

О. М. Багно

**ВПЛИВ СКІНЧЕННИХ ПОЧАТКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ
НА ХВИЛЬОВИЙ ПРОЦЕС В СИСТЕМІ
«НЕСТИСЛИВИЙ ПІВПРОСТІР – ШАР ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ»**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: alexbag2016@gmail.com*

Abstract. The problem of normal waves propagation in a pre-deformed incompressible elastic half-space that interacts with a layer of an ideal compressible fluid is considered. The study is carried out based on the three-dimensional linearized equations of the theory finite elastic deformations for the incompressible elastic half-space and based on the three-dimensional linearized Euler equations for the ideal compressible fluid. The problem formulation and the approach, based on using the representations of the general solutions of linearized equations for the elastic solid and fluid are applied. A dispersion equation is obtained which describes the propagation of harmonic waves in the hydroelastic system. The dispersion curves for the normal waves are constructed over a wide range of frequencies. An effect of the finite initial deformations of elastic half-space and the thickness of the layer of ideal compressible fluid on the phase velocities of harmonic waves is analyzed. It is shown that an influence of the initial deformations of elastic half-space on the wave process parameters is associated with the localization properties of waves. A criterion for the existence of the normal waves in the hydroelastic waveguides is proposed. It is shown that the finite initial deformations can significantly change the nature of the wave process in a hydroelastic system. An approach developed and the results obtained make it possible to establish the limits of applicability of the models for the wave processes are based on the different versions of the theory of small initial deformations and the classical elasticity theory for a solid body. The numerical results are presented in the form of graphs and their analysis is given.

Key words: normal waves, phase velocity, incompressible elastic half-space, layer of ideal compressible fluid, finite initial deformations.

Вступ.

Удосконалення існуючих класичних матеріалів, створення нових композитних і наноматеріалів, а також виготовлення різних деталей ставить завдання розробки ультразвукових неруйнівних методів, що дозволяють виявляти дефекти і визначати напруження в матеріалах і елементах конструкцій. Зазначеним методам присвячена широка бібліографія. Серед численних публікацій відзначимо лише роботи, опубліковані порівняно недавно [4 – 6, 11, 12, 14, 16, 17, 22 – 26, 28 – 30]. Ефективність розроблюваних методів безпосередньо залежить від знання закономірностей поширення поверхневих акустичних хвиль, які є їх основою. У зв'язку з цим виникає необхідність вивчення властивостей цих хвиль з залученням моделей, що дозволяють більш повно врахувати властивості реальних пружних і рідких середовищ. Однією з таких моделей є модель, основана на лінеаризованій теорії гідропружності [3 – 7, 13 – 15]. Вона дозволяє врахувати в пружних тілах такий фактор, як початкові напруження. Вони, як відомо, виникають в результаті переходу середовищ з одного агрегатного стану в інший, при дії на тіла полів різної фізичної природи, а також в результаті технологічних операцій при виготовленні різноманітних матеріалів і деталей. Розглянуті задачі і ре-

зультати, отримані з урахуванням в пружних тілах початкових напружень, наведені в [3 – 6, 8 – 10, 13, 14, 16 – 21, 27].

У даній роботі аналіз кінематичних характеристик мод в пружно-рідинній системі, що складається з пружного півпростору і шару рідини, проводиться в рамках моделі, що враховує початкові напруження в твердому тілі. При цьому використані тривимірні лінеаризовані рівняння Ейлера для рідини і тривимірні лінеаризовані рівняння теорії пружності скінченних деформацій для твердого тіла. Передбачається, що рідина перебуває в стані спокою. Вибрані постановки задач і метод, оснований на застосуванні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь руху ідеальної стисливої рідини і попередньо напруженого нестисливого пружного тіла, запропоновані в роботах [3 – 7, 13 – 15].

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо задачу про поширення акустичних хвиль в гідропружній системі, що складається з пружного нестисливого півпростору, підданого великим (скінченним) початковим деформаціям, і шару ідеальної стисливої рідини. Розв'язки отримаємо із залученням тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності при скінченних деформаціях для твердого тіла і лінеаризованих рівнянь Ейлера для рідини, що перебуває в стані спокою [3 – 7, 13 – 15].

Далі розглянемо такі динамічні процеси в гідропружній системі, при яких виникають додаткові збурення деформацій, які значно менші початкових. Досліджуємо гармонічні хвильові процеси малої амплітуди. При цьому приймемо, що пружне тіло перебуває в початковому стані. Зауважимо, що на відміну від твердих тіл, співвідношення для яких записані в лагранжевих координатах, рівності для рідкого середовища записуються в ейлерових координатах, введених в природному стані рідини. Слід підкреслити, що початковий стан, в якому перебуває попередньо деформоване пружне тіло, при розгляді гідропружної задачі є природним станом по відношенню до рідини і системи в цілому. Оскільки в подальшому досліджуємо поширення малих збурень, то, як відомо, в цьому випадку підходи Ейлера і Лагранжа в описі поведінки середовищ збігаються. Тому в подальшому не робимо різниці між лагранжевими і ейлеровими координатами і характерні для нелінійних задач труднощі при записі граничних умов при зазначених двох підходах не виникають.

В рамках прийнятих моделей основні співвідношення для системи «попередньо напружене нестисливе пружне тіло – ідеальна стислива рідина» мають вигляд [3 – 7, 13 – 15]:

1) нестисливе пружне тіло –

$$\left(\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{j\alpha} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha + \tilde{q}_{ij} \frac{\partial p}{\partial z_i} = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (1.1)$$

$$\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_\beta \kappa_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{q}_{ij} = \lambda_i q_{ij}; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1; \quad \tilde{q}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial z_i} = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (1.2)$$

$$\tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \left(\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta} + \tilde{q}_{ij} p \right), \quad z_k \in S; \quad (1.3)$$

2) ідеальна стислива рідина –

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0; \quad z_k \in V_2; \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad a_0 = \text{const}; \quad p_{ij} = -\delta_{ij} p, \quad z_k \in V_2; \quad (1.5)$$

$$\tilde{P}_j = p_{ij} N_i^0; \quad z_k \in S. \quad (1.6)$$

При цьому специфіку взаємодії пружних і рідких середовищ відображають динамічні $\tilde{Q}_j = \tilde{P}_j$ ($z_k \in S$) і кінематичні $\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{v}$ ($z_k \in S$) граничні умови, що задаються на поверхні контакту пружних тіл і рідини S .

