необоротних процесів пружно ізотропних матеріалів.

Перехід під-елементів у відпаленому стані матеріалу ($\bar{s}_{ij} = 0$) зі зворотного стану в незворотній визначається критерієм

$$\bar{e}_{ij}\bar{e}_{ij} - \tau^2 = 0; \quad \tau^2 = \tau_{ij}\tau_{ij},$$

звідки видно, що τ є вихідною межею пружності під-елемента, який передбачається залежним від усередненої швидкості незворотних деформацій $-\dot{\gamma}$ і об'ємної термічної деформації $-\bar{\varepsilon}_T$

$$\gamma = \frac{1}{\psi'} \int_0^{\psi'} \sqrt{\bar{p}_{ij}\dot{\bar{p}}_{ij}} d\psi; \quad v = \int_0^1 \bar{\varepsilon}_T d\psi, \quad (3.3)$$

де точкою зверху позначена похідна за часом необоротної деформації; $\bar{\varepsilon}_T$ – чисто тепла деформація під-елемента; ψ' – вага необоротно деформованих під-елементів. Тоді

$$\tau = \tau(\psi, \gamma, v); \quad 0 \leq \psi \leq 1. \quad (3.4)$$

Тут за параметр, що визначає приналежність межі текучості до певного під-елементу, вибирається вага під-елемента в момент його переходу з оборотного стану в необоротний при первісному навантаженні.

Тензорні властивості піделемента задамо в припущенні, що компоненти девіатора пружних деформацій \bar{e}_{ij} можуть бути розкладені вздовж \bar{p}_{ij} і $d\bar{p}_{ij}/d\bar{\lambda}$

$$\bar{e}_{ij} = (\bar{\tau} + \bar{s}) \frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} + \bar{r} \frac{\bar{p}_{ij}}{\bar{p}}; \quad p = \sqrt{p_{ij}p_{ij}}; \quad d\bar{\lambda} = \sqrt{d\bar{p}_{ij}d\bar{p}_{ij}}.$$

В рамках перерахованих припущень рівняння зв'язку (1.7) можна представити у вигляді

$$\bar{e}_{ij} - e_{ij} = b(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}) = m(p_{ij} - \bar{p}_{ij}); \quad b = \frac{B}{2G} = \frac{m}{1-m}. \quad (3.5)$$

Для змінних, які характеризують вплив зміцнення під-елементів на граничні пружні деформації під-елементів, прийнемо найпростіші закони

$$\dot{\bar{s}} = \begin{cases} a_0 \dot{\lambda}, & \bar{s} < x(\psi, \gamma, \nu); \\ \dot{x}(\psi, \gamma, \nu), & \bar{s} = x(\psi, \gamma, \nu); \end{cases} \quad \bar{r} = \begin{cases} a_r \bar{p}, & a_r \bar{p} < x_1(\psi, \gamma, \nu); \\ x_1(\psi, \gamma, \nu), & a_r \bar{p} = x_1, \end{cases}$$

де a_0 – коефіцієнт ізотропного зміцнення; a_r – кінематичне зміцнення.

Відразу відзначимо, що в багатоеlementних моделях осереднення проводиться не за об'ємом, а за множиною реалізацій, тобто вважається правомірним використання ергодичної гіпотези. Приймаючи τ за єдиний випадковий параметр задачі, в цьому випадку

$$\langle \bar{e}_{ij} \rangle = \int_0^1 \bar{e}_{ij}(\psi) d\psi = \int_{\tau_0}^{\tau_{\max}} \bar{e}_{ij}(\tau) d\psi(\tau); \quad \langle \bar{p}_{ij} \rangle = \int_0^1 \bar{p}_{ij}(\psi) d\psi = \int_{\tau_0}^{\tau_{\max}} \bar{p}_{ij}(\tau) d\psi(\tau), \quad (3.6)$$

де $\psi(\tau)$ – інтегральна функція розподілу початкових граничних пружних деформацій; τ_{\max} , τ_0 – найбільша і найменша межі пружності під-елементів, відповідно.

Поряд з перерахованими фізичними законами на макроскопічну систему визначальних рівнянь впливає і структура інтегральної функції розподілу. У роботах [5, 6, 12] при конкретизації інтегральної функції розподілу передбачалося, що вихідні діаграми деформування, отримані при різних постійних значеннях параметрів стану γ, ν , не залежать від параметра m : $e = \varphi(p, \gamma, \nu) + s$. Тоді, на основі (3.2), (3.5), встановлено зв'язок $\psi \sim \tau$ в параметричному вигляді [5]

$$\psi(p, m, \gamma, \nu) = \frac{m+a}{m+\varphi_p}; \quad \tau(p, m, \gamma, \nu) = \varphi(p, \gamma, \nu) + mp. \quad (3.7)$$

Згідно (3.7) в залежності від значення параметра слідує різні функції інтегрального розподілу $\psi \sim \tau$. При цих умовах з (1.8) виходить проста формула для параметра m [5]

$$m = -a + \sqrt{a+a^2}; \quad a = a_0 + a_r. \quad (3.8)$$

Згідно (3.8) співвідношення між флуктуаціями оборотних і необоротних деформацій залежить тільки від коефіцієнта індивідуального зміцнення під-елементи a .

