

Я. Я. Рушицький¹, В. М. Юрчук¹,
О. М. Григорчук², Я. В. Симчук³

НЕХАРАКТЕРНА ЕВОЛЮЦІЯ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПОДИНОКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ХВИЛІ

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Несерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: rushch@inmtech.kiev.ua;
e-mail: vasil_2008@ukr.net

²Київський національний університет будівництва і архітектури,
пр-т Повітрофлотський, 31, 03037, Київ, Україна;
e-mail: hryhorchuk.om@knuba.edu.ua

³НТУУ «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
пр-т Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: yar_simchuk@ukr.net

Abstract. The evolution of a nonlinear elastic cylindrical wave of displacement is analyzed theoretically and numerically within the framework of the five-constant Murnaghan model for a not characteristic initial profile in the form of Macdonald function. In contrary to most nonlinear waves in materials, which have periodically arranged or solitary humps, this wave has not the hump, is monotonically decreased, and has the concave down profile. The basic novelty is that the evolution of waves is studied by the approximate methods by taking into account the first three approximations. Some essential distinctions just this wave are shown – the not characteristic profile is evolved in the not characteristic way. First, the features of three types of waves are briefly described, which can be considered as the characteristic properties – harmonic wave (periodically repeated profile) and two solitary waves with the initial profiles in the form of the Gauss function (symmetric profile) and the Whittaker function (nonsymmetric profile). Further, the solitary wave with the initial profile in the form of the Macdonald function is analyzed more in detail theoretically and numerically. The distortion of the initial profile due to the nonlinear interaction of the wave itself and the increase of the maximum amplitude during the wave propagation is common to these profiles. The significant features of the Macdonald wave are shown – the noncharacteristic initial profile (profile without the classical hump) evolves in a noncharacteristic way – the profile becomes much steeper, is still without hump and remaining convex down.

Key words: solitary elastic cylindrical wave; five-constant Murnaghan potential; approximate method; Macdonald initial wave profiles; not characteristic evolution.

Вступ.

В теорії хвиль еволюцією хвилі називають зміну профілю хвилі при її поширенні. Хвиля поширюється одночасно в просторі і в часі. Оскільки хвиля характеризується фазою $\sigma = x - vt$, то при відомій швидкості хвилі v фіксована точка простору відповідає фіксованому часу. Тому еволюцію хвилі можна вивчати як процес, що розвивається в просторі або у часі. Математично еволюція описується еволюційним рівнянням. У випадку хвиль зміщення в матеріалах вираз $u(x - vt)$, отриманий звичайно як розв'язок нелінійного хвильового рівняння, вважають таким, що описує еволюцію початкового профілю хвилі.

Слід зазначити, що в теорії хвиль зміну профілю хвилі теж називають спотворенням цього профілю. Це явище є предметом аналізу сучасної теорії хвиль [7, 8, 11, 15, 21, 35].

Поодинокі хвилі (solitary waves) вивчаються в теорії хвиль давно. У механіці матеріалів такі хвилі спостерігаються в експериментальних дослідженнях імпульсів, які діють на виготовлені з певних матеріалів зразки [1, 31]. Теоретично такі хвилі в матеріалах вивчені фрагментарно. Означаються поодинокі хвилі за критерієм форми профілю: він описується фінітною функцією (відмінною від нуля лише на скінченному відрізку), або функцією скінченної ваги (величина площі під графіком функції є такою на скінченному відрізку, що поза цим відрізком нею можна знехтувати – площа-вага зосереджена на скінченному відрізку). Типовим прикладом поодинокі хвилі є хвиля з профілем у вигляді функції Гаусса (дзвіноподібна чи горбоподібна хвиля, яка є якраз функцією скінченної ваги). Найпростіша поодинока хвиля може описуватись класичним розв'язком Д'Алямбера $u(x, t) = f(x - ct)$ лінійного хвильового рівняння $u_{,tt} - c^2 u_{,xx} = 0$ для одновимірної хвилі зміщення [1, 6, 19 – 23].

Звичайно, хвиля Д'Алямбера відповідає лінійній теорії пружності, в рамках якої еволюцію описати не можна. Здебільшого, механізм еволюції пов'язаний з нелінійністю деформування матеріалу. Тому еволюція хвиль в матеріалах (хвиль як гармонічних, так і поодиноких) вивчається в рамках моделей нелінійної теорії пружності.

Далі еволюція хвилі вивчається з застосуванням однієї з найбільш розвинених моделей нелінійної теорії пружності – п'ятиконстантної моделі Мернагана [17]. Найпростіший варіант нелінійного хвильового рівняння в рамках цієї моделі включає лише квадратичну нелінійність. Таке рівняння проаналізоване досить докладно у випадку плоских хвиль [2, 6, 19 – 22]. Саме плоскі хвилі при поширенні виявляють ряд найбільш характерних особливостей еволюції початкового профілю.

1. Особливості еволюції, характерні для нелінійно пружних плоских гармонічних хвиль.

Хоча плоскі хвилі поділяються на поздовжні та поперечні, але в загальних рисах картина еволюції цих хвиль є дуже подібною для обох типів хвиль і у випадку гармонічного профілю вважається класичною. Тому для демонстрації характерних особливостей еволюції цього типу хвиль досить вибрати плоску поздовжню хвилю.

Отже, нехай лише ця хвиля початково збуджується і рухається в напрямку осі абсцис у вигляді хвилі зміщення $u_1(x_1, t)$. Тоді її рух можна описати квадратично нелінійним хвильовим рівнянням [2, 6, 19 – 22]

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \text{ або } \rho u_{1,tt} - u_{1,tt} - (c_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}, \quad (1)$$

де ρ – густина; λ, μ, A, B, C – пружні сталі моделі Мернагана; $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – швидкість хвилі в лінійному наближенні; $N_1 = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]$.

Нехай початковий профіль хвилі відповідає гармонічній хвилі, тобто він заданий функцією такого вигляду $u_1(x_1, t=0) = u_{1o} \cos k_L x_1$ (u_{1o} – початкова амплітуда хвилі; k_L – хвильове число). Тоді відповідна хвиля у лінійній теорії має вигляд [2, 6, 19 – 22]

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) \quad (\omega - \text{частота хвилі}). \quad (2)$$

В рамках лінійного підходу така хвиля рухається без змін і тому еволюцію такий підхід не описує.

Класичний аналіз хвилі з початковим профілем (2) в рамках нелінійного підходу оснований на наближеному розв'язанні нелінійного рівняння (1) і полягає у застосуванні методів послідовних наближень та повільних змін амплітуди. Нульове наближення співпадає з розв'язком рівняння (1) і має вигляд (2). Перше наближення є

розв'язком неоднорідного лінійного хвильового рівняння $u_{1,tt}^{(1)} - (\tilde{n}_L)^2 u_{1,11}^{(1)} = (N_1/\rho)u_{1,11}^{(0)}u_{1,1}^{(0)}$. Тоді еволюційне рівняння, яке відповідає двом першим наближенням, складається з суми двох перших гармонік [2, 6, 19 – 22]

$$\begin{aligned} u_1^{(0+1)}(x_1, t) &= u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (3)$$

Цей розв'язок можна представити у коротшому вигляді

$$u_1^{(0+1)}(x, t) = u_{1o} \cos \sigma + u_{1o} M x_1 \cos 2\sigma; \quad (4)$$

$$M = \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} u_{1o} (k_L)^2 = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{k_L^2}{c_L^2} = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{\omega^2}{c_L^4}; \quad \sigma = k_L x_1 - \omega t.$$

Друге наближення знаходиться як розв'язок неоднорідного лінійного хвильового рівняння $u_{1,tt}^{(2)} - (c_L)^2 u_{1,11}^{(2)} = (N_1/\rho)u_{1,11}^{(1)}u_{1,1}^{(1)}$. Тоді еволюційне рівняння, що відповідає трьом першим наближенням, складається з суми першої, другої і четвертої гармонік [4, 21, 22, 27, 29, 30, 34]

$$\begin{aligned} u_2^{(0+1+2)}(x_1, t) &= u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos \sigma + u_{1o} M_L x_1 \cos 2\sigma + \\ &+ u_{1o} (M_L)^3 (x_1)^3 \left[-\frac{8}{3} + \frac{5}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left(-\frac{4}{3} + \frac{11}{8(k_L)^2 (x_1)^2} \right) \cos 4\sigma \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

На основі формул (2), (4), (5) було побудовано сотні графіків, що описують еволюцію хвиль для різних значень трьох основних параметрів – початкової максимальної амплітуди, частоти хвилі та сукупності механічних характеристик конкретного матеріалу. Основний висновок з отриманого масиву графіків полягає у тому, що існує загальна схема зміни профілю хвилі (сценарій еволюції). Перш за все, хвиля при поширенні в нелінійно пружному матеріалі взаємодіє сама з собою і генерує додатково нові хвилі, які разом створюють картину еволюції. Ця картина у вкороченому вигляді показана на рис. 1 [4, 21, 22, 29, 30]. Більш конкретно: показана залежність амплітуди хвилі від часу і відстані поширення хвилі – три стадії еволюції хвилі, отримані при числовому моделюванні за формулами (4) та (5).