Введені тензори $\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}$ і \tilde{q}_{ij} залежать від виду початкового стану і типу пружного потенціалу матеріалу твердого тіла. Вирази для обчислення складових цих тензорів наведені в роботах [4 – 6, 13]. Там же запропоновані спрощення для різних варіантів теорії малих початкових деформацій. Вище прийняті наступні позначення: u_i – компоненти вектора зсувів пружного тіла \mathbf{u} ; ρ – густина матеріалу пружного півпростору; v_i – складові вектора збурень швидкості рідини \mathbf{v} відносно стану спокою; ρ^* і p – збурення густини і тиску в рідині; ρ_0 і a_0 – густина рідини і швидкість звуку в рідині в стані спокою; λ_i – подовження пружного півпростору в напрямках координатних осей; V_1 і V_2 – об'єми, які займають, відповідно, пружне тіло і рідина; S – поверхня контакту пружного і рідкого середовищ.

Рівності (1.1) – (1.3) описують поведінку нестисливої пружного тіла. Малі коливання ідеальної стисливої рідини в стані спокою описують співвідношення (1.4) – (1.6).

Далі припустимо, що ізотропне нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі безперервно-диференційованою функцією компонент тензора деформацій Гріна, займає півпростір ($-\infty < z_1 < \infty$, $-\infty < z_2 \leq 0$, $-\infty < z_3 < \infty$) і контактує з шаром ідеальної стисливої рідини ($-\infty < z_1 < \infty$, $0 \leq z_2 \leq h$, $-\infty < z_3 < \infty$). Прийmemo, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі Oz_3 . У цьому випадку задача є плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль в площині Oz_1z_2 . Отже, зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1.1) – (1.6) при наступних граничних умовах:

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{P}_2|_{z_2=h} = 0; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (1.7)$$

Тут введено такі позначення: \tilde{Q}_i і \tilde{P}_i – компоненти напружень, відповідно, в пружному тілі і рідині.

§2. Методика розв'язку.

Скористаємося постановками задач гідропружності для тіл з початковими напруженнями та ідеальної рідини, а також представленнями загальних розв'язків, запропонованими в роботах [3 – 7, 13 – 15]. Надалі досліджуємо хвильові процеси в попередньо деформованих нестисливих пружних тілах, що взаємодіють з ідеальною рідиною, початковий стан яких є однорідним. У разі однорідного напружено-деформованого початкового стану для плоского випадку загальні розв'язки мають вигляд [3 – 7, 13 – 15]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1^2};$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 \left[\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12}) \right] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t},$$

де введені функції χ_1 і χ_2 є розв'язками наступних рівнянь:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2\lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi_1 = 0; \quad q_i = \lambda_i^{-1}; \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1;$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Тут введено такі позначення: a_{ij} , μ_{ij} – величини, що визначаються з рівнянь стану і залежать від виду пружного потенціалу [4 – 6, 13]; s_{ii}^0 – початкові напруження.

Зауважимо, що загальна постановка задач гідропружності для тіл з початковими напруженнями в координатах початкового деформованого стану z_i за формою аналогічна формулюванню лінійних задач класичної теорії гідропружності. При цьому є й істотні відмінності, які відносяться до структури рівнянь і граничних умов. Обумовлено це тим, що вони містять величини початкового стану, які визначаються із загальних нелінійних рівнянь.

Для аналізу поширення збурень, гармонічно змінних в часі, розв'язки системи рівнянь визначаємо в класі біжучих хвиль $\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(k z_1 - \omega t)]$ ($j = 1, 2$), де k – хвильове число; ω – кругова частота; i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$).

Зауважимо, що обраний в даній роботі клас гармонічних хвиль, будучи найбільш простим і зручним в теоретичних дослідженнях, не обмежує загальності отриманих результатів, оскільки лінійна хвиля довільної форми, як відомо, може бути представлена набором гармонічних складових. Далі застосовуючи метод Фур'є, приходимо до двох задач про власні значення для рівнянь руху пружного тіла і рідини. Розв'язуючи їх, визначаємо відповідні власні функції. Після підстановки отриманих загальних розв'язків в граничні умови (1.7) одержуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \| e_{lm} (c, \lambda_i, \rho, \mu, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h / c_s) \| = 0 \quad (l, m = 4), \quad (2.1)$$

де c – фазова швидкість мод в гідропружній системі; h – товщина шару рідини; c_s – швидкість хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла ($c_s^2 = \mu / \rho$); μ – модуль зсуву матеріалу пружного тіла.

Як відомо, в необмеженому нестисливому пружному тілі існує зсувна хвиля. У ідеальному стисливому рідкому середовищі поширюється поздовжня хвиля. Саме ці хвилі, взаємодіючи між собою на вільній граничній поверхні, а також на поверхні контакту середовищ, породжують складне хвильове поле в гідропружній системі.

Відзначимо, що одержане дисперсійне рівняння (2.1) інваріантне щодо різних форм пружного потенціалу. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду окремих випадків, розглянутих у роботах [1 – 6, 8 – 10, 21].

Зокрема, якщо a_0 спрямувати до нескінченності, то (2.1) переходить в рівняння для визначення параметрів мод в разі взаємодії пружного півпростору з шаром нестисливої ідеальної рідини. При $\rho_0 = 0$ отримаємо пружний нестисливий півпростір, підданий великим (скінченним) початковим деформаціям, для якого результати дослідження хвиль Релея наведені в роботах [3, 4, 6, 9, 10, 21]. Інші окремі випадки, які випливають з даної роботи, пов'язані з дослідженням хвиль Стоунлі (при $\rho_0 \neq 0$ и $h \rightarrow \infty$), розглянуті в публікаціях [3, 4, 6, 8, 9, 10, 21].

Зазначені окремі випадки враховують наявність початкових деформацій в пружному півпросторі. Крім того, моделі, основані на різних варіантах теорії малих початкових деформацій, на рівняннях наближених прикладних двовимірних теорій як для попередньо напружених, так і для тіл без початкових деформацій, на лінійних співвідношеннях класичної теорії пружності, є окремими випадками, що розглядається в роботі, і впливають з нього при введенні додаткових спрощуючих припущень. Задачі, які були розглянуті в рамках моделі, що враховує початкові напруження, наведені в [3 – 6, 8 – 10, 13, 14, 16 – 21, 27]. Якщо прийняти $s_{ii}^0 = 0$ ($\lambda_i = 1$), то отримаємо рівності для ґрунтовно досліджених в рамках класичної теорії пружності хвиль Релея і Стоунлі – Шольте [1, 2, 10, 21].

§3. Числові результати і їх аналіз.

