

В. Ф. Мейш¹, **Ю. А. Мейш²**, **В. Ф. Корнієнко¹**

**ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ ОБОЛОНОК РІЗНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
З КУСКОВО-ОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ
ПРИ РОЗПОДІЛЕНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: vfmeish@gmail.com;*

²*Національний транспортний університет,
вул. Омеляновича – Павленка, 1, 01010, Київ, Україна, e-mail: juliameish@gmail.com*

Abstract. The problems of the dynamic behavior of three-layer shells of various geometries (cylindrical, conical, spherical) with a partially homogeneous filler under the unsteady loads are considered. A variant of the Timoshenko theory of shells for the case of the adoption of independent kinematic hypotheses for each layer is used. To derive the equations of vibration of inhomogeneous structures, the Reissner variational principle is used. The equations of oscillations in differential form with the corresponding boundary and initial conditions are obtained. To solve the problems posed, the finite difference method is used, based on the application of the integro-interpolation approach for constructing difference schemes in spatial coordinate and explicit approximation in the time coordinate. The problems of the dynamic behavior of three-layer cylindrical, conical, and spherical shells under unsteady loads are solved. The numerical results are analyzed.

Key words: three-layer shells of revolution, the theory of Timoshenko type, forced vibrations, numerical solution.

Вступ.

Застосування прикладних теорій оболонок дозволяє спростити розрахунки напружено-деформованого стану (НДС) тришарових оболонок у порівнянні із тривимірною теорією. Задачам динамічної поведінки неоднорідних по товщині оболонок під дією нестационарних навантажень присвячена значна кількість робіт. До них належать задачі динамічної поведінки підкріплених оболонок [10 – 13], тришарових оболонок із заповнювачем різного виду [1, 2, 4, 7, 14 – 19] та ін. Можна виокремити два основні напрямки побудови прикладних теорій шаруватих оболонок [4]. Перший напрямок включає дослідження, в яких основні співвідношення теорії багатошарових оболонок будуються на підставі інтегральних гіпотез (гіпотези Кірхгофа або Тимошенка для усього пакета). Порядок розв'язуючої системи диференціальних рівнянь при цьому не залежить від числа шарів оболонки. Другий напрямок ґрунтується на застосуванні кінематичних і статичних гіпотез до кожного шару оболонки, що робить задачу більш складною внаслідок залежності загального порядку системи рівнянь від кількості шарів оболонки.

Характерною рисою тришарових оболонок є різноманітність конструкційних рішень, а отже й механічних властивостей заповнювача. У динамічних задачах необхідно прагнути до створення таких теорій тришарових оболонок, які дають можливість врахувати хвильову природу деформування в широкому діапазоні зміни властивостей заповнювача. У даній статті розвивається варіант рівнянь коливань тришарових оболонок обертання із застосуванням незалежних кінематичних і статичних гіпотез до кожного шару з врахуванням нормальних і зсувних деформацій у заповнювачі та зсу-

вних деформацій у несучих шарах [20]. Математична коректність моделі досягається шляхом використання варіаційного принципу Рейснера для динамічних процесів [7]. Розроблено чисельний метод розв'язання початково-крайових динамічних задач. Проведено порівняльний аналіз результатів динамічної поведінки оболонок згідно з теорією прийняття незалежних гіпотез до кожного шару та теорії на підставі інтегральних гіпотез (теорія пакета шарів).

§1. Постановка задачі.

Тришарова оболонка обертання складається із зовнішніх ортотропних шарів (обшивка) і внутрішнього ізотропного шару (заповнювач). Усі шари оболонки мають сталу товщину h_k ($k = \overline{1,3}$) і деформуються без проковзування й відриву. Оболонка віднесена до ортогональної системи координат α_1, α_2, z , у якій серединні поверхні шарів є координатними поверхнями $z = \text{const}$. Крім того, для кожного шару вводяться локальні системи координат, які утворюються паралельним переносом зазначеної системи вздовж осі z . Зв'язок між локальними системами $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, z_k$ та загальною системою координат визначається згідно залежностей $\alpha_{1k} = \alpha_1, \alpha_{2k} = \alpha_2, z_k = z - z^k, -h_k/2 \leq z \leq h_k/2$, де z^k – координата z серединної поверхні k -го шару.

При виведенні рівнянь динамічного деформування тришарової оболонки будемо виходити з наступних положень.