Мета даної роботи – показати, що на основі принципу невідповідності (1.8) можна описати закономірність зміни параметра B в області необоротної деформації і у випадку, коли діаграма $e \sim p$ залежить від параметра m , без яких-небудь додаткових припущень (пластична релаксація, введення скалярної функції акомодатії і т.д.). Щоб результати були більш доступними для огляду, розглянемо випадок пропорційного навантаження при постійних значеннях параметрів стану $\gamma = \text{const}$, $\nu = \text{const}$ і лінійному законі зміцнення.

З наведеного визначення поняття під-елемента витікає, що при врахуванні пружної анізотропії матеріальних частинок необхідно враховувати і флуктуації напружень і деформацій в межах кожного під-елемента. В силу цього фундаментальні поняття напруження і деформації вводяться на трьох рівнях структури: матеріальної точки – $\tilde{t}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_0 \delta_{ij}$, $\tilde{d}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_0 \delta_{ij}$; під-елемента – $\bar{t}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_0 \delta_{ij}$, $\bar{d}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\varepsilon}_0 \delta_{ij}$ й елемента тіла – $t_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}$, $d_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}$.

Величини $\bar{t}_{ij}, \bar{d}_{ij}$ визначаються шляхом усереднення по фактору орієнтації кристалічної решітки

$$\bar{t}_{ij} = \langle \tilde{t}_{ij} \rangle_{\Omega}; \quad \bar{d}_{ij} = \langle \tilde{d}_{ij} \rangle_{\Omega}; \quad \bar{\sigma}_{ij} = \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_{\Omega}; \dots,$$

а макроскопічні величини t_{ij}, d_{ij} – шляхом осереднення по параметру розкиду – τ або вагової функції ψ .

Записуючи співвідношення (1.7) у вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = B(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}),$$

встановимо два види рівнянь зв'язку

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = B(\bar{\varepsilon}_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}); \quad (3.9)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = B(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}). \quad (3.10)$$

Розклавши величини $\tilde{\varepsilon}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}$ на оборотні $\tilde{e}_{ij}, \bar{e}_{ij}$ і незворотні складові $\tilde{p}_{ij}, \bar{p}_{ij}$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{e}_{ij} + \tilde{p}_{ij}; \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{e}_{ij} + \bar{p}_{ij}$$

і враховуючи, що відповідно до визначення $\tilde{p}_{ij} = \bar{p}_{ij}$, рівняння (3.9) можна записати у вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = B(\bar{e}_{ij} - \tilde{e}_{ij}). \quad (3.11)$$

Згідно (3.11) і (3.10) рівняння зв'язку мікростанів і макростанів (1.7) розпадаються на два типи співвідношень зв'язку: флуктуації напружень і оборотних деформацій в структурі під-елемента і флуктуації напружень і деформацій в системі під-елементів. Якщо приймається допущення про пружну ізотропію матеріальних частинок, тоді $\tilde{e}_{ij} = \bar{e}_{ij}$, $\tilde{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}$ і взаємозв'язок мікростанів і макростанів зводиться тільки до одного типу рівнянь (3.5).

В рамках прийнятих припущень принцип невідповідності мір (1.8) розпадається на невідповідності, що виникають в структурі під-елементів

$$\Delta' = \langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{e}_{ij} \rangle - \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle \langle \tilde{e}_{ij} \rangle \quad (3.12)$$

і системі під-елементів

$$\Delta'' = \langle \bar{\sigma}_{ij} \bar{e}_{ij} \rangle - \langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle \langle \bar{e}_{ij} \rangle. \quad (3.13)$$

При цьому в реальних взаємодіях

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' = \text{Extr}. \quad (3.14)$$

З виразів (3.12) і (3.14) випливає, що пружна анізотропія матеріальних частинок впливає на невідповідність мір і в системі під-елементів.

§4. Конкретизація виразів для невідповідності мір.

Для спрощення аналізу зміни внутрішнього параметра B , що відбиває неоднорідність перебігу деформацій і напружень в представницькому об'ємі ΔV_0 в процесі незворотного навантаження припустимо, що під-елементи пружно ізотропні. Тоді вплив анізотропії матеріальних частинок буде відображатися тільки рівнянням (3.11). У цьому випадку рівняння (3.10) спрощується і набуває вигляду (3.5).