Надалі дисперсійне рівняння (2.1) розв'язуємо чисельно. При цьому розрахунки проводимо для гідропружної системи, що складається з реальних пружного тіла і рідини, а також для двох систем з гіпотетичними рідинами. Перша складається з нестисливого пружного півпростору і шару води. Матеріалом для пружного півпростору вибираємо високоеластичну гуму, пружні властивості якої описуються пружним потенціалом Трелоара. При цьому механічні параметри гідропружної системи вибираємо наступними: пружний півпростір – $\rho = 1200$ кг/м³, $\mu = 1,2 \cdot 10^6$ Па; шар рідини – $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $a_0 = 1459,5$ м/с, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$. У цього хвилеводу матеріал пружного тіла (гума) є нестисливим, податливим і м'яким. Гіпотетичну рідину для другої системи вибираємо зі швидкістю звуку в ній рівною $\bar{a}_0 = 0,85$. У третій гідропружній системі гіпотетична рідина має величину швидкості поширення звукової хвилі, рівну $\bar{a}_0 = 0,7$. Такий вибір механічних параметрів трьох систем дозволяє чисельно проілюструвати справедливість запропонованого на підставі аналітичного аналізу дисперсійного рівняння і отриманих числових значень критерію розщеплення єдиної поверхневої хвилі на безліч мод, що поширюються в гідропружних хвилеводах. Крім того, при розгляді припускаємо, що початковий напружений стан є однорідним і задовольняє співвідношенням $s_{11}^0 \neq 0$, $s_{22}^0 = 0$. Як показано в роботах [3 – 6, 13, 14], при такому завантаженні немає аналогії між задачами в лінеаризованій і лінійній постановках. Тому результати для тіл з початковими напруженнями не можуть бути отримані з розв'язків відповідних лінійних задач.

Зауважимо, що рівняння (2.1) виведено без будь-яких додаткових вимог до виду функції пружного потенціалу, тому воно має місце для пружних потенціалів довільної форми.

Далі дисперсійне рівняння (2.1) розв'язуємо чисельно. Результати обчислень у вигляді графіків наведені на рис. 1 – 13. При цьому на рис. 1 – 3 представлені графіки для пружного півпростору з високоеластичної гуми і шару води ($\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$). Графіки для гідропружної системи з гіпотетичною рідиною $\bar{a}_0 = 0,85$ приведені на рис. 4 – 8. Для пружно-рідинної системи з гіпотетичною рідиною з $\bar{a}_0 = 0,7$ графіки представлені на рис. 9 – 13. На всіх рисунках суцільні лінії відповідають попередньо стисненому пружному півпростору ($\lambda_1 = 0,8$), а штрихові – гідропружному хвилеводу при відсутності початкових напружень ($\lambda_1 = 1$). Також на наведе-

них графіках тонкими штриховими лініями позначені асимптоти, до яких прямують величини фазових швидкостей \bar{c} мод при зростанні товщини рідкого шару (частоти) \bar{h} ($\bar{h} \rightarrow \infty$).

На рис. 1, 4 – 6 і 9 штриховими лініями зображені дисперсійні криві для гідропружних хвильоводів, що відображають залежності безрозмірних величин фазових швидкостей мод \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) від безрозмірної величини товщини шару рідини \bar{h} ($\bar{h} = \omega h/c_s$) при відсутності початкових напружень ($\lambda_1 = 1$). Аналогічні дисперсійні криві для пружно-рідинних хвильоводів, пружний півпростір яких підданий початковому стисненню ($\lambda_1 = 0,8$), на рисунках представлені суцільними лініями.

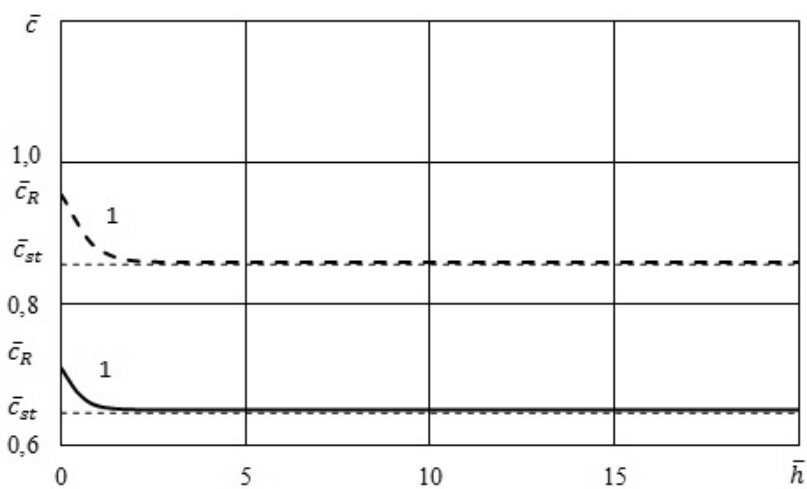


Рис. 1

Графіки, представлені на рис. 2, 3, відображають розподіл амплітуд зміщень (швидкостей $\partial u_i/\partial t$ і v_i) для гідропружного хвильоводу, що складається з пружного півпростору з гуми ($-\infty < \bar{z}_2 \leq 0$) і шару ($0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}$) води. На них наведені залежності безрозмірних величин поздовжніх \bar{V}_{z_1} (рис. 2) і поперечних \bar{V}_{z_2} (рис. 3) зсувів від безрозмірної поперечної координати \bar{z}_2 для поверхневої моди 1 (рис. 1).

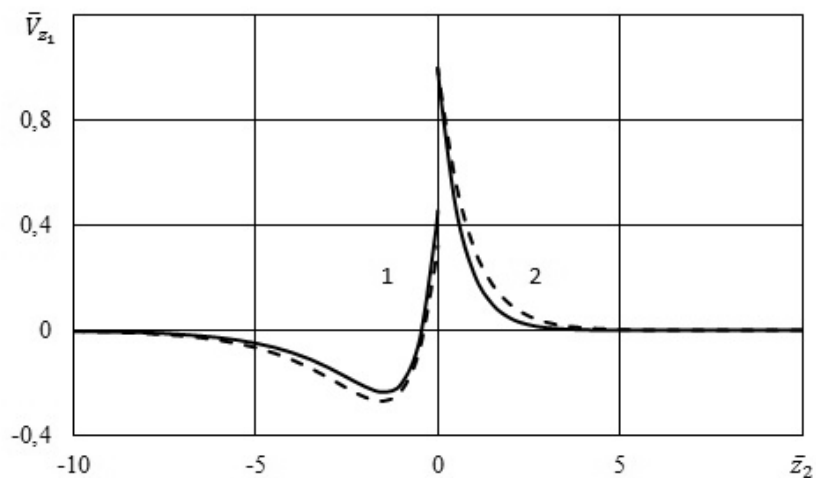


Рис. 2

Графіки, представлені на цих рисунках, отримані для існуючої єдиної поверхневої хвилі l в короткохвильовій частині спектра при частоті (товщині) рідкого шару $\bar{h} = 20$. В цьому випадку величини кінематичних характеристик мали такі значення $\bar{c} = 0,650184$ при $\lambda_1 = 0,8$ і $\bar{c} = 0,859257$ при $\lambda_1 = 1$. При такій частоті мода l трансформується в квазіповерхневу хвилю (хвиля Стоунлі) і її швидкість, як випливає з графіка рис. 1, незначно відрізняється від швидкості хвилі Стоунлі \bar{c}_{st} .