Для опису закону зміни переміщень по товщині відповідних шарів приймаються наступні залежності:

- для зовнішніх шарів

$$\begin{aligned} u_1^{kz}(\alpha_1, z) &= u_1^k(\alpha_1) + z\varphi_1^k(\alpha_1); \\ u_3^{kz}(\alpha_1, z) &= u_3^k(\alpha_1), \quad k = \overline{1,3}; \quad -h_k/2 \leq z^k \leq h_k/2; \end{aligned} \quad (1.1)$$

- для внутрішнього шару

$$\begin{aligned} u_1^{2z}(\alpha_1, z) &= u_1^2(\alpha_1) + z\varphi_1^2(\alpha_1); \\ u_3^{2z}(\alpha_1, z) &= u_3^2(\alpha_1) + z\varphi_3(\alpha_1); \quad -h_k/2 \leq z^k \leq h_k/2. \end{aligned}$$

За незалежні шукані функції приймаємо компоненти вектора переміщення на поверхнях шарів

$$\bar{U} = (u_1(\alpha_1), u_2(\alpha_1), u_3(\alpha_1), u_4(\alpha_1), w_1(\alpha_1), w_3(\alpha_1))^T,$$

через які функції, що входять в (1.1), виражаються в такий спосіб:

$$\begin{aligned} u_1^k(\alpha_1) &= (u_{k+1}(\alpha_1) + u_k(\alpha_1)) / 2; \\ \varphi_1^k(\alpha_1) &= (u_{k+1}(\alpha_1) - u_k(\alpha_1)) / h_k, \quad k = \overline{1,3}; \\ u_3^k(\alpha_1) &= w_k(\alpha_1), \quad k = \overline{1,3}; \\ u_3^2(\alpha_1, z) &= (w_3(\alpha_1) + w_1(\alpha_1)) / 2; \\ \varphi_3(\alpha_1) &= (w_3(\alpha_1) - w_1(\alpha_1)) / h_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Формули (1.2) отримані з рівнянь контакту на поверхнях розділу шарів. В рамках нелінійної теорії оболонок у квадратичному наближенні [4] для деформаційних співвідношень у кожному шарі одержимо формули:

$$\varepsilon_{11}^{kz} = \varepsilon_{11}^k + z\kappa_{11}^k; \quad \varepsilon_{22}^{kz} = \varepsilon_{22}^k + z\kappa_{22}^k; \quad \varepsilon_{13}^{kz} = \varphi_1^k + \theta_1^k; \quad \varepsilon_{33}^2 = \varphi_3^2; \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_{11}^k = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^k}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2} (\theta_1^k)^2 + k_1 u_3^k; \quad \varepsilon_{22}^k = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1^k + k_2 u_3^k;$$

$$\kappa_{11}^k = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial \alpha_1}; \quad \kappa_{22}^k = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \varphi_1^k; \quad \theta_1^k = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^k}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1^k, \quad k = \overline{1, 3}.$$

У співвідношеннях (1.3) величини A_1, A_2, k_1, k_2 – коефіцієнти першої квадратичної форми серединних поверхонь шарів оболонки, які приймаються однаковими для всіх шарів.

Поперечні зсувні напруження змінюються по товщині шару за законом

$$\sigma_{13}^{kz}(\alpha_1, z) = f_k(z) \sigma_{13}^k(\alpha_1), \quad k = \overline{1, 3}, \quad (1.4)$$

причому функції $f_k(z)$ вибираються таким чином, щоб виконувалася умова неперервності величин поперечних зсувних напружень при відсутності поверхневих навантажень. Поперечне нормальне напруження σ_{33} в заповнювачі задається у вигляді

$$\sigma_{33}^z(\alpha_1, z) = f(z) \sigma_{33}(\alpha_1), \quad (1.5)$$

причому функція $f(z)$ вибирається таким чином, щоб виконувалися умови

$$\sigma_{33}^z(\pm h_2 / 2) = P_3^\pm(\alpha_1),$$

де $P_3^\pm(\alpha_1)$ – поперечне нормальне навантаження.

У вихідних рівняннях фізико-механічні параметри наповнювача є кусково-однорідними по довжині конструкції і визначаються згідно з наступними співвідношеннями

$$\begin{bmatrix} E_{fil}(\alpha_1) \\ \nu_{fil}(\alpha_1) \\ \rho_{fil}(\alpha_1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \left[\eta(\alpha_1 - \alpha_{1i}) - \eta(\alpha_1 - \alpha_{1i-1}) \right] \begin{bmatrix} E_i(\alpha_1) \\ \nu_i(\alpha_1) \\ \rho_i(\alpha_1) \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

де $\eta(\alpha_1)$ – функція Хевісайда; величини E_i, ν_i, ρ_i – фізико-механічні параметри області однорідного наповнювача; α_{1i} – лінії контакту наповнювача; α_{10} і α_{1N} – лінії границь оболонки.

