

І. В. Луцька, В. А. Максимюк

ДЕФОРМУВАННЯ ОРТОТРОПНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ ОБОЛОНОК СУПЕРЕЛІПТИЧНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ Україна; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

Abstract: The statical problems of thin orthotropic toroidal shells with superelliptical or supercircle cross sections are examined. The study is carried out following a procedure based on the variational-difference method, the method of Lagrangian multipliers, and the use of mixed functionals. This problem can complement some so-called pathological tests due to the presence of membrane locking.

Key words: thin shell theory, Lagrange multipliers, composite toroidal shell, membrane locking effect.

Вступ.

Серед тонкостінних резервуарів високого тиску різної форми тороїдальні оболонки завдяки своїй компактності займають особливе місце як паливні баки [17]. З метою збільшення компактності досліджують оболонки неколового поперечного перерізу: еліптичного [13], овального [16], косоного еліптичного [12], параболічно-огівального (з гострими вершинами) [5], кусково-колового [7] та інших видів перерізів. Часто для проектування тороїдальних оболонок різного призначення використовують композитні матеріали [11, 14, 15].

Неколовий поперечний переріз викликає ряд особливостей у деформуванні циліндричних оболонок [2, 3, 6]. Так, еліптичний переріз у циліндричній оболонці деформується, як правило, з наближенням до колової форми [2]. В тороїдальних оболонках така особливість теж спостерігається [4, 8], але в меншій мірі. Можна очікувати, що в тороїдальних оболонках супереліптичного перерізу деформування матиме ряд нових особливостей.

Розрахунок напружено-деформованого стану (НДС) таких оболонок класичними чисельними сітковими методами ускладнюється через так зване явище мембранного замикання (membrane locking) [9]. Явище проявляється у сповільненій, але стійкій, збіжності класичних чисельних методів внаслідок значних згинів за невеликих розтягів. Очевидно, у випадку супереліптичного перерізу циліндричних, тороїдальних та інших оболонок розрахунок НДС ще більше ускладниться. Щодо оболонок колового перерізу, то в розрахунках за внутрішнього тиску мембранне замикання зазвичай не спостерігається. Проте, якщо переріз матиме форму суперкола (supercircle), то мембранне замикання може проявитися, коли суперколо наблизатиметься до квадрата з заокругленими краями, де очікуються великі згини.

1. Постановка задачі.

Супереліпс (superellipse, крива Ламе) є плоскою кривою, що задається в декартових координатах рівнянням

$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1, \quad n > 2. \quad (1)$$

При $a = b = R$ крива (1) стає суперколом (supercircle, squircle). Зі збільшенням n супереліпс наблизатиметься до прямокутника із заокругленими краями зі сторонами a і

b , а суперколо – до квадрата зі стороною R .

Нехай серединна поверхня замкненої тороїдальної оболонки утворена обертанням навколо осі Oy супереліпса (рис. 1)

$$F(x, y) = \left| \frac{x-c}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n - 1 = 0, \quad n > 2, \quad (2)$$

де c – відстань від центру поперечного перерізу супереліпса до осі обертання.

Серединну поверхню віднесемо до криволінійної системи координат (s, θ, γ) , у якій координата γ спрямована по нормалі до поверхні, а s – довжина дуги еліпса, яка вимірюється від точки $A(x = c + a, y = 0)$ до точки $E(x = c - a, y = 0)$ проти годинникової стрілки.

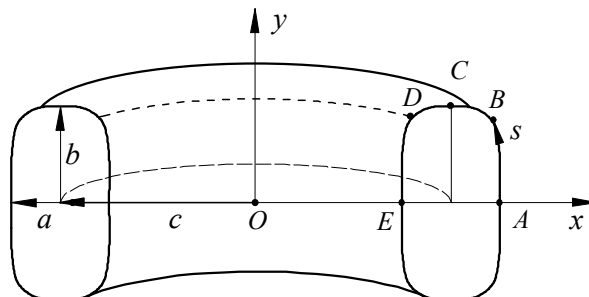


Рис. 1

Осі ортотропії матеріалу збігаються з координатними лініями прийнятої системи координат. У точках A і E , тобто в площині $y = 0$, задавалися умови симетрії. Під дією рівномірно розподіленого внутрішнього тиску p НДС оболонки буде осесиметричним.

Прийнято, що НДС розглянутих оболонок описується лінійними геометричними рівняннями теорії тонких оболонок і фізичними рівняннями теорії пружності анізотропних середовищ [1]. Базову систему рівнянь отримано на основі варіаційно-різницьового методу (ВРМ). Геометричну частину гіпотез Кірхгофа – Лява реалізовано методом множників Лагранжа. Для зменшення впливу мембранного замикання [9] та покращення збіжності у змішаному функціоналі додатково варіюється меридіональна деформація ε_s^f [8]. Дискретизацію супереліпса виконано за алгоритмом типу дотичної [4].