Враховуючи (3.5) в (3.13), після нескладних перетворень отримаємо

$$\Delta'' = 2Gm(1-m) \langle (p_{ij} - \bar{p}_{ij})(\bar{p}_{ij} - p_{ij}) \rangle, \quad m = \frac{B}{2G+B}. \quad (4.1)$$

Вираз (4.1) можна представити ще у вигляді

$$\Delta'' = 2Gm(1-m)\left(\langle \bar{p} \rangle^2 - \langle \bar{p}^2 \rangle\right), \quad \bar{p} = \sqrt{\bar{p}_{ij}\bar{p}_{ij}}. \quad (4.2)$$

У разі однофазних полікристалічних матеріалів з кубічною решіткою, формула для невідповідності мір в пружній області була встановлена в роботі [7]

$$\Delta = \frac{-3B(2c_{44} - c_{11} + c_{12})^2 \sigma_{ij} e_{ij}}{[5B + 4c_{44} + 3(c_{11} - c_{12})][5c_{44}(c_{11} - c_{12}) + (3c_{44} + c_{11} - c_{12})B]} = \text{Extr}. \quad (4.3)$$

Формулу (4.3) можна поширити на випадок системи пружно-ізотропних під-елементів

$$\Delta' = \frac{-12(A-1)^2 B(m)c_{44} \langle \bar{\sigma}_{ij}\bar{e}_{ij} \rangle}{[5AB(m) + 2c_{44}(3+2A)][(2+3A)B(m) + 10c_{44}]}. \quad (4.4)$$

При записі (4.4) враховувалась рівність $c_{11} - c_{12} = 2c_{44}/A$. В процесі незворотного деформування змінюється не тільки параметр B , але і модуль зсуву G . Аналіз спрощується, якщо користуватися формулою, отриманою в [9]

$$B(m) = \frac{c_{44}}{5A} \left[\frac{m}{1-m}(2+3A) - 3 - 2A + \sqrt{\left[\frac{m}{1-m}(3A+2) - 2A - 3 \right]^2 + 100A \frac{m}{1-m}} \right]. \quad (4.5)$$

Найбільш наочні результати зміни B виходять при пропорційному навантаженні

$$\frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\bar{\sigma}} = \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{e}_{ij}}{\bar{e}} = \frac{\bar{p}_{ij}}{\bar{p}} = \text{const}; \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij}}; \quad \bar{\varepsilon} = \sqrt{\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}}.$$

При цьому виді навантаження, вирази (3.5) приводяться до одного скалярного рівняння

$$\bar{e} - e = b(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) = m(p - \bar{p}). \quad (4.6)$$

На ділянці лінійного зміцнення під-елементів маємо

$$\bar{e} = \tau + \chi(\varepsilon - \tau) = \tau(1 - \chi) + \chi\bar{\varepsilon},$$

або

$$\bar{e} = \tau + a\bar{p}; \quad a = \frac{\chi}{1 - \chi}. \quad (4.7)$$

Ці співвідношення справедливі для під-елементів, що працюють за межами пружності $\tau \leq \bar{e}$. У під-елементах з $\tau > \bar{e}$, $\bar{p} = 0$ і з (4.7) визначимо значення межі текучості τ' в граничному під-елементі

$$\tau' = e + mp = \frac{e + b\varepsilon}{1 + b}. \quad (4.8)$$

На основі (4.6) – (4.8) знаходимо формули для визначення модулів оборотних і необоротних деформацій

$$\bar{e}(\tau, \tau', m) = \begin{cases} \frac{m\tau + a\tau'}{m + a}, & \tau \leq \tau'; \\ \tau', & \tau > \tau'; \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\bar{p}(\tau, \tau', m) = \begin{cases} \frac{\tau' - \tau}{m + a}, & \tau \leq \tau'; \\ 0, & \tau > \tau'. \end{cases} \quad (4.10)$$

Інтегруючи (4.10) за параметром розкиду τ , знайдемо

$$p = \frac{1}{m+a} \int_{\tau_0}^{\tau'} (\tau' - \tau) y(\tau) d\tau = \frac{1}{m+a} \varphi(\tau'), \quad (4.11)$$

де $y(\tau)$ – щільність розподілу меж пружності під-елементів τ , τ_0 – найменша границя пружності

$$\varphi(\tau') = \int_{\tau_0}^{\tau'} (\tau' - \tau) y(\tau) d\tau.$$

З (4.11) і (4.8) знаходимо

$$\tau' = \varphi^{-1}[(m+a)p] = e + mp,$$

або у вигляді

$$e = \varphi^{-1}[(m+a)p] - (m+a)p + ap = F[(m+a)p] + ap, \quad (4.12)$$

де

$$F(x) = \varphi^{-1}(x) - x.$$

Формула (4.12) дозволяє знайти діаграми $e \sim p$ виходячи з однієї схеми з'єднання під-елементів на основі діаграми, розрахованої за іншою схемою.

Якщо в якості вихідної інформації про матеріал задана інтегральна функція розподілу меж пружності, то співвідношення (4.2) з урахуванням (4.10) представимо у вигляді

$$\Delta''(\tau', m) = \frac{2Gm(1-m)}{(m+a)^2} \left[\left(\int_{\tau_0}^{\tau'} (\tau' - \tau) y(\tau) d\tau \right)^2 - \int_{\tau_0}^{\tau'} (\tau' - \tau)^2 y(\tau) d\tau \right]. \quad (4.13)$$

На основі (3.14), (4.4) і (4.13) можна досліджувати закономірність зміни параметра m при незворотному деформуванні з урахуванням пружної анізотропії матеріальних частинок.