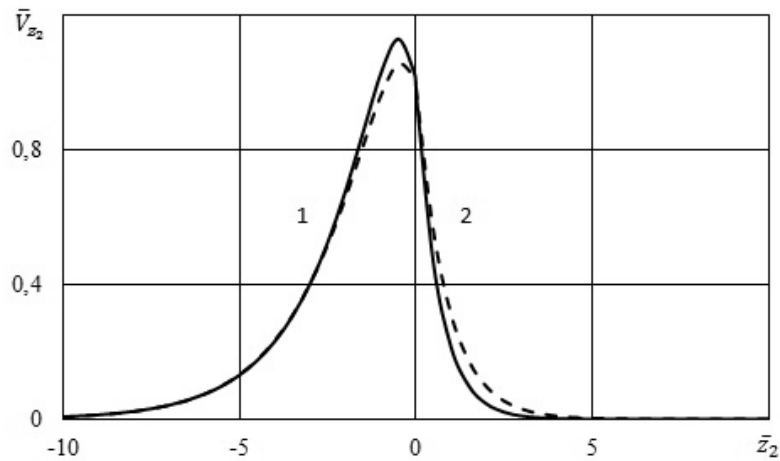


Рис. 3

З графіків, представлених на рис. 1, випливає, що швидкість поверхневої хвилі в пружному півпросторі з гуми (піддатливий матеріал), взаємодіючому з шаром води, змінюється від швидкості хвилі Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,955312$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{c}_R = 0,709557$ для $\lambda_1 = 0,8$) при $\bar{h} \rightarrow 0$ до швидкості хвилі Стоунлі \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,859257$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{c}_{st} = 0,650184$ для $\lambda_1 = 0,8$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Як відомо [2], фазова швидкість і структура хвилі Стоунлі при взаємодії твердого та рідкого півпросторів залежать від механічних властивостей гідропружної системи і визначаються співвідношенням між швидкістю хвилі звуку в рідині і швидкістю хвилі Релея в твердому півпросторі. В даному випадку механічні параметри гідропружної системи «гума – вода» такі, що швидкість поширення звукової хвилі в рідині \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 46,153442$) більша швидкості релеєвської хвилі \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,955312$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{c}_R = 0,709557$ для $\lambda_1 = 0,8$). З огляду на результати, представлені на рис. 2 і 3, що характеризують розподіл амплітуд зміщень (швидкостей) в приконтактних областях, в даній гідропружній системі це призводить до того, що в короткохвильовій частині спектра поверхнева мода l , поширюючись вздовж межі розділу середовищ, локалізується в приконтактних областях як рідини, так і пружного півпростору. При цьому глибина проникнення рухів цієї поверхневої хвилі (хвиля типу Стоунлі) в пружне тіло більша глибини проникнення в рідину.

На рис. 4 – 8 наведено графіки для гідропружної системи, що складається з м'якого пружного півпростору, що взаємодіє з шаром гіпотетичної рідини, швидкість поширення звукової хвилі в якій дорівнює $\bar{a}_0 = 0,85$.

Графіки, представлені на рис. 7, 8, відображають розподіл амплітуд зміщень (швидкостей $\partial u_i / \partial t$ і v_i) для гідропружного хвилеводу, що складається з пружного півпростору ($-\infty < \bar{z}_2 \leq 0$) і шару ($0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}$) ідеальної рідини, швидкість хвилі звуку в якій дорівнює $\bar{a}_0 = 0,85$. На них наведені залежності безрозмірних величин поздовжніх \bar{V}_{z_1} (рис. 7) і поперечних \bar{V}_{z_2} (рис. 8) зсувів від безрозмірної поперечної координати \bar{z}_2 для нижчої моди l (рис. 4).