Для виведення рівнянь коливань тришарової оболонки використовується варіаційний принцип Рейснера для динамічних процесів, згідно якого [7]

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(R - T) - \delta A] dt = 0, \quad (1.7)$$

де R – функціонал Рейснера; T – кінетична енергія; A – робота зовнішніх сил.

Використання варіаційного принципу Рейснера дозволяє усунути формальні протиріччя в рівняннях узагальненого закону Гука для поперечних нормальних і зсувних напружень відповідних шарів при прийнятті незалежних гіпотез апроксимацій переміщень (1.1), (1.2) та напружень (1.4), (1.5). При використанні принципу Рейснера незалежному варіюванню підлягають як переміщення, так і напруження. Після стандартних перетворень у функціоналі (1.7), з врахуванням незалежності варіацій компонент узагальненого вектора переміщень \bar{U} , отримано систему рівнянь коливань тришарових оболонок обертання в диференціальній формі. Рівняння коливань вихідної оболонкової структури відносно незалежних функцій переміщень на поверхнях шарів $u_1, u_2, u_3, u_4, w_1, w_3$ мають вигляд

$$L_{3m+1}(\bar{U}) = \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{2m+1} + u_{2m+2}}{2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^{m+1} \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{2m+2} - u_{2m+1}}{h_{2m+1}} \right), \quad (m = 0, 1); \\
L_3(\bar{U}) &= \frac{\rho_{fil}(s) h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_1 + u_2}{2} \right) - \frac{\rho_1 h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_2 - u_1}{h_1} \right) + \\
& + \frac{\rho_{fil}(s) h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3 + u_2}{2} \right) + \frac{\rho_{fil}(s) h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3 - u_2}{h_2} \right); \\
L_4(\bar{U}) &= \frac{\rho_3 h_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_2 + u_3}{2} \right) + \frac{\rho_{fil}(s) h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3 - u_2}{h_2} \right) - \\
& - \frac{\rho_3 h_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_4 + u_3}{2} \right) + \frac{\rho_3 h_3^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_4 - u_3}{h_3} \right); \tag{1.8} \\
L_{m+5}(\bar{U}) &= \rho_{2m+1} h_{2m+1} \frac{\partial^2 w_{2m+1}}{\partial t^2} + \frac{\rho_{fil}(s) h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w_1 + w_3}{2} \right) + \\
& + (-1)^{m+1} \frac{\rho_{fil}(s) h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w_3 - w_1}{h_2} \right), \quad (m = 0, 1),
\end{aligned}$$

де оператори $L_m(\bar{U})$, $m = \overline{1, 6}$ мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
L_{3m+1}(\bar{U}) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}^{2m+1}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22}^{2m+1} \right] \right\} - \\
& - (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1}} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}^{2m+1}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22}^{2m+1} \right] + \\
& + (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1}} T_{13}^{2m+1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^{2m+1} k_1, \quad (m = 0, 1); \\
L_{m+1}(\bar{U}) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[A_2 (T_{11}^m + T_{11}^{m+1}) \right] - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (T_{22}^m + T_{22}^{m+1}) \right\} + \tag{1.9} \\
& + \frac{1}{h_m} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}^m) - M_{22}^m \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] - \\
& - \frac{1}{h_{m+1}} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}^{m+1}) - M_{22}^{m+1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] - \\
& - \frac{1}{h_{m+1}} T_{13}^m + \frac{1}{h_{m+1}} \bar{T}_{13}^{m+1} + \frac{k_1}{2} (\bar{T}_{13}^m + \bar{T}_{13}^{m+1}), \quad (m = 1, 2);
\end{aligned}$$

$$L_{m+5}(\bar{U}) = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[A_2 \left(\bar{T}_{13}^{2m+1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^2 \right) \right] - (T_{11}^{2m+1} k_1 + T_{22}^{2m+1} k_2) -$$

$$-\frac{1}{2} (T_{11}^2 k_1 + T_{22}^2 k_2) + (-1)^m \frac{1}{h_2} T_{33}^2 - (-1)^m \frac{1}{h_2} (M_{11}^2 k_1 + M_{22}^2 k_2), \quad (m = 0, 1);$$

$$\bar{T}_{13}^i = T_{13}^i + T_{11}^i \theta_1^i, \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Інтегральні характеристики напружень для кожного шару визначаються згідно формул

$$(T_{11}^k, T_{22}^k, T_{13}^k, T_{33}^2) = \int_z (\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}, \sigma_{33}^2) dz;$$

$$(M_{11}^k, M_{22}^k) = \int_z (z^k \sigma_{11}^{kz}, z^k \sigma_{22}^{kz}) dz, \quad (k = \overline{1, 3}), \quad -h_k / 2 \leq z^k \leq h_k / 2.$$