2. Числові результати. Супереліптичний переріз.

Геометричні параметри оболонки товщиною h такі: $a/h = 100$, $b/h = 110$, $c/h = 200$, $n = 4$, довжина половини дуги супереліпса $s_k/h = 369$. Характеристики ортотропного матеріалу: $E_s = 15$ ГПа; $E_\theta = 12$ ГПа; $\nu_s = 0,12$. Навантаження – $p = 0,1$ МПа.

Половина дуги супереліпса розбивалася на ряд вузлових точок з рівномірним кроком. У табл. 1 для характерних точок тора $\tilde{s} = s/s_k$ наведені дотичні переміщення $\tilde{u} = u/h$ й прогини $\tilde{w} = w/h$ серединної поверхні, а також віднесені до тиску p меридіональні (σ_s^+, σ_s^-) і колові $(\sigma_\theta^+, \sigma_\theta^-)$ напруження на зовнішній (+) і внутрішній (-) поверхнях оболонки.

Поблизу «діагональних» точок B і D супереліпса ($\tilde{s} = 0,35; 0,65$) і в «діаметральних» точках C ($\tilde{s} = 0,5$) виникають значні моменти. Максимальними є меридіональні напруження (σ_s^+) на зовнішній поверхні поблизу точки C . Там же має місце максимальний прогин. Поблизу «діагональних» точок B і D , у яких моменти досягають локальних максимумів, переріз розгинається.

Таблиця 1

Точка	\tilde{s}	\tilde{y}	\tilde{w}	σ_s^+	σ_s^-	σ_θ^+	σ_θ^-
<i>A</i>	0	0	0,728	101	64	300	298
<i>B</i>	0,35	1,719	1,762	-1393	1860	-680	-555
<i>C</i>	0,5	0,071	28,05	2869	-2235	221	-246
<i>D</i>	0,65	-1,126	-0,130	-1783	2528	640	1297
<i>E</i>	1,0	0	0,095	157	149	-100	-99

Ці розгини викликають значний прогин в точці *C* за порівняно невеликих деформацій (табл. 2). Точка *C* і область поблизу неї зміщуються як жорстке ціле, віддаляючись від центру супереліпса, на відміну від випадку еліптичного перерізу [4]. В точках *A* і *E* подібне жорстке зміщення відсутнє, оскільки вони утримуються не тільки меридіональними, а й коловими нитками матеріалу тора.

Таблиця 2

γ/h	$\varepsilon_s \cdot 10$	$\varepsilon_\theta \cdot 10^3$
0,5	0,189	-0,447
-0,5	-0,147	-0,269

Отже, тороїдальна оболонка супереліптичного поперечного перерізу під внутрішнім тиском деформується так, що її переріз намагається набрати еліпсоподібну форму (рис. 2).

За використання у ВРМ функціонала без додаткового варіювання меридіональної деформації ε_s^f для досягнення точності до трьох значущих цифр у максимальних величинах необхідно було розбити половину дуги супереліпса ($n = 4$) на 2000 вузлових точок, тоді як у випадку еліпса ($n = 2$) достатньо було 200 точок [4], що є проявом мембранного замикання. Додаткове варіювання меридіональної деформації ε_s^f , як і в [8], значно покращує збіжність.

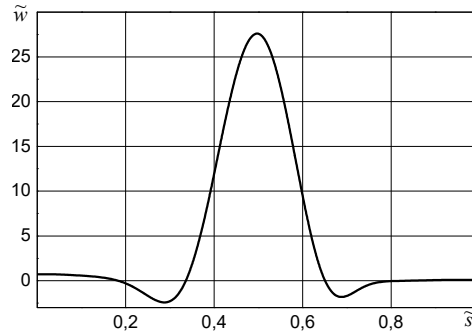


Рис. 2

3. Суперколовий переріз.

Для порівняння в табл. 3 наведено аналогічні результати для тороїдальної оболонки суперколового поперечного перерізу з параметрами: $R/h=100$, $c/h=200$, $n = 4$, $s_k/h = 351$. Матеріал та навантаження такі ж, як і у випадку супереліпса.

Таблиця 3

Точка	\tilde{s}	\tilde{y}	\tilde{w}	σ_s^+	σ_s^-	σ_θ^+	σ_θ^-
<i>A</i>	0	0	0,727	106	58	300	297
<i>B</i>	0,35	1,731	-2,02	-1318	1674	-1152	-916
<i>C</i>	0,5	0,807	30,64	2997	-2332	227	-260
<i>D</i>	0,65	-1,174	1,370	-1803	2617	432	1202
<i>E</i>	1,0	0	0,095	159	148	-99	-99

Як і в попередньому випадку, поблизу «діагональних» точок *B* і *D* суперкола ($\tilde{s} = 0,25; 0,75$) та в «діаметральних» точках *C* ($\tilde{s} = 0,5$) виникають значні моменти. Також наявне жорстке зміщення області поблизу точки *C*. Деформуючись, поперечний переріз витягується вздовж вісі обертання *Oy* і намагається набрати еліпсоподібну форму.