§5. Чисельні дослідження закономірності зміни параметра m при навантаженні полікристалічних матеріалів.

Розглянемо як приклад гіпотетичний полікристалічний матеріал з кубічною решіткою, для якого інтегральна функція розподілу меж пружності задається виразом

$$y(z, k) = k^2 z e^{-kz}; \quad \psi(z, k) = \int_0^z y(z, k) dz = 1 - (1+kz)e^{-kz}; \quad (5.1)$$

$$z = \tau' - \tau_0 = e - \tau_0 + mp. \quad (5.2)$$

Підставляючи (5.1) з урахуванням позначень (5.2) в (4.11), отримаємо взаємозв'язок $e \sim p$ в наступному параметричному вигляді

$$(m+a)p = \frac{1}{k} [kz - 2 + (kz+2)e^{-kz}]; \quad e = \tau_0 + ap + \frac{2}{k} - \left(\frac{2}{k} + z \right) e^{-kz}. \quad (5.3)$$

Вираз (5.3) можна записати ще у вигляді

$$y = 2 - (2+x+y)e^{-(x+y)}, \quad (5.4)$$

де

$$y = k(e - \tau_0 - ap); \quad x = k(m+a)p; \quad z = x + y. \quad (5.5)$$

Неявний вид взаємозв'язку $y \sim x$, заданий співвідношенням (5.4), ускладнює чисельні дослідження. Проте з великою точністю (відхилення не перевищує 1%), вираз (5.4) можна апроксимувати функцією

$$y(x) = \begin{cases} 2 \sin \sqrt[3]{x}, & x \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^3; \\ 2, & x > \left(\frac{\pi}{2}\right)^3. \end{cases} \quad (5.6)$$

З огляду на позначення (5.5) в (5.6) взаємозв'язок між e , p і m набирає вигляду

$$e(p, m, a, k) = \begin{cases} \tau_0 + ap + \frac{2}{k} \sin \left[\sqrt[3]{k(m+a)p} \right], & k(m+a)p \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^3; \\ \tau_0 + ap + \frac{2}{k}, & k(m+a)p > \left(\frac{\pi}{2}\right)^3. \end{cases} \quad (5.7)$$

При цьому матеріальна функція F , згідно (4.12) і (5.7), визначається виразом

$$F[(m+a)p] = \begin{cases} \tau_0 + \frac{2}{k} \sin \left[\sqrt[3]{k(m+a)p} \right], & k(m+a)p \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^3; \\ \tau_0 + \frac{2}{k}, & k(m+a)p > \left(\frac{\pi}{2}\right)^3. \end{cases} \quad (5.8)$$

Інтегруючи (4.14) з урахуванням (5.1) і (5.2), отримаємо такі вирази для невідповідності Δ''

$$\Delta''(\tau', m, a, k) = \frac{2Gm(1-m)}{k^2(m+a)^2} \left\{ \left[\left(2 + 2k\Delta\tau + (k\Delta\tau)^2 \right) e^{-k\Delta\tau} - 2 \right]^2 - \left[6 - \left(6 + 6k\Delta\tau + 3(k\Delta\tau)^2 + (k\Delta\tau)^3 \right) e^{-k\Delta\tau} \right] \right\}. \quad (5.9)$$

Якщо в (5.9) виразити τ через p , використовуючи формули (5.2), (5.7)

$$\Delta\tau = \tau' - \tau_0 = \frac{2}{k} \sin \left(\sqrt[3]{k(m+a)p} \right) + (m+a)p, \quad (5.10)$$

тоді невідповідність Δ'' можна представити як функцію від змінних p , m і k ($\Delta'' = \Delta''(p, m, a, k)$).

Для виявлення деяких специфічних особливостей зміни величин, що досліджуються, розглянемо відносну невідповідність

$$\bar{\Delta}(p, m, a, k) = \frac{\Delta'(m) + \Delta''(p, m, a, k)}{2G(m, a, k)e(e+p)}; \quad G(m, a, k) = \frac{1-m}{2m} B(m, a, k). \quad (5.11)$$

На рис. 1 представлено графіки зміни $\bar{\Delta}(p, m, a, k)$ при різних постійних значеннях необоротної деформації p для гіпотетичного матеріалу, у якого $\tau_0 = 10^{-3}$, $k = 1000$, $c_{11} = 23,7 \times 10^4$, $c_{12} = 14,1 \times 10^4$, $c_{44} = 11,6 \times 10^4$ МПа.

З представлених графіків видно, що спочатку найбільше відхилення відносної невідповідності росте, досягаючи значення 21,4%, а потім зменшується. При цьому величина параметра m , при якому функція $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(p, m)$ для заданого значення p приймає екстремальні значення, постійно зменшується.