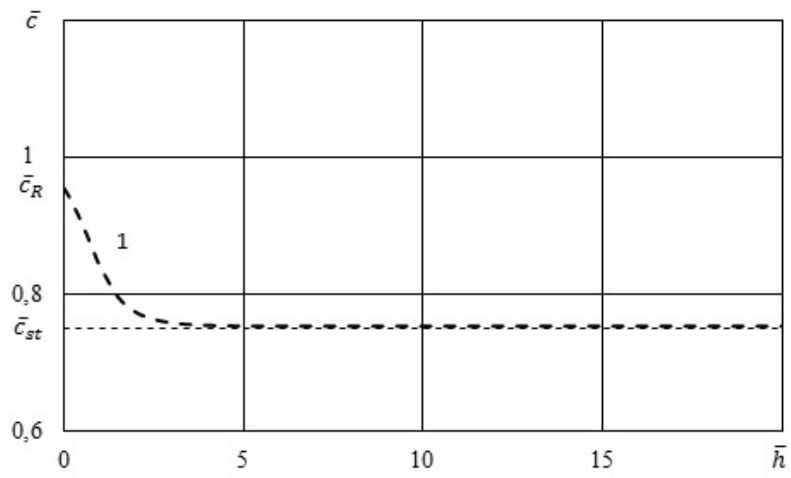


Рис. 4

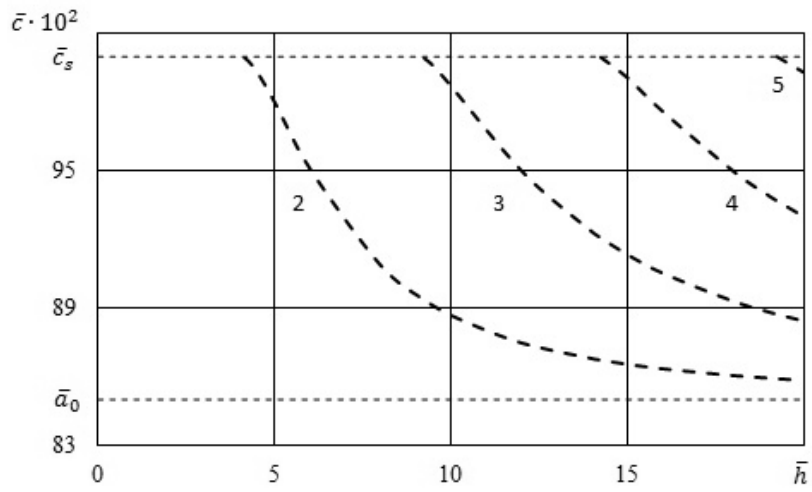


Рис. 5

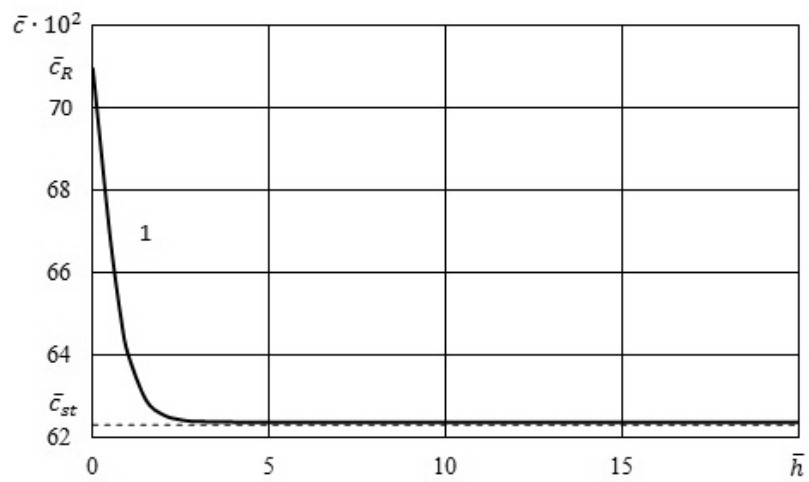


Рис. 6

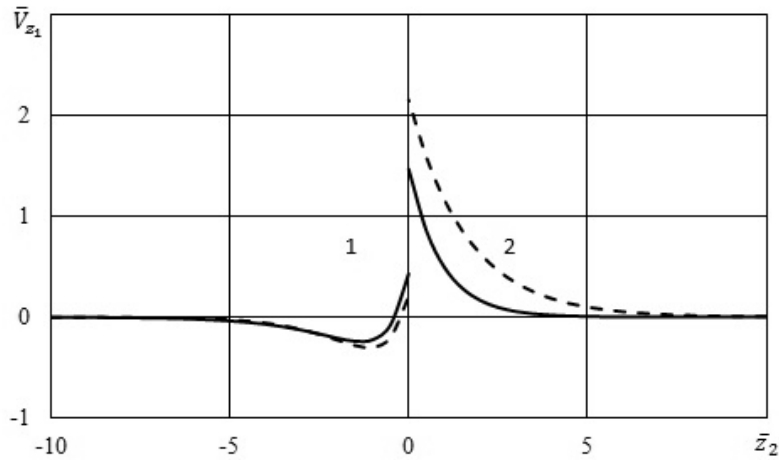


Рис. 7

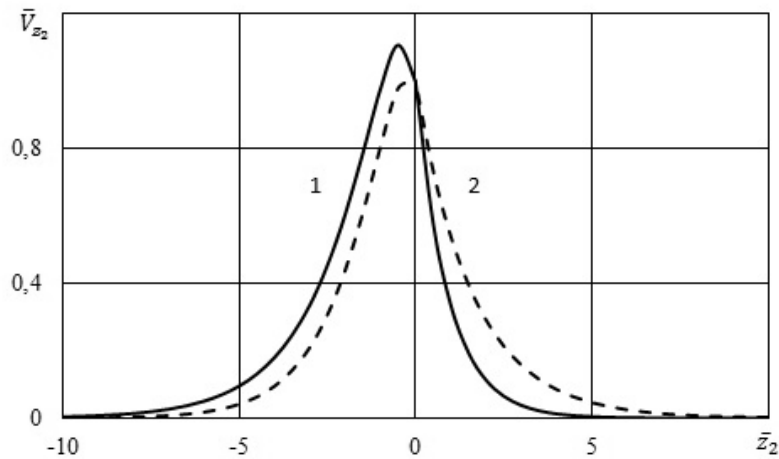


Рис. 8

Графіки, представлені на рис. 7, 8, як і в попередньому випадку, отримані для поверхневої моди I (рис. 4, 6) в короткохвильовій частині спектра при частоті (товщині) рідкого шару $\bar{h} = 20$. При цьому $\bar{c} = 0,623644$ для $\lambda_1 = 0,8$ і $\bar{c} = 0,7531957$ для $\lambda_1 = 1$.

Як видно з графіків рис. 4 – 7, фазова швидкість першої моди змінюється від швидкості хвилі Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,955313$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{c}_R = 0,709557$ для $\lambda_1 = 0,8$) при $\bar{h} \rightarrow 0$ до швидкості хвилі Стоунлі \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,75317957$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{c}_{st} = 0,623644$ для $\lambda_1 = 0,8$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Швидкості мод вищого порядку (рис. 5) змінюються від швидкості хвилі зсуву \bar{c}_s ($\bar{c}_s = 1$ для $\lambda_1 = 1$) при частотах зародження до швидкості хвилі звуку в рідині \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,85$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Відзначимо, що для цих систем виконуються умови $\bar{a}_0 = 0,85 < \bar{c}_R = 0,955313$ для $\lambda_1 = 1$ (рис. 5) і $\bar{a}_0 = 0,85 > \bar{c}_R = 0,709557$ для $\lambda_1 = 0,8$ (рис. 6). Як випливає з графіків, наведених на рис. 7, 8, в даних гідропружних системах це призводить до того, що в короткохвильовій частині спектра мода I , поширюючись вздовж межі розділу середовищ, локалізується в приконтактних областях як рідини, так і пружного півпростору. Крім того, графіки, наведені на рис. 5 і

отримані при відсутності початкового деформування ($\lambda_1 = 1$), відповідають гідропружній системі, у якій швидкість хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла \bar{c}_s перевищує швидкість хвилі звуку в рідині \bar{a}_0 ($\bar{c}_s = 1 > \bar{a}_0 = 0,85$). Як випливає з рисунка, в цьому випадку в пружно-рідинному хвильоводі генеруються і поширюються моди високого порядку. Представлений на рис. 6 графік, ілюструє вплив на хвильовий процес початкового стиснення ($\lambda_1 = 0,8$). При цьому для гідропружної системи має місце співвідношення $\bar{c}_s = 0,8 < \bar{a}_0 = 0,85$. Як бачимо, в цьому випадку в пружно-рідинному хвильоводі поширюється лише одна нижча поверхнева хвиля.

На рис. 9 – 13 представлені числові результати у вигляді графіків для гідропружного хвильоводу, компонентами якого є високоеластичний півпростір і шар гіпотетичної рідини зі швидкістю звуку в ній, рівною $\bar{a}_0 = 0,7$.

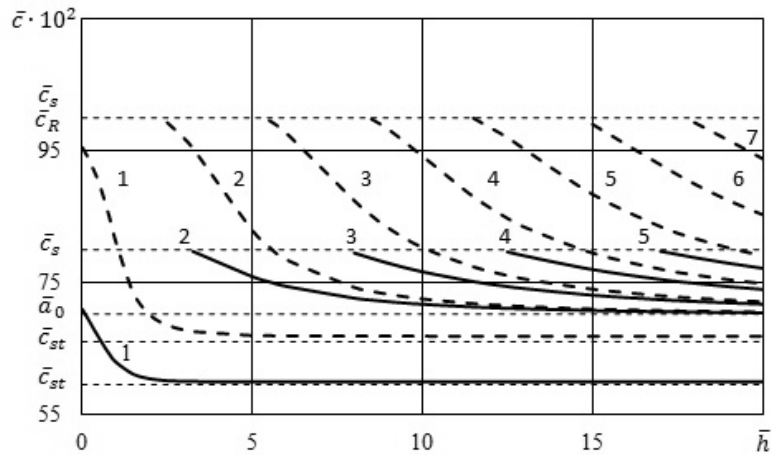


Рис. 9

Графіки, представлені на рис. 10 і 11, відображають розподіл амплітуд зміщень (швидкостей $\partial u_i / \partial t$ і v_i) для гідропружного хвильоводу, що складається з пружного півпростору ($-\infty < \bar{z}_2 \leq 0$) і шару ($0 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{h}$) ідеальної рідини, швидкість звукової хвилі в якій $\bar{a}_0 = 0,7$. На них наведені залежності безрозмірних величин поздовжніх \bar{V}_{z_1} (рис. 10) і поперечних \bar{V}_{z_2} (рис. 11) зсувів від безрозмірної поперечної координати \bar{z}_2 для двох поверхневих мод, позначених цифрами 1 на рис. 9.