Висновок.

Порівняно невелика ($b/a = 1,1$) еліптичність поперечного перерізу суперелліпса ($n = 4$) оболонки приводить до незначного перерозподілу моментів поблизу «діагональних» точок. А максимальні напруження (точка C) дещо зменшуються, на відміну від випадку простого ($n = 2$) колового [10] й еліптичного [4] перерізів за інших рівних параметрів. З погляду механіки оболонок можна стверджувати, що у впливі параметрів суперелліптичного перерізу на характер деформування показник кривої відіграє першочергову роль порівняно з еліптичністю. Дана віссиметрична задача може доповнити ряд так званих патологічних тестів.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено проблеми статичної тонких ортотропних тороїдальних оболонок із суперелліптичним або суперколовим перерізами. Дослідження проведено відповідно до процедури, основаної на варіаційно-різницевому методі, методі множників Лагранжа та використанні змішаних функціоналів. Ця задача через наявність мембранного замикання може доповнити ряд так званих патологічних тестів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: теорія тонких оболонок, множники Лагранжа, композитні тороїдальні оболонки, явище мембранного замикання.

1. *Механика композитов* (под общей ред. Гузя А.Н.): в 12-и томах. Т. 7. *Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др.* Концентрация напряжений. – Киев: «А.С.К.», 1998. – 387с.
2. *Abrosov Yu.Yu., Maksimuk V.A., Chernyshenko I.S.* Physically Nonlinear Deformation of a Long Orthotropic Cylindrical Shell with Elliptic Cross-Section // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 3. – P. 282 – 289.
3. *Akgün G., Kurtaran H.* Geometrically nonlinear transient analysis of laminated composite super-elliptic shell structures with generalized differential quadrature method // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2018. – **105**. – P. 221 – 241.
4. *Chernyshenko I.S., Maksimuk V.A.* On the Stress-Strain State of Toroidal Shells of Elliptical Cross Section Formed from Nonlinear Elastic Orthotropic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 1. – P. 90 – 97.
5. *Enoma N., Zingoni A.* Buckling of an externally pressurised toroidal shell of revolution with a doubly-symmetric parabolic-ogival cross-section // *Int. J. of Pressure Vessels and Piping.* – 2020. – **183**. – e104106.
6. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Stress Analysis of Hollow Orthotropic Cylinders with Oval Cross-Section // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 2. – P. 160 – 171.
7. *Kartal F., Kisioglu Y.* Fatigue Performance Evaluations of Vehicle Toroidal Liquefied Petroleum Gas Fuel Tanks // *J. Pressure Vessel Technol.* – 2017. – **139**, N 4. – e041402.
8. *Lutskaya I.V., Maksimuk V.A., Chernyshenko I.S.* Modeling the Deformation of Orthotropic Toroidal Shells with Elliptical Cross-Section Based on Mixed Functionals // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 6. – P. 660 – 665.
9. *Maksimuk V.A.* Locking Phenomenon in Computational Methods of the Shell Theory // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 3. – P. 347 – 350.
10. *Maksimuk V.A., Chernyshenko I.S.* Nonlinear Elastic State of Thin-Walled Toroidal Shells Made of Orthotropic Composites // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 12. – P. 1238 – 1245.
11. *Patiño-Pérez D., Corz-Rodríguez A.* Optimum design of a toroidal pressure vessel of composite material for gas (CNG) powered vehicles // *Dyna.* – 2019. – **94**, N 5. – P. 546 – 553.
12. *Sun B.H.* Geometry-induced rigidity in elastic torus from circular to oblique elliptic cross-section // *Int. J. of Non-linear Mech.* – 2021. – **135**. – e103754.
13. *Sutcliffe W.J.* Stress analysis of toroidal shells of elliptical cross-section // *Int. J. Mech. Sci.* – 1971. – **13**, N 11. – P. 951 – 958.
14. *Tizzi S.* A free vibration analysis of toroidal composite shells in free space // *J. of Sound and Vibration.* – 2015. – **337**. – P. 116 – 134.
15. *Vick M.J., Gramoll K.* Finite Element Study on the Optimization of an Orthotropic Composite Toroidal Shell // *J. of Pressure Vessel Technol.* – 2012. – **134**, N 5. – e051201.
16. *Zhan H.J., Redekop D.* Static and dynamic loading of an ovaloid toroidal tank // *Thin-Walled Struct.* – 2009. – **47**, N 6-7. – P. 760 – 767.
17. *Zingoni A.* Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics // *Thin-Walled Struct.* – 2015. – **87**. – P. 102 – 114.

Надійшла 28.02.2020

Затверджена до друку 24.06.2021