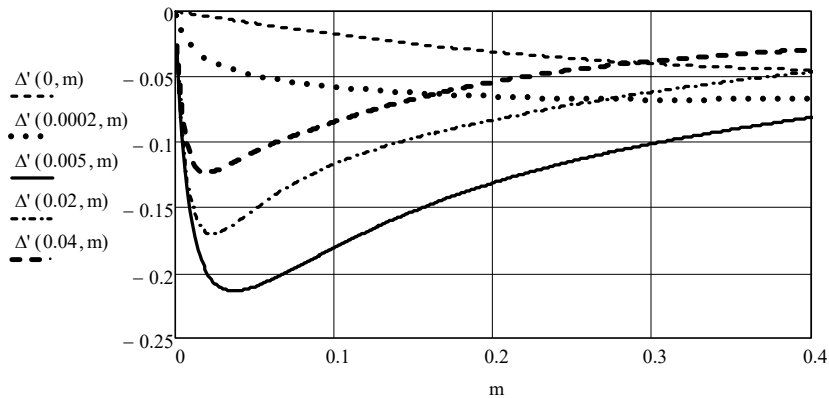


Рис. 1

Закономірність зміни параметра m в залежності від незворотної деформації в припущенні, що щільність розподілу меж пружності під-елементів задається виразом (5.1) ($k=1000$) і констант пружності кристалів $c_{11}=23,7 \times 10^4$, $c_{12}=14,1 \times 10^4$, $c_{44}=11,6 \times 10^4$ МПа, для трьох значень коефіцієнта зміцнення a : $a_2=0,003$, $a_4=0,01$, $a_6=0,02$ представлені на рис. 2. Через $m_{i,j}$ позначені значення m , знайдені на основі (3.14) з урахуванням (4.4), (5.9), отримані при різних деформаціях p_i і шести постійних коефіцієнтах зміцнення a_j

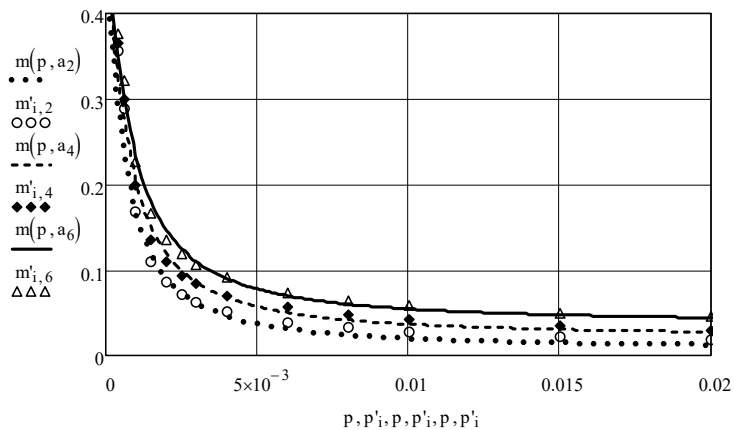


Рис. 2

Точками на рис. 2 позначено результати розрахунків, а суцільними лініями – графіки апроксимуючої функції

$$m(p, a, k) = \frac{m_0 + 0,29\sqrt{a}(kp)^{1,3}}{1 + (1,9 - 5,8\sqrt{a})(kp)^{1,3}}, \quad (5.12)$$

де m_0 – значення параметра m в пружній області деформування. Конкретизація функцій (5.12) здійснена на основі детальних чисельних досліджень системи (3.14), (4.4), (5.7) – (5.10). На основі (5.7) і (5.12) можна описати залежність між напруженнями і деформаціями на макроскопічному рівні, якщо відомі константи пружності кристалів, коефіцієнта зміцнення під-елемента і значення параметра, що фігурує в законі розподілу вихідних меж плинності. Для спрощення написів на рисунках параметр k , який

прийнятий рівним 1000, не вказаний. Скрізь функції від трьох змінних: p , a , k представляються як функції від двох змінних p , a . З наведеного графіка на рис. 2 видно, що параметр m різко зменшується на першому етапі незворотного деформування, а потім прагне до деякого постійного значення. При цьому параметри m і $b = \frac{m}{1-m}$ в незворотній області зменшуються більше ніж на один порядок. У числовому відношенні цей результат відрізняється на 40 ÷ 50% від передбаченої моделі Бервейє – Заул, в якому використовується уявлення про «пластичну релаксацію».