Рис. 1, а, б відповідають початковій стадії хвильового руху при врахуванні трьох перших наближень. Рис. 1, в – більш тривалому руху хвилі (біля 10 довжин хвилі) і першому наближенню (верхня лінія для додатних значень амплітуди), першому + другому (нижня лінія для додатних значень амплітуди), і першому + другому + третьому (середня лінія для додатних значень амплітуди). Рис. 1, г відповідає вдвічі більшій тривалості руху хвилі (біля 20 довжин хвилі) і першому наближенню (середня лінія для додатних значень амплітуди), першому + другому (верхня лінія для додатних значень амплітуди) і першому + другому + третьому (нижня лінія для додатних значень амплітуди). Рис. 1, д показує тривимірне зображення еволюції в координатах «час поширення – відстань поширення – зміщення».

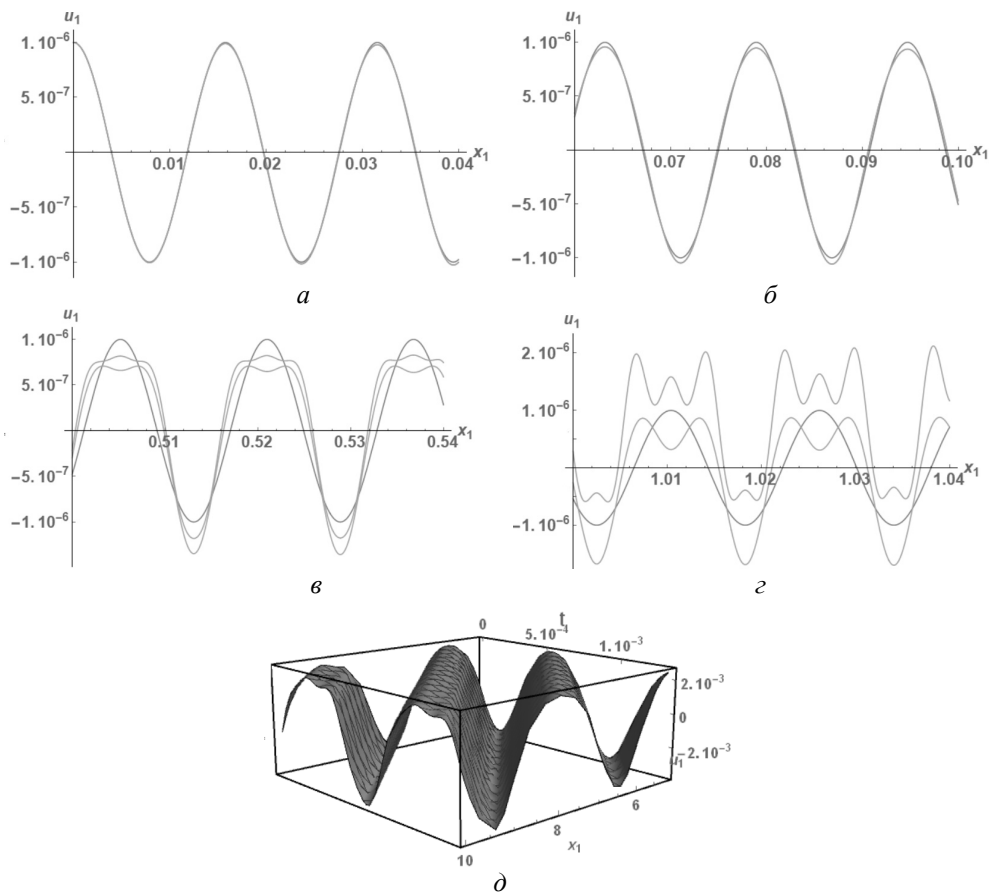


Рис. 1

Рис. 1 показує у цілому весь сценарій еволюції гармонічної хвилі. Класичний сценарій відповідає першим двом наближенням і вважається, що головний хвильовий ефект полягає у поступовому переході від початкового профілю (першої гармоніки) до профілю, що відповідає другій гармоніці. Говорять, що початковий сигнал з частотою ω при проходженні через квадратично нелінійне середовище перетворюється в сигнал з подвоєною частотою 2ω чи в сигнал зі зменшеною у два рази довжиною хвилі.

Слід зазначити, що нелінійне хвильове рівняння типу (1) з'являється не лише у механіці. Відповідні оптичні хвилі були вивчені Бломбергенном [9] і його результати були удостоєні Нобелівської премії з фізики 1980 року (за його внесок у розвиток лазерної спектроскопії). Ці результати включають опис перетворення початкової гармоніки (промінь рубінового лазера у вигляді червоного світла з довжиною хвилі 6940 ангстремів) в другу гармоніку (синє світло з довжиною хвилі 3470 ангстремів), коли світло поширюється через кристал калію дигідрофосфату KN_2PO_4 [33].

Фактично, явище перетворення першої гармоніки у другу можна побачити на рис. 1, в, г – саме нижня лінія для додатних значень амплітуди показує поступову трансформацію одного горба періодичного профілю на два на періоді одного горба.

Однак, рис. 1 теж показує, що врахування третього наближення виявляє ще один хвильовий ефект – хвиля з періодичною системою горбів на кожному періоді перетворює в процесі руху один горб на три на одному періоді. При цьому формула (5) показує існування третього доданка з параметрами четвертої гармоніки.

Таким чином, еволюція гармонічної хвилі характерна тим, що зі збільшенням часу чи шляху поширення хвилі її профіль на одному періоді утворює з одного кілька горбів. Цей нелінійний хвильовий ефект супроводжується сталістю періоду – період (підосва) хвилі не змінюється впродовж еволюції хвилі.

2. Особливості еволюції, характерні для плоскої нелінійно пружної поодинокі хвилі з початковим профілем у вигляді функції Гаусса (дзвіноподібної хвилі).

Початковий профіль дзвіноподібної хвилі визначається формулою [6, 10, 21, 22, 24, 27 – 30]

$$u_1(x_1, t = 0) = u_{10} e^{-[(ax_1)^2/2]}. \quad (6)$$

Тут a – параметр, що задає довжину підшви хвилі.

Тоді відповідна хвиля у лінійному наближенні (лінійній теорії пружності) має вигляд

$$u_1(x_1, t) = u_{10} e^{-\sigma^2/2}, \quad (7)$$

де фаза хвилі задається виразом $\sigma = a(x_1 - c_L t)$.

Далі нелінійне хвильове рівняння (1) слід трансформувати до вигляду лінійного рівняння зі змінною швидкістю поширення хвилі

$$u_{1,tt} - v^2 u_{1,11} = 0. \quad (8)$$

Тут швидкість $v = v_L \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}$, ($\alpha = [N_1 / (\lambda + 2\mu)]$) є не просто змінною – вона залежить від градієнту деформації (від розв'язку задачі (7)) і є тому простою хвилею за Ріманном.

Нелінійне рівняння (8) розв'язувалося наближеним методом обмеження на градієнт зміщення [24, 26, 28, 33]. Згідно з цим методом, нульове наближення відповідає розв'язку класичного лінійного хвильового рівняння

$$u_{1,tt} - c_L^2 u_{1,11} = 0 \quad (9)$$

і має вигляд дзвіноподібної хвилі

$$u_1^{(1)}(x_1, t) = u_{10} e^{-a^2(x_1 - v_L t)^2/2}. \quad (10)$$

Розв'язок, який відповідає двом першим наближенням (нульовому і першому), складається з двох доданків, кожен з яких описує певну хвилю – початкову дзвіноподібну «першу гармоніку») і «другу гармоніку», амплітуда якої зростає при русі хвилі

$$u_1^{(0+1)}(x_1, t) = A^0 e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]} - (1/2) t \alpha c_L a^2 (x_1 - c_L t)^2 (A^0)^2 e^{-a^2(x_1 - c_L t)^2}. \quad (11)$$

Присутність двох доданків свідчить про те, що врахування двох перших наближень уможливило опис еволюції хвилі.

Розв'язок, що відповідає трьом першим наближенням (нульовому, першому і другому), складається з трьох доданків

$$u(x_1, t) = A^0 e^{-\sigma^2/2} - (1/2) \alpha v_L a^2 t (A^0)^2 \sigma^2 e^{-\sigma^2} - (1/8) \alpha^2 v_L a^3 t (A^0)^3 \sigma^3 e^{-3\sigma^2/2}. \quad (12)$$

Ці доданки описують певні хвилі – початкову дзвіноподібну («першу гармоніку») і відповідні «другу та третю гармоніки», амплітуди яких зростають при русі хвилі.

При порівнянні розв'язків (5) і (12) можна спостерегти, що третє наближення у випадку гармонічної хвилі враховує четверту гармоніку, тоді як у випадку дзвіноподібної – «третю гармоніку».