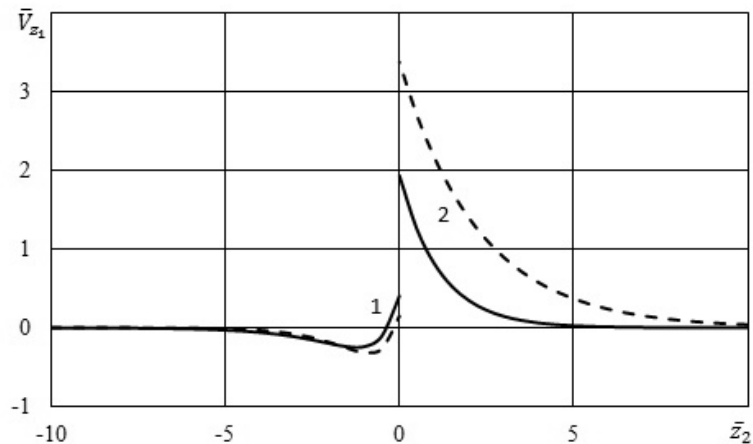


Рис. 10

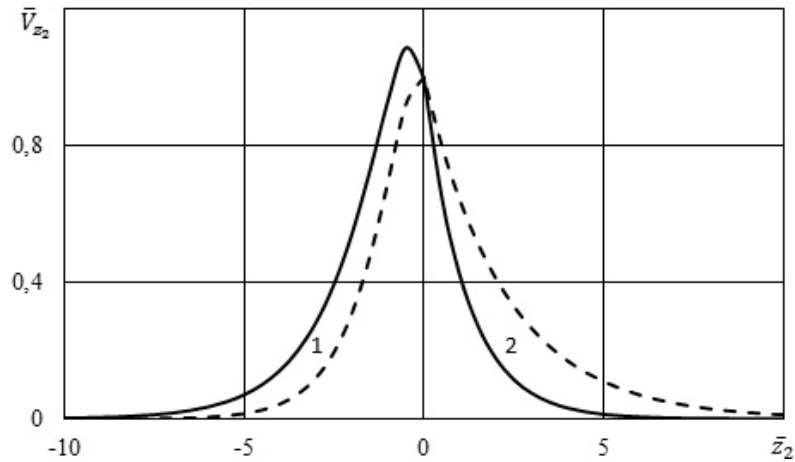


Рис. 11

Графіки, представлені на рис. 10, 11, як і в попередньому випадку, отримані для поверхневої моди I (рис. 9) в короткохвильовій частині спектра при частоті (товщині) рідкого шару $\bar{h} = 20$. При цьому швидкості нижчих перших мод (рис. 9) рівні $\bar{c} = 0,599293$ для $\lambda_1 = 0,8$ і $\bar{c} = 0,66863858$ для $\lambda_1 = 1$.

Як видно з графіків рис. 9, фазова швидкість першої моди змінюється від швидкості хвилі Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,955313$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{c}_R = 0,709557$ для $\lambda_1 = 0,8$) при $\bar{h} \rightarrow 0$ до швидкості хвилі Стоунлі \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,66863858$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{c}_{st} = 0,599293$ для $\lambda_1 = 0,8$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Швидкості мод вищого порядку \bar{c} змінюються від швидкості хвилі зсуву \bar{c}_s ($\bar{c}_s = 1$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{c}_s = 0,8$ для $\lambda_1 = 0,8$) при частотах зародження до швидкості хвилі звуку в рідині \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,7$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Відзначимо, що при $\lambda_1 = 1$ швидкість звуку в рідкому шарі менша швидкості поверхневої хвилі Релея ($\bar{a}_0 = 0,7 < \bar{c}_R = 0,955313$). При цьому, як випливає з графіків (рис. 10, 11), в короткохвильовій частині спектра глибина проникнення нижчої моди I (хвиля типу Стоунлі) в рідкий шар перевищує глибину проникнення в пружний півпростір (штрихові лінії).