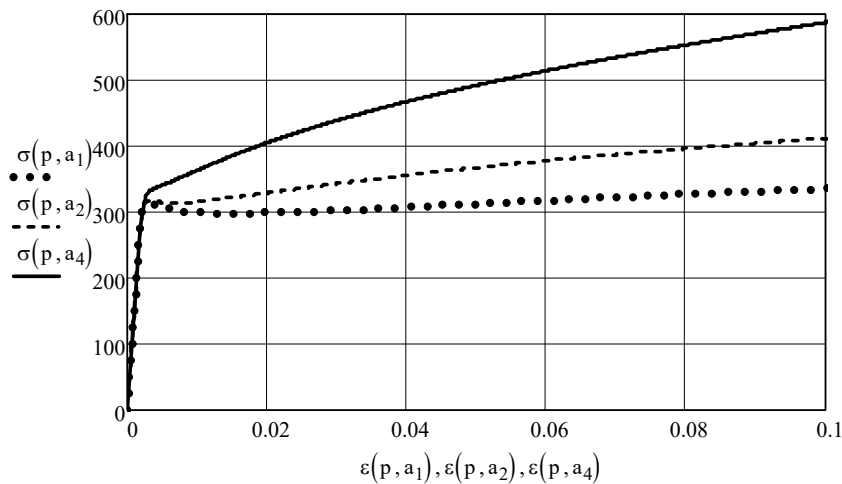


Рис. 3

На рис. 3 представлено діаграми деформування, що розраховані на основі формули (5.7) ($\sigma = 2Ge(p, m(p, a, k), a, k) = 2Ge(p, a, k)$) для трьох значень коефіцієнта зміцнення a : $a_1 = 0,0002$; $a_2 = 0,0015$; $a_4 = 0,01$. Ефект зменшення параметра m при незворотному деформуванні можна трактувати як ослаблення кінематичних зв'язків між під-елементами, що призводить до природної тенденції матеріалу до зниження флуктуацій напружень і зменшення модуля зсуву. З наведених на рис. 3 графіків видно, що при малих значеннях коефіцієнта зміцнення a (характерного для першої фази зміцнення монокристалів) на діаграмі навантаження $\sigma \sim \varepsilon$ проявляється плато або зуб плинності. При цьому вдається чисельно встановити і протяжність плато плинності. Якщо в кінці цієї ділянки процес одиничного ковзання припиняється і подальший процес здійснюється при множинному ковзанні, то розрахункова діаграма деформування має такий же вигляд, як і відповідна експериментальна діаграма навантаження. На ділянці множинного ковзання коефіцієнт зміцнення a , як правило, більше 0,01. Зауважимо, що подібні ефекти деформування описуються природним шляхом на основі принципу екстремуму невідповідності мір.

Фізичне пояснення подібних ефектів можна простежити на основі закономірностей зміни ваги необоротно деформованих під-елементів з ростом p . З представлених на рис. 4 графіків видно, що при значеннях коефіцієнта зміцнення a , які відповідають другій стадії зміцнення $a_4 = 0,01$ (множинного ковзання), з ростом p об'єм незворотно деформованих під-елементів збільшується. Однак при значеннях a , характерних для легкого ковзання, різке зменшення параметра m призводить до зупинки цього процесу, а в деяких випадках до зменшення кількості незворотно деформованих під-елементів. В останньому випадку в частині під-елементів відбувається розвантаження. Таким чином, при малих значеннях параметра зміцнення незворотні деформації зосе-

реджуються в невеликих об'ємах елемента тіла. Даний висновок добре узгоджується з результатами численних експериментів. Чисельні дослідження проводилися на основі формул (5.1) з урахуванням (5.2), (5.7), (5.12).

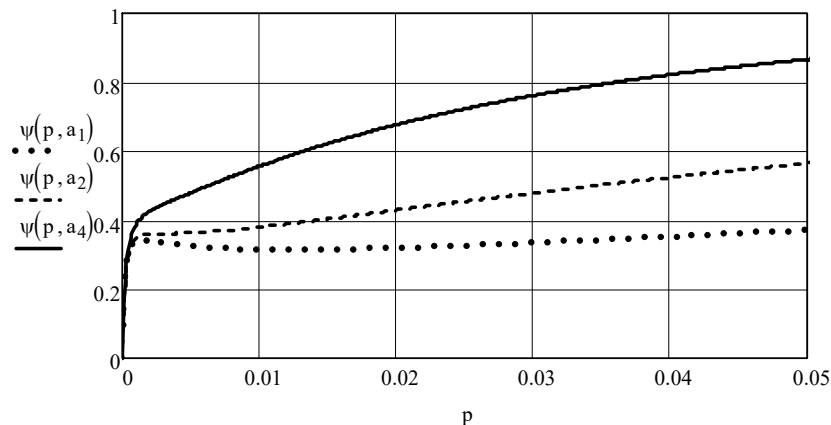


Рис. 4

Ефект, що пов'язаний з падінням напружень в початковий момент макротекучості, збільшується, якщо властивості матеріалу чутливі до швидкості деформування. Згідно (3.3), (3.4) межі плинності під-елементів залежать від параметра швидкості γ . В роботі [6] було показано, що в початковий момент настання плинності

$$\gamma = \lim_{\psi' \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\psi'} \sqrt{\dot{P}_{ij} \dot{P}_{ij}} d\psi}{\psi'} = \frac{\sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}}{m+a} = \frac{\dot{\epsilon}}{m+a},$$

де $\dot{\epsilon}$ – швидкість зміни модуля девіатора тензора загальної макроскопічної деформації. Якщо експеримент проводиться з $\dot{\epsilon} = \text{const}$, параметр γ різко зменшується на початковому етапі незворотного деформування, в результаті чого межі плинності під-елемента зменшуються і внаслідок цього виникає ефект, що пов'язаний з зубом плинності.