Слід зазначити, що у вираз для амплітуди хвилі (12) входить явно квадрат фази σ у другому доданку і куб – у третьому. Цей факт є характерним для поодиноких хвиль і не присутній у вказаному вище нелінійному описі еволюції гармонічної хвилі.

На рис. 2 показано характерну залежність амплітуди хвилі u_1 від відстані поширення хвилі x_1 [4, 21, 22, 29, 30]. Усі графіки побудовані за формулою (12). Рис. 2, *a* відповідає початковій стадії еволюції. Нижній графік показує початковий профіль $u_1^{(0)}$, верхній – профіль $u_1^{(0+1)}$ (два перші наближення). Рис. 2, *б* відповідає розвиненій стадії еволюції і відрізняється від попереднього лише верхнім графіком $u_1^{(0+1+2)}$, який побудований з врахуванням перших трьох наближень. Рис. 2, *в*, *г* показують два профілі ($u_1^{(0+1)}$ і $u_1^{(0+1+2)}$) і кожен утворений з двох горбів, але рисунки відрізняються шляхом, який пройшла хвиля (другий відповідає досить сформованій еволюції).

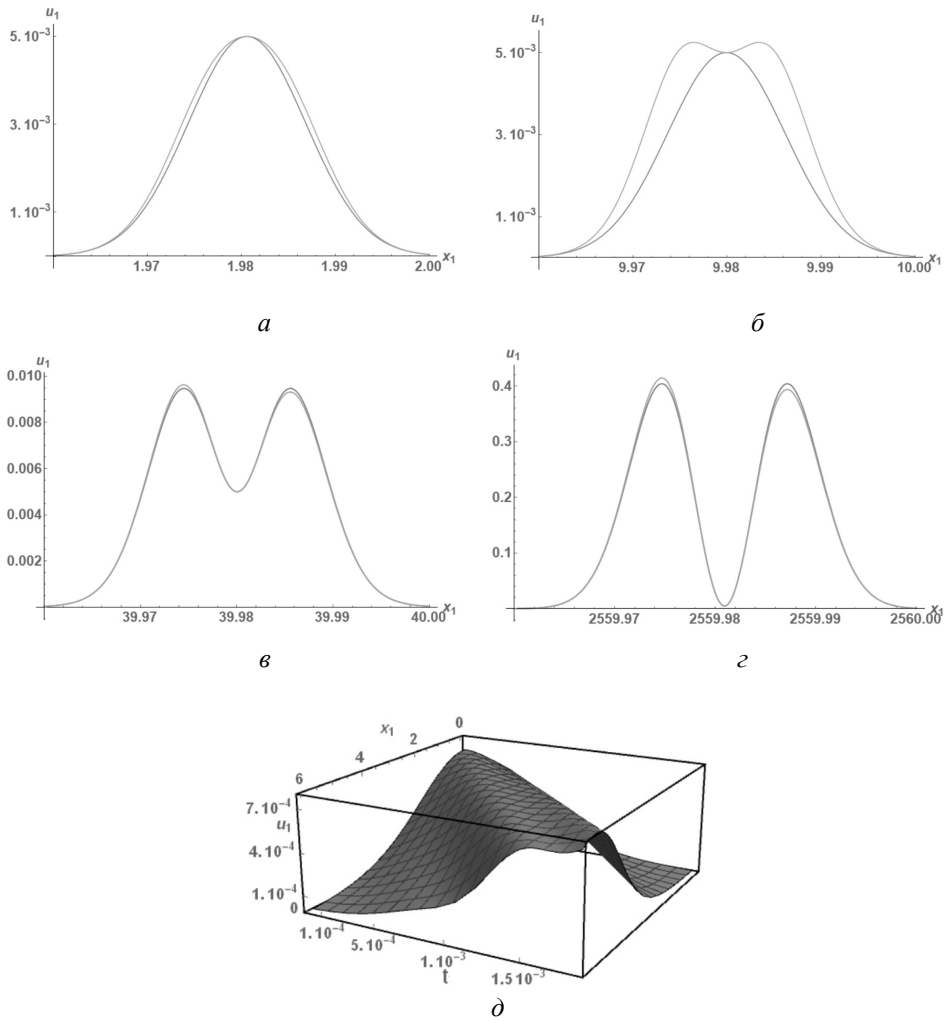


Рис. 2

Рис. 2 свідчить, що подібно до гармонічної хвилі, дзвіноподібна показує такий же головний хвильовий ефект – поступовий перехід від початкового профілю («першої гармоніки»; одного горба) до профілю, що відповідає «другій гармоніці»: двом однаковим горбам, які прилягають один до одного і мають спільну підшву, рівну підшві початкового горба. Таким чином, початковий сигнал у вигляді одного «дзвона» з заданою підшвою при проходженні через квадратично нелінійне середовище перетворюється в сигнал з двома «дзвонами».

Тут виявляються певні особливості. Наприклад: 1. «Друга гармоніка» завжди дає від'ємну добавку. Отже «дзвін» в своїй верхній частині стає тоншим, тобто схилю «дзвона» стають крутішими. 2. Верхня частина «дзвона» западається і утворюються два «дзвони». 3. Еволюція правого і лівого «дзвонів» є різною – врахування перших двох наближень показує підвищення лівого і зниження правого «дзвонів». Цей ефект є неочікуваним як і ряд інших нелінійних хвильових ефектів.

Рис. 2, d показує тривимірне зображення еволюції в координатах «час поширення – відстань поширення – зміщення».

У показаному на рис. 2 сценарії еволюції важливими є два характерні для гармонічної і дзвіноподібної хвиль ефекти. Перший ефект полягає у тому, що поодинокі хвиля із заданою підшоною горба перетворює в процесі руху один горб на два, а згодом і на три. Другий ефект пов'язаний зі сталістю підшови – вона не змінюється впродовж еволюції хвилі.

3. Особливості еволюції, характерні для плоскої нелінійно пружної поодинокі хвилі з початковим профілем у вигляді функції Уіттекера.

Початковий профіль хвилі визначається формулою [5, 10, 13, 21, 22, 24, 27 – 30, 32, 34]

$$F(x_1) = W_{1/4;1/4}(ax_1), \quad (13)$$

де $W_{1/4;1/4}(ax_1)$ – функція Уіттекера і a – параметр, що задає довжину підшови хвилі.

Тоді формула для наближеного обчислення форми хвилі методом обмеження на градієнт зміщення у вигляді трьох перших наближень є такою [5, 10, 24, 27 – 30, 34]:

$$u_1(x_1, t) = a^0 W_{1/4;3/4}(ax_1) - (1/2)t\alpha c_L(a)^2 (a^0)^2 \left(W'_{1/4;1/4}(ax_1)\right)^2 + \\ + (1/8)t(\alpha)^2 c_L(a)^3 (a^0)^3 \left(W'_{1/4;1/4}(ax_1)\right)^3. \quad (14)$$

Якщо використати загальну формулу для обчислення похідної функції Уіттекера

$$\frac{d}{dz} W_{\lambda, \mu}(z) = \left(\frac{\lambda}{z} - \frac{1}{2}\right) W_{\lambda, \mu}(z) - \frac{1}{z} \left[\mu^2 - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2\right] W_{\lambda-1, \mu}(z)$$

і вставити вираз

$$\left(W_{1/4;1/4}(\sigma)\right)' = \left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2}\right) W_{1/4;1/4}(\sigma) \quad (15)$$

у формулу (14), то вона запишеться у такому вигляді:

$$u_1(x_1, t) = a^0 W_{1/4;1/4}(\sigma) - (1/2)t\alpha c_L(a)^2 (a^0)^2 \left(\left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2}\right) W_{1/4;1/4}(\sigma)\right)^2 + \\ + (1/8)t(\alpha)^2 c_L(a)^3 (a^0)^3 \left(\left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2}\right) W_{1/4;1/4}(\sigma)\right)^3. \quad (16)$$

Як уже зазначалося раніше, всі рівняння типу (14) можна вважати еволюційними – вони описують зміну початкового профілю поодинокі хвилі внаслідок прямої залежності нелінійних доданків від часу і зміну цього профілю через наявність нелінійних доданків.

Структура формули (16) вже не є подібною до структури відповідних формул для гармонічної та дзвіноподібної хвиль. Квадрат і куб функції Уіттекера вже не можна вважати гармоніками навіть умовно.

Слід зауважити, що самий початковий профіль хвилі (14) не є характерним – він не має горба, який був у двох попередніх хвилях. Крім того, він є несиметричним, тоді як попередні були симетричними. Еволюція цих симетричних профілів була різною – симетричний профіль гармонічної хвилі при формуванні двох горбів залишався

симетричним і симетричний профіль дзвіноподібної хвилі втрачав симетрію окремого горба щодо вертикальної лінії, яка проходить через верхню точку горба, і зберігав симетрію двох горбів щодо вертикальної лінії, яка проходить через точку дотику горбів.