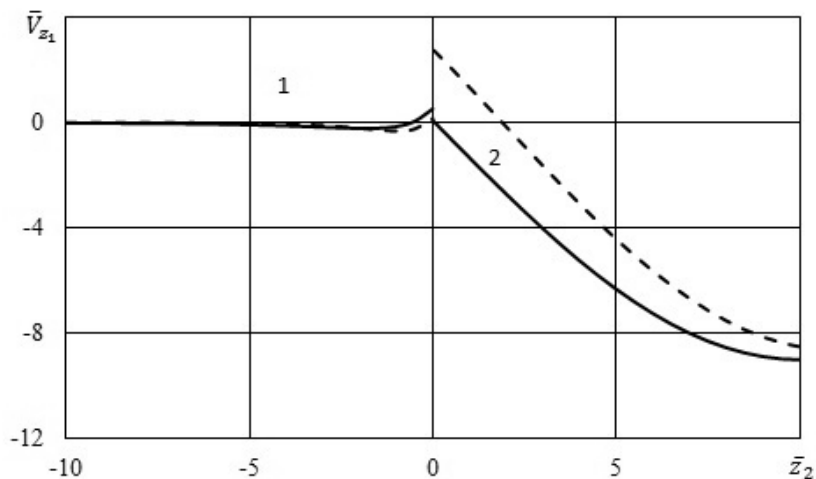


Рис. 12

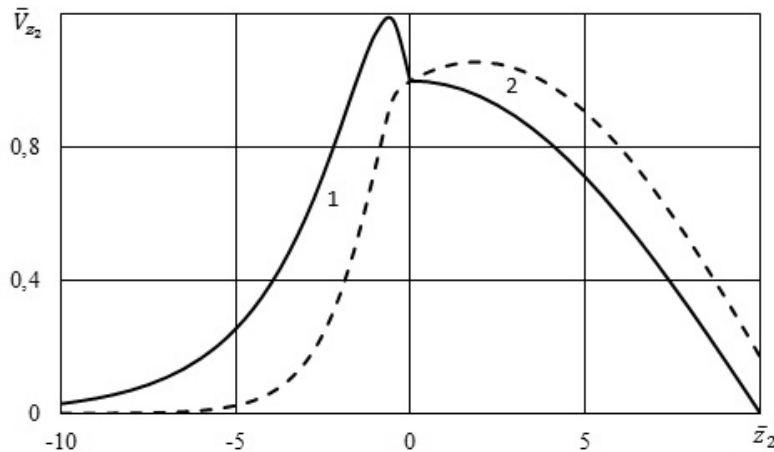


Рис. 13

Графіки, представлені на рис. 12, 13, відображають розподіл безрозмірних амплітуд зміщень (швидкостей) \bar{V}_{z_1} і \bar{V}_{z_2} для моди 2 (рис. 9). Як і в попередніх випадках, кінематичні характеристики отримані при товщині шару рідини $\bar{h} = 20$ і $\bar{c} = 0,704298$ при $\lambda_1 = 0,8$, а також $\bar{c} = 0,705227$ при $\lambda_1 = 1$.

Як видно з графіків, представлених на рис. 12, 13, в приконтактній області пружного півпростору ($-10 \leq \bar{z}_2 \leq 0$) поздовжні зміщення \bar{V}_{z_1} моди 2 мізерно малі, а поперечні \bar{V}_{z_2} – швидко зменшуються з глибиною. У рідині ($0 \leq \bar{z}_2 \leq 10$) ситуація протилежна. У ній поздовжні зміщення \bar{V}_{z_1} моди 2 зростають з глибиною, а поперечні \bar{V}_{z_2} , приймаючи максимальне значення в околі межі розділу середовищ, повільно зменшуються з глибиною. Це свідчить про те, що мода 2 поширюється, переважно, в рідкому шарі. Моди високого порядку з ростом частоти (товщини) \bar{h} також локалізуються в рідкому шарі. При цьому рухи в модах високого порядку при $\bar{h} \rightarrow \infty$ зміщуються від поверхонь шару рідини в його товщу. Графіки, представлені на рис. 12, 13 (суцільні лінії), показують, що стиснення ($\lambda_1 = 0,8$) зменшує глибину проникнення хвильових рухів моди 2 в рідину і збільшує її проникнення в пружний півпростір.

§4. Критерії існування мод в гідропружних хвилеводах.

Аналіз дисперсійних рівнянь, проведені додаткові розрахунки і отримані в даній роботі числові результати, дозволяють встановити критерії існування мод в пружно-рідинних хвилеводах.

В системі, компонентами якої є пружний півпростір і шар рідини, таким критерієм може служити співвідношення між швидкістю хвилі звуку в рідкому шарі \bar{a}_0 і швидкістю хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла \bar{c}_s . При $\bar{a}_0 > \bar{c}_s$, як видно з графіків, представлених на рис. 1, 6 ($\bar{a}_0 = 46,153442 > \bar{c}_s = 1$ для $\lambda_1 = 1$, $\bar{a}_0 = 46,153442 > \bar{c}_s = 0,8$ для $\lambda_1 = 0,8$ і $\bar{a}_0 = 0,85 > \bar{c}_s = 0,8$ для $\lambda_1 = 0,8$), в гідропружних композиціях «гума – вода» і «гума – гіпотетична рідина ($\bar{a}_0 = 0,85$)» поширюється лише одна поверхнева хвиля, швидкість якої змінюється від швидкості хвилі Релея \bar{c}_R (при $\bar{h} \rightarrow 0$) до швидкості хвилі Стоунлі \bar{c}_{st} (при $\bar{h} \rightarrow \infty$). У разі виконання умови $\bar{a}_0 < \bar{c}_s$ в гідропружному хвилеводі поширюється безліч мод вищого порядку. При цьому, як впливає з графіків на рис. 9, в системі з гіпотетичною рідиною при $\bar{a}_0 = 0,7 < \bar{c}_s = 1$ для $\lambda_1 = 1$ і $\bar{a}_0 = 0,7 < \bar{c}_s = 0,8$ для $\lambda_1 = 0,8$ на інтервалі зміни \bar{h} від 0 до 20 генерується і поширюється 7 мод при

$\lambda_1 = 1$ і 5 мод при $\lambda_1 = 0,8$. У системі з $\bar{a}_0 = 0,85 < \bar{c}_s = 1$ при $\lambda_1 = 1$ в частотному діапазоні 0 – 50 (рис. 4, 5) виникає 5 мод. При цьому швидкості перших мод змінюються від швидкості хвилі Релея \bar{c}_R при $\bar{h} \rightarrow 0$ до швидкості хвилі Стоунлі \bar{c}_{st} при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Швидкості мод вищого порядку змінюються від швидкості хвилі зсуву в пружному тілі \bar{c}_s до швидкості звукової хвилі в рідині \bar{a}_0 .

§5. Вплив скінченних початкових деформацій на хвильові процеси в гідропружних системах.

Відмінності в закономірностях впливу попередніх деформацій на швидкості мод для гідропружних систем при $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ і $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ пов'язані з локалізацією цих мод в різних середовищах. При $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ поверхнева хвиля I поширюється, переважно, в пружному тілі. Цим обумовлено вплив початкових напружень на цю хвилю в усьому частотному діапазоні. Початкове стиснення ($\lambda_1 = 0,8$), як випливає з графіків на рис. 1 і 6, призводить до зниження фазової швидкості поверхневої хвилі у всьому інтервалі частот. Найбільший вплив попередні деформації мають на швидкість хвилі в околі частоти її замикання.

У разі багатомодового хвилеводу (рис. 9) найбільший вплив початкові напруження мають на фазові швидкості мод вищого порядку в околі критичних частот. Характер впливу початкових напружень на швидкості мод вищого порядку при збільшенні товщини шару рідини (частоти) викликаний тим, що при $\bar{h} \rightarrow \infty$ рухи в модах високого порядку, починаючи з другої (рис. 9, 12, 13), зміщуються від поверхонь шару рідини в його товщу. Цим, мабуть, і пояснюється незначний вплив пружного півпростору і початкових напружень на фазові швидкості, а також дисперсію цих мод в короткохвильовій частині частотного спектра. Крім того, для рідкого шару, що взаємодіє з пружним півпростором, початкові напруження викликають зміну частот зародження мод, зміну їх дисперсійних кривих, а також їх зміщення. Як видно з графіків, наведених на рис. 9, початкове стиснення ($\lambda_1 = 0,8$) зміщує критичні частоти і дисперсійні криві в довгохвильову частину частотного спектру. Це призводить до зниження величин фазових швидкостей всіх мод.

Крім того, як випливає з графіків, представлених на рис. 2, 3, 7, 8, 10 – 13, початкове стиснення ($\lambda_1 = 0,8$) викликає зменшення глибини проникнення хвильових рухів в рідину і збільшення глибини проникнення їх в пружний півпростір.