Закономірність зміни модуля зсуву при незворотному деформуванні для полікристалічних матеріалів з кубічною решіткою можна встановити на основі формул (4.5) і (5.12). Враховуючи, що

$$\frac{B}{2G} = b = \frac{m}{1-m}; \quad m = m(p, a, k); \quad b = b(p, a, k),$$

знайдемо

$$G'(p, a, k) = \frac{c_{44}}{10Ab(p, a, k)} \times \left[(2+3A)b(p, a, k) - 3 - 2A + \sqrt{[(2+3A)b(p, a, k) - 3 - 2A]^2 + 100A - b(p, a, k)} \right]. \quad (5.13)$$

З формули (5.13) видно, що зміна модуля зсуву при незворотному деформуванні залежить від констант пружності кристалів і параметра k , який впливає на форму діаграми навантаження на нелінійній ділянці зміцнення. Якщо коефіцієнт анізотропії $A=1$, то з (5.13) випливає, що $G'(p, a, k) = c_{44}$. Отже, в разі пружно ізотропних матеріалів, модуль зсуву не змінюється при незворотному деформуванні.

Для опису закономірностей зміни пружних характеристик елемента тіла при незворотному деформуванні необхідно прийняти умови про специфіку взаємодії матері-

альних частинок в під-елементах. Заслужують увагу два прості припущення: поточні значення параметра m (або b) впливають однаково на взаємодії матеріальних частинок в оборотно і необоротно деформованих під-елементах або тільки в необоротно навантажених під-елементах. У першому випадку

$$G(p, a, k) = G'(p, a, k),$$

а в другому

$$G(p, a, k) = G'(p, a, k)\psi'(p, a, k) + (1 - \psi'(p, a, k))G^*, \quad (5.14)$$

де G^* – початковий модуль пружності матеріалу, який обчислюється на основі формули (2.1); ψ' – вага необоротно деформованих під-елементів. Виходячи з припущення (5.14), на рис. 5 представлено графіки зміни відносного модуля зсуву $G1(p, a, k) = G(p, a, k)/G(0, a, k)$ для трьох значень коефіцієнта зміцнення a : $a_1 = 0,001$; $a_2 = 0,01$; $a_4 = 0,02$.

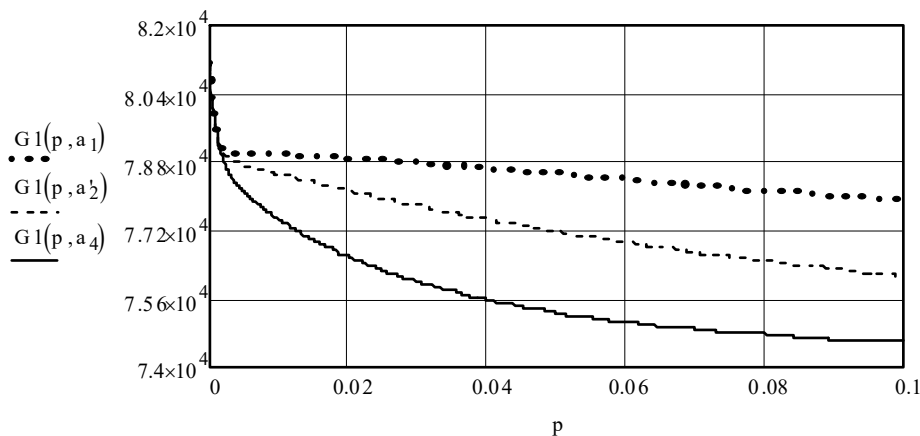


Рис. 5

Експериментальному дослідженню ефекту зміни G в залежності від p присвячено багато робіт [2, 10 та ін.]. Однак результати цих робіт можуть бути використані тільки для якісної перевірки формул (5.13) і (5.14), так як в них не наводяться значення констант пружності кристалів і діаграми навантаження $\sigma \sim \varepsilon$, на основі яких можна обчислити значення коефіцієнта k . Відзначимо, що на основі наведених формул можна зробити висновок, що модуль зсуву мало змінюється для матеріалів, у яких A близький до одиниці, і може зменшуватися на $8 \div 10\%$ у випадку заліза і міді. Зазначений інтервал змін узгоджується з експериментальними результатами [2, 10 та ін.]. З наведеного на рис. 5 графіка видно, що модуль зсуву швидко зменшується на першому етапі незворотного деформування, а потім асимптотично прагне до постійного значення.

Висновки.