На рис. 3 показано залежність амплітуди хвилі u_1 від відстані поширення хвилі x_1 . Усі графіки побудовані за формулою (16). Рис. 3, *a* відповідає розвиненій стадії еволюції. Нижній графік показує початковий профіль $u_1^{(0)}$, верхній – профіль $u_1^{(0+1)}$ (два перші наближення). Рис. 3, *б, в* містять два профілі ($u_1^{(0+1)}$ і $u_1^{(0+1+2)}$). Кожен показує тенденцію до утворення двох горбів, але рисунки відрізняються шляхом, який пройшла хвиля (другий відповідає досить сформованій еволюції). Рис. 3, *г* показує тривимірне зображення еволюції в координатах «час поширення – відстань поширення – зміщення».

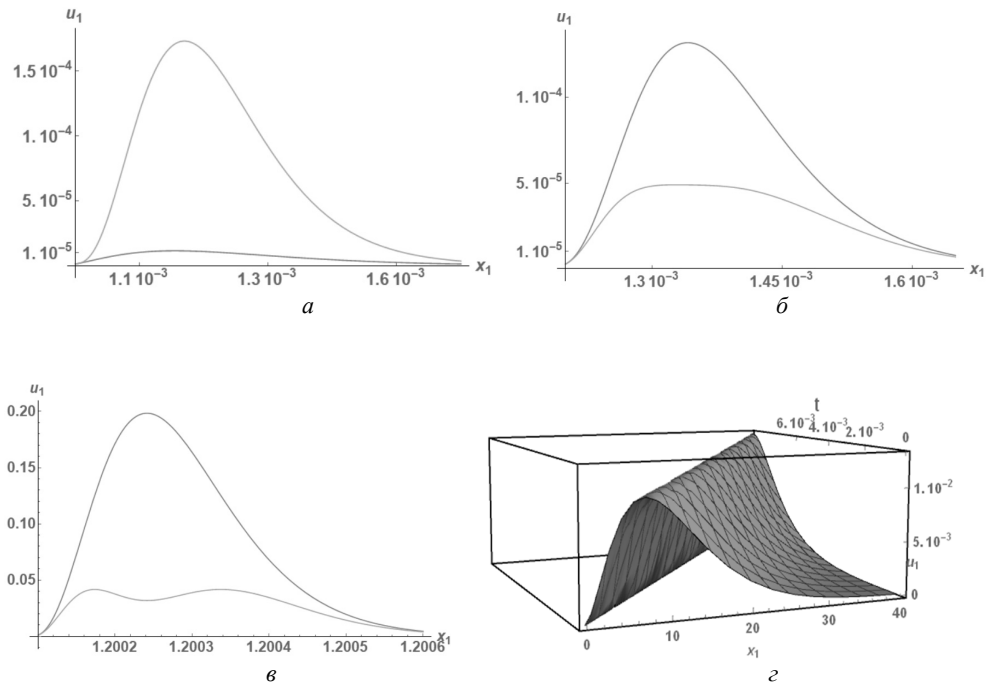


Рис. 3

Отже, еволюція несиметричного профілю (13) відбувається таким чином, що спочатку його максимальна амплітуда зростає суттєво, що видно з рис. 3, *a*. Як свідчать рис. 3, *б, в*, вплив третього наближення є значним і таким, що зменшує амплітуду у рази. Профіль хвилі змінюється в процесі руху хвилі, залишаючись несиметричним.

У показаному на рис. 3 сценарії еволюції важливими є два характерні для попередніх хвиль (гармонічної і дзвіноподібної) ефекти. Перший ефект полягає у тому, що поодинокі хвилі із заданою підшовою горба перетворює в процесі руху один горб на два. Другий ефект пов'язаний зі сталістю підшови – вона не змінюється впродовж еволюції хвилі – два нові горби утворюються на спільній підшові, яка задана початковим профілем.

4. Особливості еволюції, характерні для циліндричної нелінійно пружної поодинокі хвилі з початковим профілем у вигляді функції Макдональда.

Циліндрична хвиля вибрана для аналізу з тих міркувань, що вона за початковим профілем є нехарактерною для більшості вивчених нелінійних хвиль в матеріалах (гармонічних і поодинокіх). Профіль цієї хвилі не має горба і описується спадною і опу-

клою вниз функцією скінченної ваги (функцією Макдональда [18,24]). Тому є певні підстави вважати, що еволюція такої хвилі буде теж нехарактерною.

Розглянемо циліндричну радіальну хвилю зміщення, яка описується нелінійним хвильовим рівнянням, близьким до рівняння, яке описує плоскі хвилі. Така хвиля поширюється в нескінченному просторі з циліндричною круговою порожниною в радіальному напрямку. Рух хвилі збуджується імпульсом, прикладеним до поверхні порожнини. Циліндрична система координат $Or\vartheta z$ вибирається таким чином, що вісь Oz збігається з віссю порожнини. Тоді задача є осесиметричною і залежить від двох змінних – радіуса r і часу t . Ненульовими є радіальне зміщення u_r , і три компоненти тензора напружень σ_{rr} , $\sigma_{\vartheta\vartheta}$, σ_{zz} . Лінійне рівняння руху має вигляд

$$\mu \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \left[\frac{1}{r} (ru_r)_{,r} \right]_{,r} - \rho u_{r,tt} = 0. \quad (17)$$

Відповідне нелінійне рівняння в рамках моделі Мернагана є таким [24]:

$$\begin{aligned} (c_L)^{-2} u_{r,tt} - \left(u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = \\ = -\alpha_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \alpha_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \alpha_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \alpha_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \alpha_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2; \\ \alpha_1 = 3 + \frac{2(A+3B+C)}{\lambda+2\mu}; \quad \alpha_2 = \frac{\lambda+2B+2C}{\lambda+2\mu}; \quad \alpha_3 = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}; \\ \alpha_4 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+2C}{\lambda+2\mu}; \quad \alpha_5 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+C}{\lambda+2\mu}. \end{aligned} \quad (18)$$

Рівняння (18) аналізувалося раніше [24] для випадку, коли початковий профіль хвилі описується функцією Ханкеля. Цей випадок є класичним для лінійного хвильового рівняння (17) і описаний в підручниках з лінійної теорії пружності [1, 3]. Звичайно вводять потенціал $\Phi(r, t)$ за формулою $u_r = \Phi_{,r}$ і тоді рівняння (17) стає більш простим $\Phi_{,tt} - (c_L)^2 [\Phi_{,rr} + (1/r)\Phi_{,r}] = 0$. Саме це рівняння має розв'язок у вигляді функції Ханкеля першого роду і першого порядку $u_r^{(1)}(r, t) = u_r^o H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}$, де u_r^o є заданим в умові на поверхні порожнини амплітудним множником

$$u_{ro} = - \frac{p_o k_L}{k_L (\lambda + 2\mu) H_0^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o} H_1^{(1)}(k_L r_o)}, \quad \text{а } k_L = (\omega/v_L), \quad v_L = \sqrt{[(\lambda + 2\mu)/\rho]}$$

є хвильовим числом і фазовою швидкістю лінійної плоскої поздовжньої хвилі. Цей розв'язок свідчить, що хвиля гармонічна за часом, а за просторовою координатою є такою лише асимптотично. Інтенсивність (амплітуда) хвилі зменшується з часом поширення згідно з властивостями функції Ханкеля $H_1^{(1)}$.

При аналізі нелінійного рівняння (18) для хвиль з профілем функції Ханкеля спостерігалось, що в рамках різних варіантів методу послідовних наближень доданок з коефіцієнтом α_1 вносить основний вклад в еволюцію і іншими доданками можна знехтувати. Цей факт дає підстави для спрощення рівняння до вигляду [24], зручному для використання методу обмеження на градієнт зміщення

$$(c_L)^2 (1 - \alpha_1 u_{r,r}) \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0. \quad (19)$$

Отже, нелінійне рівняння (19), яке описує циліндричну радіальну хвилю, має структуру, ідентичну відповідному рівнянню для плоскої поздовжньої хвилі – однорідному лінійному хвильовому рівнянню (1) з швидкістю хвилі, нелінійно залежною від розв’язку. Тепер можна застосувати до аналізу рівняння (19) метод обмеження на градієнт зміщення. Однак тут виникає нова ситуація порівняно з плоскими хвилями – оператор хвильового рівняння інший, градієнт зміщення інший, сама хвиля і її фаза інші і т.п. Початковий профіль хвилі треба приймати у вигляді функції $u_r(r, t=0) = F(r)$. Тоді хвиля матиме представлення

$$u_r(r, t) = u_r^o F[a(r - vt)] \quad (20)$$

з невідомою швидкістю хвилі

$$v = \sqrt{1 - \alpha_1 u_{r,r}} c_L \quad (21)$$

і відомим постійним початковим амплітудним множником u_r^o .

Саме розв’язок (20) аналізувався раніше авторами [2] методом обмеження на градієнт зміщення в рамках перших двох наближень щодо градієнта зміщення.