Вплив великих (скінченних) попередніх деформацій пружного півпростору на хвильовий процес в гідропружній системі проявляється не тільки кількісно, але і якісно. Аналіз графіків, наведених на рис. 4, 5 і 6, показує, що великі (скінченні) початкові деформації можуть привести не тільки до зміни величин фазових швидкостей і дисперсійної картини мод, а й до більш істотної зміни характеру хвильового процесу в гідропружній системі в цілому. Як видно з рис. 5 і 6, початкове стиснення ($\lambda_1 = 0,8$) змінило співвідношення між механічними параметрами системи з $\bar{a}_0 < \bar{c}_s$ ($\bar{a}_0 = 0,85 < \bar{c}_s = 1$ при $\lambda_1 = 1$) (рис. 5) на $\bar{a}_0 > \bar{c}_s$ ($\bar{a}_0 = 0,85 > \bar{c}_s = 0,8$ при $\lambda_1 = 0,8$) (рис. 6), що призвело до перетворення багатомодового хвилеводу в одномодовий. Неважко припустити, що на відміну від стиску початковий розтяг може призвести до зворотної трансформації властивостей хвилеводів.

Висновок.

Таким чином, аналіз показує, що в пружно-рідинній системі при $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ в високочастотній частині спектра поверхнева хвиля частково проникає як в рідину, так і в пружний півпростір. При цьому приконтатні області пружного півпростору і шару рідини формують хвилевід, за яким поширюються хвильові збурення і здійснюється перенесення більшої частини енергії хвилі.

У гідропружній системі з гіпотетичною рідиною при $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ як нижча поверхнева мода, так і моди високого порядку проникають в рідкий шар і поширюються, переважно, в ньому. При цьому рідкий шар є визначальним у формуванні хвильового поля і основним хвилеводом, за яким поширюються хвильові збурення і здійснюється перенесення більшої частини енергії хвиль. Початкове стиснення зменшує глибину проникнення хвильових рухів в рідину і збільшує глибину проникнення їх в пружний півпростір.

Встановлено, що одним з важливих механічних ефектів, обумовлених взаємодією полів початкових і динамічних напружень, є реальна можливість великих (скінченних) початкових деформацій кардинально змінювати в гідропружній системі характер хвильового процесу, трансформуючи його з багатомодового в одномодовий і навпаки.

Запропонований підхід і отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити межі застосовності моделей, основаних на різних варіантах теорії малих початкових деформацій, а також класичної теорії пружності.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконані за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про поширення нормальних хвиль у попередньо деформованому нестисливому півпросторі, що взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини. Дослідження проведено на основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для нестисливого пружного півпростору та тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, які базуються на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного тіла та рідини. Одержано дисперсійне рівняння, яке описує поширення гармонічних хвиль у гідропружній системі. Побудовано дисперсійні криві нормальних хвиль в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив скінченних початкових деформацій пружного півпростору та товщини шару ідеальної стисливої рідини на фазові швидкості гармонічних хвиль. Показано, що вплив початкових деформацій пружного півпростору на параметри хвильового процесу пов'язаний з властивостями локалізації хвиль. Запропоновано критерій існування нормальних хвиль у гідропружних хвилеводах. Показано, що скінченні початкові деформації можуть значно змінити характер хвильового процесу в гідропружній системі. Розвинутий підхід і отримані результати дозволяють встановити межі застосування моделей хвильових процесів, основаних на різних варіантах теорії малих початкових деформацій та класичній теорії пружності для твердого тіла. Числові результати наведено у вигляді графіків і дано їх аналіз.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нормальні хвилі, фазова швидкість, нестисливий пружний півпростір, шар ідеальної стисливої рідини, скінченні початкові деформації.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: А.С.К., 1998. – 350 с.
4. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
6. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
7. *Гузь А.* Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
8. *Жук А.П.* Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 1. – С. 113 – 116.

9. Babich S.Y., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses // Soviet Appl. Mech. – 1979. – **15**, N 4. – P. 277 – 291.
10. Bagno A.M., Guz A.N. Elastic Waves in Pre-stressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 6. – P. 435 – 463.
11. Drinkwater B.W., Wilcox P.D. Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review // NDT & E Int. – 2006. – **39**, N 7. – P. 525 – 541.
12. Gibson A., Popovics J. Lamb wave basis for impact-echo method analysis // J. Engng. Mech. – 2005. – **131**, N 4. – P. 438 – 443.
13. Guz A.N. Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Soviet Appl. Mech. – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
14. Guz A.N. Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 23 – 59.
15. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
16. Guz A.N. On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // J. Phys. Sci. and Appl. – 2011. – **1**, N 1. – P. 1 – 15.
17. Guz A. N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
18. Guz A.N., Bagno A.M. Effect of Prestresses on Lamb Waves in a System Consisting of an Ideal Liquid Half-Space and an Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 495 – 505.
19. Guz A.N., Bagno A.M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 585 – 595.
20. Guz A.N., Bagno A.M. Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 1 – 12.
21. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M. Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
22. Jhang K.Y. Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material: a review // Int. J. Precision Engng. and Manufacturing. – 2009. – **10**, N 1. – P. 123 – 135.
23. Kessler S.S., Spearing S.M., Soutis C. Damage detection in composite materials using Lamb wave methods // Smart Materials and Struct. – 2002. – **11**, N 2. – P. 269 – 279.
24. Kobayashi M., Tang S., Miura S., Iwabuchi K., Oomori S., Fujiki H. Ultrasonic nondestructive material evaluation method and study on texture and cross slip effects under simple and pure shear states // Int. J. Plasticity. – 2003. – **19**, N 6. – P. 771 – 804.
25. Leonard K.R., Malyarenko E.V., Hinders M.K. Ultrasonic Lamb wave tomography // Inverse Problems. – 2002. – **18**, N 6. – P. 1795 – 1808.
26. Liu L., Ju Y. A high-efficiency nondestructive method for remote detection and quantitative evaluation of pipe wall thinning using microwaves // NDT and E Int. – 2011. – **44**, N 1. – P. 106 – 110.
27. Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W. Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. Non-Lin. Mech. – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.
28. Ramadas C., Balasubramaniam K., Joshi M., Krishnamurthy C.V. Interaction of the primary anti-symmetric Lamb mode (A₀) with symmetric delaminations: numerical and experimental studies // Smart Materials and Struct. – 2009. – **18**, N 8. – P. 1 – 7.
29. Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G. Methods of measuring residual stresses in components // Materials and Design. – 2012. – **35**. – P. 572 – 588.
30. Spies M. Analytical methods for modeling of ultrasonic nondestructive testing of anisotropic media // Ultrasonics. – 2004. – **42**, N 1 – 9. – P. 213 – 219.

Надійшла 23.05.2019

Затверджена до друку 24.06.2021