Встановлено рівняння зв'язку флуктуацій тензорів напружень і деформацій, що виникають на рівнях матеріальних анізотропних частинок, які входять до структури під-елементів, і на рівні системи під-елементів. Дослідження закономірності зміни взаємозв'язку між флуктуаціями напружень і деформацій проводилось на основі принципу екстремуму невідповідності макроскопічних мір з відповідними усередненими значеннями мікроскопічних аналогів. Показано, що на невідповідність мір впливають пружні властивості кристалів, коефіцієнтів зміцнення і вид функції щільності розподілу меж пружності під-елементів.

На основі числових досліджень виразів для невідповідності мір показано, що відношення флуктуацій напружень до флуктуацій деформацій різко зменшується на

першому етапі незворотного деформування, а потім прагне до деякого постійного значення. Якщо функція щільності розподілу меж плинності не залежить від зміни кінематичних зв'язків між під-елементами, а коефіцієнт анізотропії кристалів збігається з коефіцієнтом анізотропії заліза, вказане відношення при незворотних деформаціях близько 10% приблизно в 30 разів менше, ніж в пружній області.

Показано, що на основі принципу екстремуму невідповідності мір навіть такі специфічні ефекти, як поява плато або зуба плинності, протяжність цих ділянок і зміни макроскопічних пружних констант в області незворотних деформацій описуються природним чином без використання якихось додаткових умов.

Запропонований підхід до опису закономірності зміни флуктуацій напружень і деформацій на локальних рівнях дозволяє описати з єдиних позицій широкий спектр явищ, які можна побачити при монотонному і немонотонному неізотермічному навантаженні матеріалів.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу взаємозв'язку між локальними та загальними механічними параметрами, які описують термореологічні властивості полікристалічних матеріалів. Проаналізовано зміну параметрів, що характеризують зв'язок між коливаннями напружень і деформацій на двох рівнях структури. При цьому використовується припущення про незмінність функції розподілу густини границь пружності під-елементів у процесі незворотної деформації. Це дослідження проводиться на основі принципів невідповідності макроскопічних мір з відповідними мікроскопічними аналогами та ортогональності коливань напружень та деформацій. Показано, що при малих значеннях коефіцієнта затвердіння під-елементів, характерних для стадій легко ковзаючих монокристалів, ця модель описує такі специфічні ефекти, як плато чи зуб пружності та зміна пружних характеристик при незворотних деформаціях.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тензор, напруження, деформація, структура, анізотропія, монокристал, полікристал.

1. Доцинский Г.А., Погужева Н.В. Исследование изменения упругих констант материала при пластической деформации // Изв. Томского политехн. ин-та. – 1972. – 225. – С. 23 – 25.
2. Марина В.Ю. Многоэлементная модель среды, описывающая переменные сложные неізотермические процессы нагружения // Автореферат диссертации д-ра. физ.-мат. наук. – Киев: Институт механики АН Украины, 1991. – 36 с.
3. Марина В.Ю. Уравнения упругопластического тела при пропорциональном неізотермическом нагружении // Прикл. механика. – 1997. – №6. – С. 9 – 17.
4. Марина В.Ю. Принципы перехода от микро к макро напряжённо-деформированному состоянию // Известия АН Молдовы. Серия: Математика. – 1998. – № 2. – С.16 – 24.
5. Марина В.Ю., Марина В.И. Исследование влияния фактора анізотропии на закономерность изменения объёма в элементах микроструктуры // Металлофизика. Новейшие Технологии. – 2017. – 39, № 3. – С. 387 – 399.
6. Марина В.Ю., Марина В.И. Анализ соотношений между локальными и общими механическими параметрами, применяемыми для описания поведения поликристаллических материалов // Металлофизика. Новейшие Технологии. – 2020. – 42, № 3. – С. 415 – 431.
7. Островский А.А. Изменение модуля упругости предварительно деформированной стали // Прикл. механика. – 1976. – XII, № 5. – С.124 – 128.
8. Шевченко Ю.Н. Термоязкоупругопластические процессы деформирования элементов твёрдого тела (обзор) // Прикл. механика. – 1994. – 30, № 3. – С. 3 – 24.
9. Шевченко Ю.Н., Марина В.Ю. Структурная модель среды при неізотермическом процессе нагружения // Прикл. механика. – 1976. – XII, № 12. – С.19 – 27.
10. Шермогор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – Москва: Наука, 1977. – 400 с.
11. Berveiller M., Zaoui A. An Extension of the Self-Consistent Scheme to Plastically-Flowing Polycrystals // J. Mechanics and Physics of Solids. – 1979. – 26. – P. 325 – 344.
12. Hill R. The elastic behavior of a crystalline aggregate // Proc. Physical Soc. – 1952. – 65, № 5. – P. 349 – 354 p.
13. Kroner E. On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics // Int. J. Eng. Sci. – 1963. – P. 261 – 278.

Надійшла 06.10.2020

Затверджена до друку 24.06.2021