Розглянемо далі процедуру врахування перших трьох наближень і проаналізуємо вплив третього наближення на еволюцію хвилі (20).

Перетворимо для цього корінь у виразі для швидкості (21) за умови малості добутку

$$|\alpha_1 u_{r,r}| < 1 \quad (22)$$

до вигляду

$$\sqrt{1 - \alpha_1 u_{r,r}} \approx 1 - (1/2)\alpha_1 u_{r,r} + (1/8)(\alpha_1)^2 (u_{r,r})^2 \quad (23)$$

(тут збережено перші три члени у розкладі в ряд). Тоді хвилю (20) можна наближено представити як функцію від складного аргументу

$$u_r(r, t) \cong u_r^o F \left[a(r - c_L t) - (1/2)ac_L \alpha_1 u_{r,r} t + (1/8)ac_L (\alpha_1)^2 (u_{r,r})^2 t \right]. \quad (24)$$

Введемо новий малий параметр

$$|\delta^* = -(1/2)ac_L \alpha_1 u_{r,r} [1 - (1/4)\alpha_1 u_{r,r}] t| < 1, \quad (25)$$

який включає три відомі величини – одна визначає довжину підшови поодинокій хвилі a , друга є швидкістю хвилі c_L у лінійному наближенні, третя α_1 пов’язана з властивостями матеріалу – і невідомий градієнт зміщення $u_{r,r}(r, t)$. Тоді стає можливим коротше представлення формули (24)

$$u_r(r, t) = u_r^o F[a(r - vt)] = u_r^o F[a(r - c_L t) + \delta^*] = u_r^o F(\sigma + \delta^*). \quad (26)$$

Обмеження на градієнт зміщення (25) дає можливість наближеного представлення хвилі (26) у вигляді ряду Тейлора в околі лінійного значення фази хвилі $\sigma = a(r - c_L t)$ і збереження лише перших двох членів ряду. Тоді хвилю (26) можна представити наближено формулою

$$u_r(r, t) \approx u_r^o F(\sigma) - (1/2)u_r^o F'(\sigma) ac_L \alpha_1 u_{r,r} [1 - (1/4)\alpha_1 u_{r,r}] t. \quad (27)$$

Далі треба знайти наближений вираз для градієнта деформації $u_{r,r}(r, t) \cong u_r^o a F'(\sigma)$ і підставити його в представлення (27). В результаті отримується формула для обчислення спотвореного щодо початкового профілю хвилі

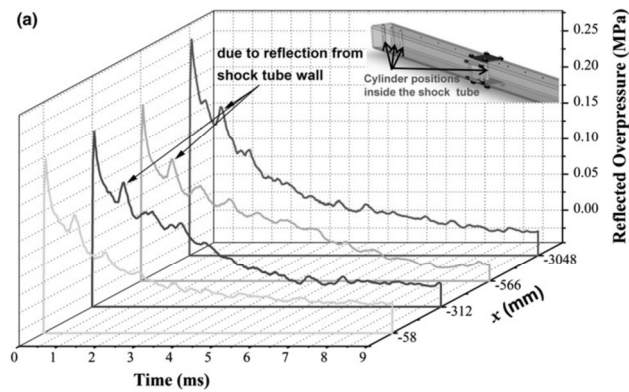
$$u_r(r,t) \approx u_r^0 F(\sigma) - (1/2) a^2 (u_r^0)^2 c_L \alpha_1 t [F'(\sigma)]^2 [1 - (1/4) u_r^0 a \alpha_1 F'(\sigma)]. \quad (28)$$

Ця формула включає три доданки, які можна розглядати як перші три наближення – перший відповідає лінійному підходу, другий є вже квадратично нелінійним щодо початкового профілю, третій вводить кубічну нелінійність. Така ж ситуація була спостережена у відповідній формулі для плоских хвиль.

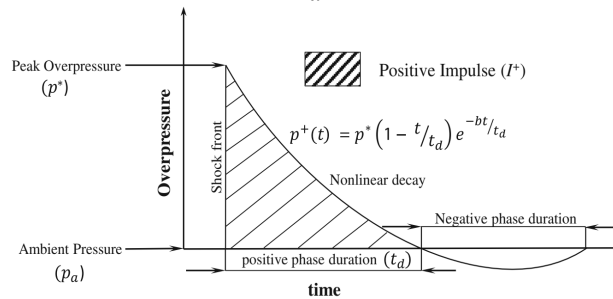
Порівняння застосування трьох перших наближень в методі послідовних наближень і методі обмеження на градієнт зміщення показує, що перший подвоює гармоніки з кожним наближенням, тоді як другий послідовно збільшує нелінійність нових доданків на одиницю.

Розглянемо далі конкретний випадок, коли функція $F[a(r-vt)]$ описує подинуку і не гармонічну в часі хвилю. Почнемо з лінійного підходу, а саме, розглянемо лінійне рівняння (17), що відповідає нелінійному хвильовому рівнянню (19). Воно має розв'язок у вигляді циліндричної функції уявного аргументу – функції Макдональда $K_\lambda(r)$ [18].

Отже, функція $F(\sigma) = K_0(\sigma)$ може бути вибрана для опису початкового профілю хвилі (20) і такий вибір диктується саме особливістю хвильового рівняння (19). Однак чисто математичний характер вибору початкового профілю хвилі можна супроводити міркуваннями фізичного характеру. Річ у тім, що початкові профілі, подібні за формою з профілем, що описується функцією Макдональда, досліджуються вже майже сто років у фізичній теорії вибуху і ці дослідження продовжуються до нашого часу. В основному, це дослідження експериментальні, які стосуються сучасних проблем науки, не пов'язаних з атомними вибухами, а, зокрема, інших військових і медичних проблем [12, 16]. Для прикладу, на рис. 4, а показана експериментально досліджена еволюція початкового імпульсу, генерованого вибухом.



a



b

Рис. 4

На рис. 4, б зображена форма початкового імпульсу, який описується теоретично однією з найпростіших і такою, що часто використовується в інтерпретації експериментів, формул – початковим профілем Фрайдландера [12, 16] $p^+(t) = e^{-bt/t_d} (1-t/t_d)$. Тут позначення вказані на рис. 4, б. Автори публікації [12] вважають профіль Фрайдландера цілком прийнятним для інтерпретації експерименту. Тому і досить близький до профілю Фрайдландера профіль Макдональда можна вважати таким, що його форма відповідає профілю, який формується вибухом.

Повернемося до формули (28) і опишемо еволюцію хвилі з конкретним представленням профілю через функцію Макдональда

$$u_r(r, t) \approx u_r^0 a K_0(\sigma) - (1/2) a^3 (u_r^0)^2 c_L \alpha_1 t \left[K_0'(\sigma) \right]^2 \left[1 - (1/2) u_r^0 \alpha_1 a K_0'(\sigma) \right]. \quad (29)$$

Оскільки для функцій Макдональда справедлива формула $K_0'(\sigma) = -K_1(\sigma)$, то наближене представлення хвилі (29) можна записати у вигляді, зручному для числового моделювання

$$u_r(r, t) \approx K_0(a(r - c_L t)) - (1/2) a^3 (u_r^0)^2 \alpha_1 a c_L t \left[K_1(a(r - c_L t)) \right]^2 \left[1 + (1/4) u_r^0 \alpha_1 a K_1(a(r - c_L t)) \right]. \quad (30)$$

Формула (30) описує зміну початкового профілю хвилі через пряму залежність нелінійних доданків від часу. Нехарактерною особливістю функції Макдональда, яка вирізняє її посеред функцій, якими описувались в попередніх параграфах нелінійні хвилі, є те, що графік цієї функції не має горба, є спадним і опуклим вниз.

Для виявлення того, чи не є еволюція профілю (30) теж нехарактерною, проводилось числове моделювання процесу еволюції для двох типів композитних матеріалів при їх описі моделлю Мернагана – матеріалів з м'якою та жорсткою характеристиками нелінійності [14, 21, 25].

Тут доречно зазначити, що приналежність матеріалу до одного з вказаних типів визначається формулою зв'язку між напруженням та деформацією в рамках універсальної деформації однонапрявленого стиску – розтягу і пружними постійними Мернагана.

Ця формула має вигляд

$$\sigma_{11} = (3\lambda + 2\mu)e + (A + 5B + 3C)e^2 - 2(A + 3B + C)\alpha, \quad (31)$$

де $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, $\alpha = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}$.

Якщо зразок круглий, то $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$, $\varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11}$, $e = (1 - 2\nu)\varepsilon_{11}$, $\alpha = -\nu(2 - \nu)(\varepsilon_{11})^2$ (коефіцієнт Пуассона означається як відношення поперечної деформації зразка до поздовжньої). В результаті формула (31) перетворюється до вигляду

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \left[(A + 5B + 3C)(1 - 2\nu)^2 + 2(A + 3B + C)\nu(2 - \nu) \right] (\varepsilon_{11})^2, \quad (32)$$

зручного для з'ясування, чи являється той або інший матеріал нелінійним з м'якою чи жорсткою характеристикою нелінійності.

Слід зазначити, м'яка нелінійність характеризується кривою лінією $\sigma_{11} \sim \varepsilon_{11}$, яка лежить під прямою лінією $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$, що відповідає лінійному закону Гука. Таким чином, напруження зі збільшенням деформації приймають менші значення, ніж за лінійним законом Гука (матеріал якби більш м'який). Відповідно, жорстка нелінійність відповідає розміщенню кривої над прямою лінією.

Також доречно зауважити, що переважна більшість інженерних матеріалів характеризується від'ємними значеннями всіх трьох пружних постійних Мернагана [1, 3, 21, 31]. Тоді формула (32) свідчить, що вони є матеріалами з м'якою характеристикою нелінійності. Жорстка характеристика властива дуже малій кількості матеріалів, у тому числі, вона властива склу PIREX.

Далі показані графіки, отримані для чотирьох композитних матеріалів з такими механічними параметрами [1, 3, 6, 25, 31]:

Матеріал 1 (матеріал з м'якою характеристикою нелінійності, матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам, об'ємний вміст матриці 0,8)

$$\rho = 0,594 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 5,59 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 3,26 \cdot 10^{-10};$$

$$A = -0,658 \cdot 10^{-11}; \quad B = -2,18 \cdot 10^{-11}; \quad C = -4,35 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 1,763 \cdot 10^3.$$

Матеріал 2 (матеріал з м'якою характеристикою нелінійності, матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам, об'ємний вміст матриці 0,6)

$$\rho = 0,918 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 11,6 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 0,721 \cdot 10^{-10};$$

$$A = -1,33 \cdot 10^{-11}; \quad B = -4,45 \cdot 10^{-11}; \quad C = -9,5 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 2,179 \cdot 10^3.$$

Матеріал 3 (матеріал з жорсткою характеристикою нелінійності, матриця – смола EPON 828, наповнювач – боросилікатне скло PIREX, об'ємний вміст матриці 0,9)

$$\rho = 1,31 \cdot 10^3; \quad \lambda = 0,265 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 0,181 \cdot 10^{10};$$

$$A = +3,60 \cdot 10^{-11}; \quad B = -1,24 \cdot 10^{-11}; \quad C = +0,90 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 2,188 \cdot 10^3.$$

Матеріал 4 (матеріал з жорсткою характеристикою нелінійності, матриця – смола EPON 828, наповнювач – боросилікатне скло PIREX, об'ємний вміст матриці 0,8)

$$\rho = 1,42 \cdot 10^3; \quad \lambda = 0,400 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 0,265 \cdot 10^{10};$$

$$A = +3,20 \cdot 10^{-11}; \quad B = -1,10 \cdot 10^{-11}; \quad C = +0,80 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 2,559 \cdot 10^3.$$

Характерну залежність амплітуди хвилі u_r від відстані поширення хвилі r показано на рис. 5.

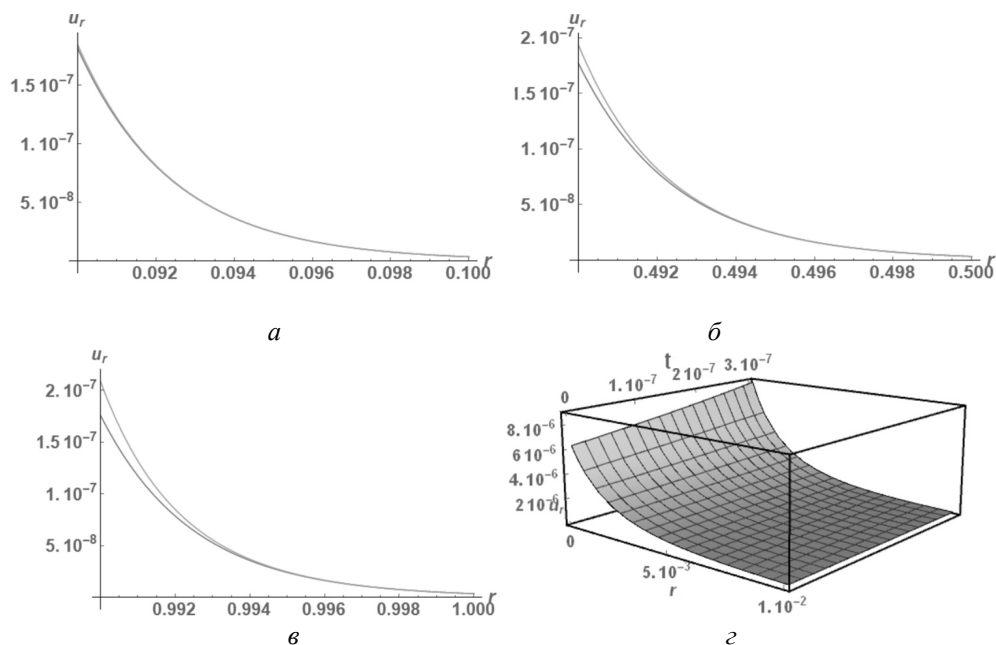


Рис. 5

Усі графіки побудовані за формулою (30) і відповідають матеріалу 1. Інші параметри вказані на рисунках. Рис. 5, *a* відповідає стадії, коли нелінійність має невеликий вплив на еволюцію. Ліва лінія відповідає лінійному наближенню (неспотворений профіль), права – двом першим наближенням. Отже, спотворений профіль зберігає форму опуклості вниз початкового профілю і лежить вище початкового (вони ніде не перетинаються), стає дещо крутішим і його амплітуда збільшується. Підосва спотвореного профілю не змінюється. Рис. 5, *б* показує більш розвинену еволюцію початкового профілю (довша відстань поширення). Він зберігає відображені на попередній стадії особливості.

У тому числі, спотворений профіль стає більш крутим і амплітуда ще більшою. Підосва спотвореного профілю не змінюється. На рис. 5, *в* показано ще більш розвинену еволюцію початкового профілю (ще довша відстань поширення). Він зберігає відображені на попередніх стадіях особливості. Зокрема, стає ще крутішим і амплітуда продовжує збільшуватись. Підосва спотвореного профілю не змінюється.

На рис.6 порівнюються перші два наближення і перші три наближення. Він показує дві лінії. Ліва відповідає першим двом наближенням, а права – першим трьом.

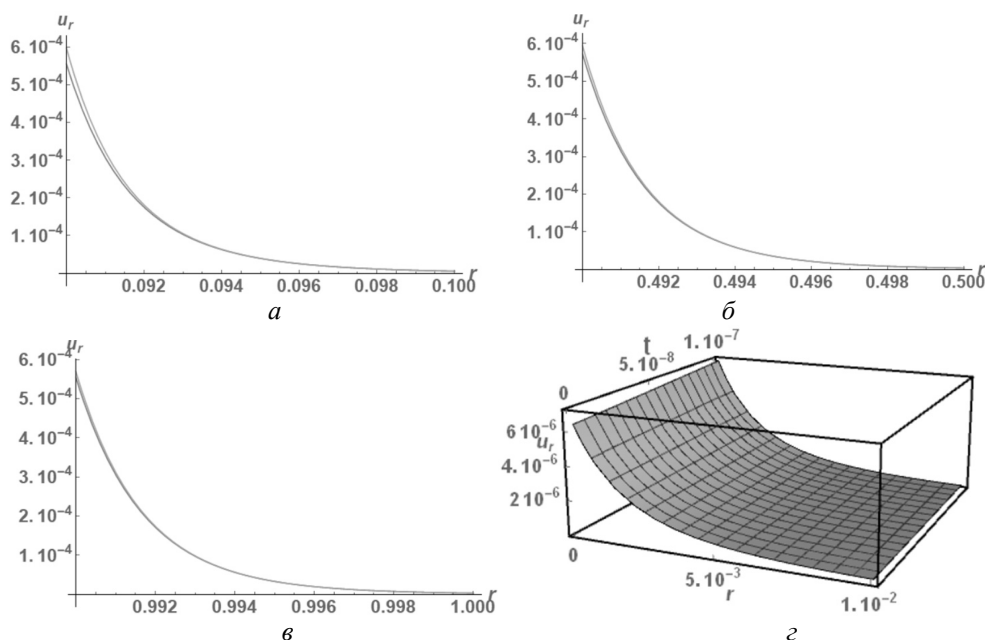


Рис. 6

Рис. 6, *a – в* порівнюють профілі для випадків довших відстаней поширення хвилі. Це порівняння свідчить, що для стандартного набору параметрів третє наближення вводить невеликий порівняно з другим внесок. Таким чином, збільшення відстані поширення хвилі зменшує ефект, показаний на попередніх стадіях еволюції. Рис. 6, *г* показує тривимірне зображення еволюції в координатах «час поширення – відстань поширення – зміщення».

Характерну залежність амплітуди хвилі u_r від відстані поширення хвилі r показано на рис. 7. Усі графіки побудовані за формулою (30) і відповідають матеріалу 3. Інші параметри вказані на рисунках. Рис. 7, *a* відповідає стадії, коли нелінійність має невеликий вплив на еволюцію. Ліва лінія відповідає лінійному наближенню (неспотворений профіль), права – двом першим наближенням. Отже, спотворений профіль зберігає форму опуклості вниз початкового профілю і лежить нижче початкового (вони ніде не перетинаються) і стає дещо пологішим. Амплітуда спотвореного профілю зменшується. Рис. 7, *б* показує більш розвинену еволюцію початкового профілю (до-

вша відстань поширення). Він зберігає відображені на попередній стадії особливості. У тому числі, спотворений профіль стає більш пологим. Амплітуда спотвореного профілю зменшується. На рис. 7, в показано ще більш розвинену еволюцію початкового профілю (ще довша відстань поширення). Він зберігає відображені на попередніх стадіях особливості. Зокрема, стає ще пологішим. Амплітуда спотвореного профілю продовжує зменшуватись.

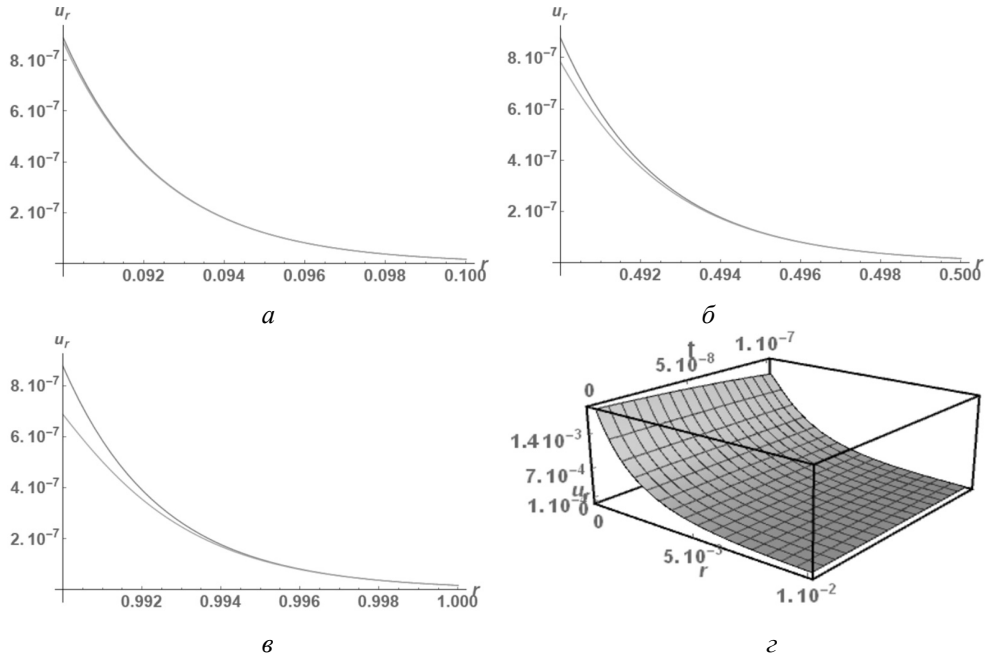


Рис. 7

На рис. 8 порівнюються перші два наближення і перші три наближення для матеріалу 3. Він показує дві лінії. Ліва відповідає першим двом наближенням, а права – першим трьом.

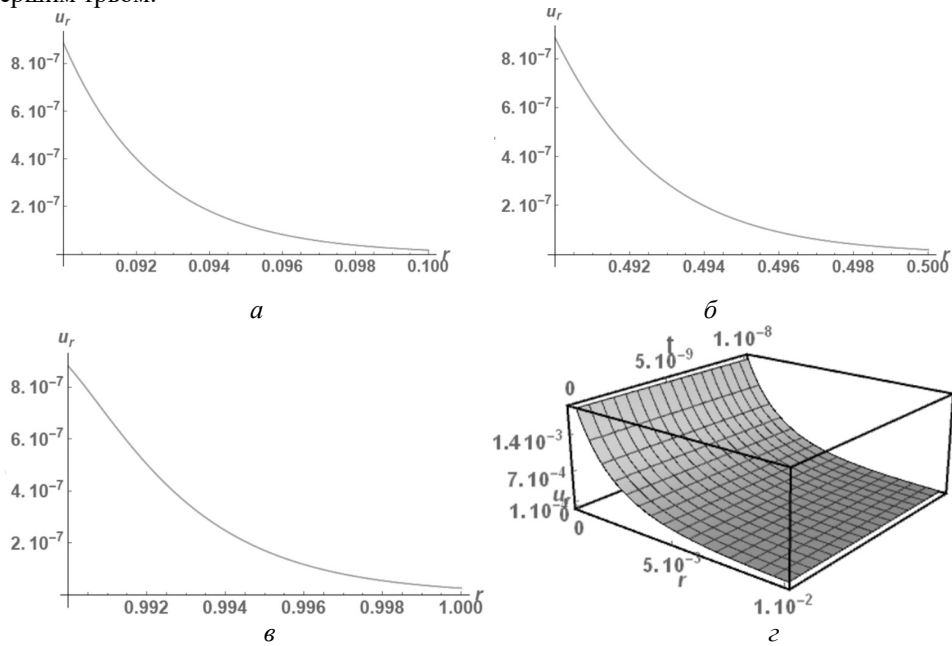


Рис. 8

Рис. 8, *a – в* порівнюють профілі для випадків довших відстаней поширення хвилі. Це порівняння свідчить, що для стандартного набору параметрів третє наближення вводить невеликий порівняно з другим внесок. Внесок не спостерігається наглядно, тому що вплив дуже незначний. Рис. 8, *г* показує тривимірне зображення еволюції в координатах «час поширення – відстань поширення – зміщення».

Слід зазначити, що в процесі числового моделювання поширення поодинокі циліндричної хвилі для випадків усіх чотирьох матеріалів теж побудовані дещо інші тривимірні зображення профілю хвилі в координатах «зміщення (профіль хвилі) – радіус – полярний кут», які, можливо, є більш наглядними. Ці зображення є осесиметричними і фактично від полярного кута не залежать. Для прикладу, на рис. 9 показані три профілі, які відповідають матеріалу 3 і трьом послідовним стадіям поширення хвилі: початку руху хвилі від циліндричної порожнини радіуса $r^o = 5 \cdot 10^{-2}$, пройденій від порожнини відстаням $r = 15 \cdot 10^{-2}$ та $r = 25 \cdot 10^{-2}$.

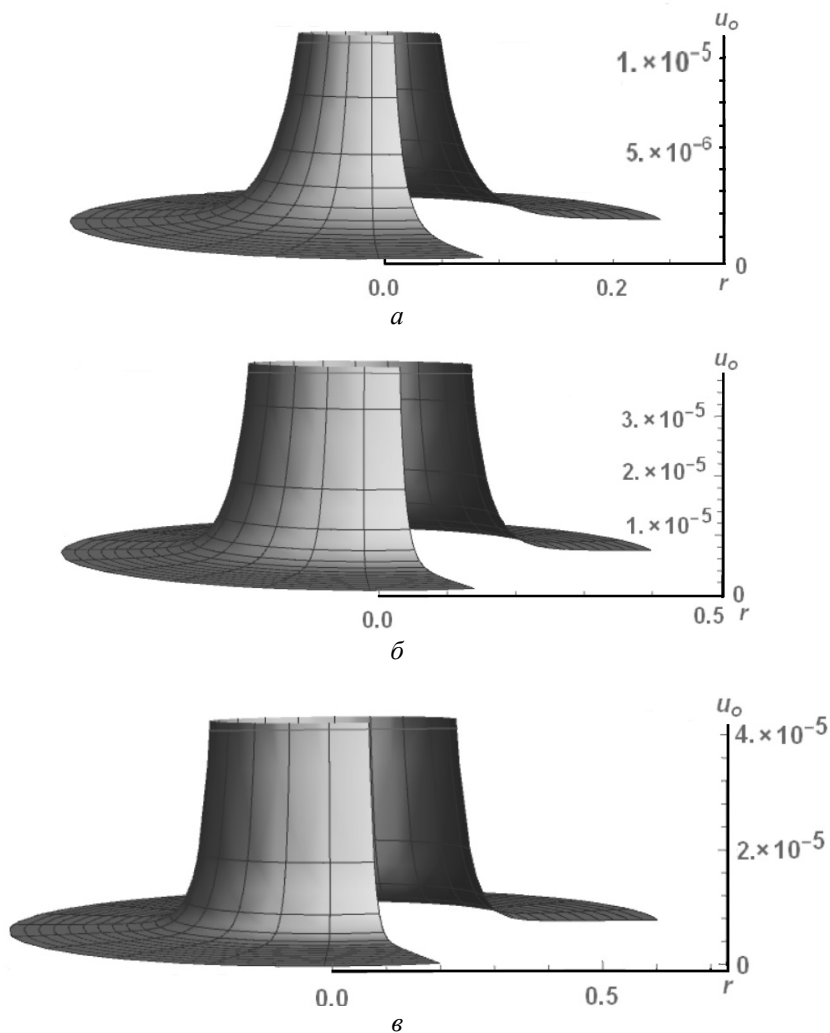


Рис. 9

Таким чином, проведене числове моделювання показало, що нехарактерний початковий профіль (профіль без звичного горба) еволюціонує нехарактерно – профіль далі не має горба і стає значно крутішим, залишаючись опуклим вниз.

Загальні висновки.

Проаналізовано еволюцію нелінійно пружної циліндричної хвилі зміщення для нехарактерного початкового профілю хвилі у вигляді функції Макдональда. На відміну від більшості нелінійних хвиль в матеріалах, які мають періодичну систему горбів чи поодинокі горби, профіль цієї хвилі не має горба, монотонно спадає і є опуклим вниз.

Спочатку коротко описані особливості трьох типів хвиль, які можна вважати характерними – гармонічної хвилі (періодично повторюваний профіль) і двох поодиноких хвиль з початковими профілями у вигляді функцій Гаусса (симетричний профіль) та функції Уіттекера (несиметричний профіль). Далі більш повно проаналізовано теоретично і чисельно поодинокую хвилю з початковим профілем у вигляді функції Макдональда.

Основна новизна аналізу полягає в тому, що еволюція хвиль вивчається наближеними методами з врахуванням перших трьох апроксимацій. Спільним для цих профілів є спотворення початкового профілю внаслідок нелінійної взаємодії хвилі самої з собою і збільшення максимальної амплітуди при поширенні хвилі. Показані суттєві відмінності хвилі – нехарактерний початковий профіль (профіль без звичного горба) еволюціонує у нехарактерний спосіб: профіль далі не має горба і стає значно крутішим, залишаючись опуклим вниз.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані у цій статті, виконані за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Теоретично та чисельно аналізується еволюція нелінійної пружної циліндричної хвилі зміщення в рамках п'ятиконстантної моделі Мурнагана для нехарактерного початкового профілю у вигляді функції Макдональда. На відміну від більшості нелінійних хвиль у матеріалах, що мають періодично розташовані або поодинокі горби, ця хвиля не має горба. Її профіль монотонно зменшується і увігнутий вниз. Основна новизна аналізу полягає в тому, що еволюція хвиль вивчається наближеним методом з врахуванням перших трьох наближень. Показані деякі суттєві відмінності саме цієї хвилі – нехарактерний профіль еволюціонує нехарактерним чином. Спочатку коротко описуються особливості трьох типів хвиль, які можна розглядати як характерні властивості – гармонічна хвиля (періодично повторюваний профіль) і дві поодинокі хвилі з початковими профілями у вигляді функцій Гаусса (симетричний профіль) і Уіттекера (несиметричний профіль). Далі більш детально теоретично та чисельно аналізується поодинокую хвилю з початковим профілем у вигляді функції Макдональда. Спотворення початкового профілю внаслідок нелінійної взаємодії самої хвилі та зменшення максимальної амплітуди під час поширення хвилі є спільними для цих профілів у випадку матеріалів з м'якою нелінійністю. У випадку матеріалів з жорсткою нелінійністю профіль Макдональда показує іншу еволюцію – максимальні амплітуди зменшуються з часом. Показано інші суттєві риси хвилі Макдональда – нехарактерний початковий профіль (профіль без класичного горба) еволюціонує нехарактерним чином – профіль стає набагато (м'яка нелінійність) або менш (жорстка нелінійність) крутішим, не має горба і залишається опуклим вниз.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: поодинокую пружна циліндрична хвиля; п'ятиконстантний потенціал Мурнагана; наближений метод; початковий профіль Макдональда; нехарактерна еволюція.

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.1. Общие вопросы, Т. 2. Закономерности распространения. – Киев: Наукова думка. – 1986. – 376 с., 536 с.
2. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 519 с.
3. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 464 с.
4. Руцицький Я.Я. Про наближений аналіз еволюції поздовжньої хвилі, що поширюється в пружному середовищі // Доп. НАН України. – 2019. – № 8. – С. 46 – 58.
5. Руцицький Я.Я. Нетипова еволюція поодинокі хвилі, що поширюється в нелінійно пружному середовищі // Доп. НАН України. – 2020. – № 12. – С. 34 – 40.
6. Руцицький Я.Я., Цурпал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
7. Alonso M., Reguera N. Numerical detection and generation of solitary waves for a nonlinear wave equation // Wave Motion. – 2015. – 56. – P. 137 – 146.
8. Beli D., Arruda J.R.F., Ruzzene M. Wave propagation in elastic metamaterial beams and plates with interconnected resonators // Int. J. Solids Struct. – 2018. – 139 - 140. – P. 105 – 120.
9. Bloembergen N. Nonlinear Optics. A Lecture Note. – New York – Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc., 1965. – 204 p.

10. Cattani C., Rushchitsky J. Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostructure. – Singapore – London: World Scientific, 2007. – 466 p.
11. Chandra N., Ganpule S., Kleinschmit N.N., Feng R., Holmberg A.D., Sundaramurthy A., Selvan V., Alai A. Evolution of blast wave profiles in simulated air blasts: experiment and computational modeling // Shock Waves. – 2012. – **22**. – P. 403 – 415.
12. Freidlander F.G. The diffraction of sound pulses. I. Diffraction by a semi-infinite plate // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1946. – **186**. – P. 322 – 344.
13. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. 7th revised ed. Eds. Jeffrey A., Zwillinger D. – New York: Academic Press Inc., 2007. – 1200 p.
14. Guz I.A., Rushchitskii Y.Y. Comparison of mechanical properties and effects in micro- and nano-composites with carbon fillers (carbon microfibers, graphite microwhiskers, and carbon nanotubes) // Mechanics of Composite Materials. – 2004. – **40**, N 3. – P. 179 – 190.
15. Ishii Y., Biwa S., Adachi T. Second-harmonic generation of two-dimensional elastic wave propagation in an infinite layered structure with nonlinear spring-type interfaces // Wave Motion. – 2020. – **97**, N 9. – P. 102569.
16. Kuriakose M., Skotak M., Misistia A., Kahali S., Sundaramurthy A., Chandra N. Tailoring the Blast Exposure Conditions in the Shock Tube for Generating Pure, Primary Shock Waves: The End Plate Facilitates Elimination of Secondary Loading of the Specimen // PLoS ONE. – 2016. – **11**, N9. – e0161597.
17. Murnaghan F. Finite Deformation in an Elastic Solid. 3rd ed. Gloucester, MA. – USA: Peter Smith Publisher Inc., 1985. – 140 p.
18. Olver F.W.J., Maximon L.C. Bessel Functions. Chapter 10. P. 215 – 286. In: Olver F.W.J., Lozier D.W., Bousvert R.F., Clark C.W. (eds) NIST (National Institute of Standards and Technology) Handbook of Mathematical Functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 968 p.
19. Rushchitsky J.J. Theory of Waves in Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011. – 270 p.
20. Rushchitsky J.J. Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects // Int. J. Appl. Math. Mech. – 2012. – **8**, N 6. – P. 400 – 443.
21. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
22. Rushchitsky J.J. Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution. Chapter in the book «Understanding Plane Waves» Ed. William A. Cooper. – London: Nova Science Publishers, 2019. – 300 p. – P. 201 – 220.
23. Rushchitsky J.J. Foundations of Mechanics of Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 276 p.
24. Rushchitsky J.J. Scenarios of Evolution of Some Types of Simple Waves in Nonlinear Elastic Materials // Archive of Appl. Mech. – 2021. – **91**, N 7. – P. 3151 – 3170.
25. Rushchitsky J.J., Cattani C., Sinchilo S.V. Physical Constants for One Type of Nonlinearly Elastic Fibrous Micro- and Nanocomposites with Hard and Soft Nonlinearities // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 12. – P. 1368 – 1377.
26. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. One Approximate Method for Analyzing Solitary Waves in Nonlinearly Elastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 282 – 290.
27. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Numerical Analysis of the Evolution of Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 104 – 110.
28. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Evolution of SV-Wave with Gaussian Profile // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 300 – 304.
29. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1. // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N5. – P. 581 – 589.
30. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 2. // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N6. – P. 666 – 673.
31. Structural and Residual Stress Analysis. Ed. V.Hauk. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1997 (e-variant 2006). – 640 p.
32. Whittaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis. An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions; with an Account of the Principal Transcendental Functions. 4th ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 1927. – 512 p.
33. Yariv A. Quantum Electronics. – New York: Wiley, 1967. – 456 p.
34. Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J. Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 104 – 110.
35. Zhen-Ni Li, Yi-Ze Wang, Yue-Sheng Wang. Three-dimensional nonreciprocal transmission in a layered nonlinear elastic wave metamaterial // Int. J. Non-Linear Mechanics – 2020. – **125**, N 10. – P. 193531.

Надійшла 06.10.2020

Затверджена до друку 24.06.2021