Рівняння коливань тришарових оболонок обертання з кусково-однорідним заповнювачем доповнюються відповідними природними умовами контакту, граничними та початковими умовами. Зокрема, умови контакту при $s = s_j$ мають вигляд:

$$[\bar{U}]^\pm = 0; \quad \bar{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4, w_1, w_3); \quad (1.10)$$

$$\left[\frac{1}{2} T_{11}^{2m+1} + (-1)^{m+1} \frac{M_{11}^{2m+1}}{h_{2m+1}} \right]^\pm = 0; \quad \left[\bar{T}_{13}^{2m+1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^2 \right]^\pm = 0, \quad (m = 0, 1);$$

$$\left[\frac{1}{2} T_{11}^m + \frac{M_{11}^m}{h_m} + \frac{1}{2} T_{11}^{m+1} - \frac{M_{11}^{m+1}}{h_{m+1}} \right]^\pm = 0, \quad (m = 1, 2).$$

Граничні умови для вільного краю при $s = 0$ або $s = L$ ($s = A_1 \alpha_1$) мають вигляд:

$$\frac{1}{2} T_{11}^{2m-1} - \frac{M_{11}^{2m-1}}{h_{2m-1}} = F_{3m-2}; \quad \frac{1}{2} T_{11}^m + \frac{M_{11}^m}{h_m} + \frac{1}{2} T_{11}^{m+1} - \frac{M_{11}^{m+1}}{h_{m+1}} = F_{m+1}; \quad (1.11)$$

$$\bar{T}_{13}^{2m+1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^2 = \Phi_m, \quad m = 1, 2.$$

У прaviх частинах співвідношень (1.11) задаються зусилля, що прикладаються до відповідного торця оболонки. Інтегральні характеристики напружень для кожного шару задаються згідно формул

$$(T_{11}^k, T_{22}^k, T_{13}^k, T_{33}^2) = \int_z (\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}, \sigma_{33}^2) dz;$$

$$(M_{11}^k, M_{22}^k) = \int_z (z^k \sigma_{11}^{kz}, z^k \sigma_{22}^{kz}) dz, \quad k = \overline{1, 3}; \quad z \in [-h/2, h/2].$$

Граничні умови для жорстко затисненого краю записуються у вигляді $s = 0$ або $s = L$

$$\bar{U} = 0. \quad (1.12)$$

Початкові умови при $t = 0$

$$\bar{U} = 0; \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0. \quad (1.13)$$

§2. Чисельний алгоритм.

Чисельний метод розв'язання задач розглянутого класу ґрунтується на скінченно-різницевій апроксимації рівнянь коливань і матеріальних співвідношень. Використовуючи явну схему «хрест», компоненти узагальненого вектора переміщень апроксимуюмо в цілих точках різницевої сітки, а компоненти узагальненого тензора деформацій і зусиль – у напівцілих точках сітки. Такий підхід дозволяє зберегти дивергентну форму різницевого представлення диференціальних рівнянь, а також і виконання закону збереження повної механічної енергії на різницевому рівні [3, 7]. Перехід від неперервної системи до скінченно-різницевої виконується у два етапи. Перший етап полягає в скінченно-різницевій апроксимації дивергентних рівнянь коливань у зусиллях-моментах. Апроксимацію рівнянь (1.8) можна записати в наступному вигляді

$$\begin{aligned}
 L_{3m+1}(\bar{U}_i^n) &= \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}}{4} \left[(u_{2m+1,i}^n)_{\bar{t}t} + (u_{2m+2,i}^n)_{\bar{t}t} \right] + \\
 &+ (-1)^{m+1} \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}}{12} \left[(u_{2m+2,i}^n)_{\bar{t}t} - (u_{2m+1,i}^n)_{\bar{t}t} \right], \quad (m=0,1); \\
 L_{m+1}(\bar{U}_i^n) &= \frac{\rho_{m+1} h_{m+1}}{4} \left[(u_{m,i}^n)_{\bar{t}t} + (u_{m+1,i}^n)_{\bar{t}t} \right] + \\
 &+ (-1)^m \frac{\rho_m h_m}{12} \left[(u_{m+1,i}^n)_{\bar{t}t} - (u_{m,i}^n)_{\bar{t}t} \right] + (-1)^m \frac{\rho_{m+1} h_{m+1}}{4} \left[(u_{m+2,i}^n)_{\bar{t}t} + (u_{m+1,i}^n)_{\bar{t}t} \right] + \\
 &+ \frac{\rho_{m+1} h_{m+1}}{12} \left[(u_{m+2,i}^n)_{\bar{t}t} - (u_{m+1,i}^n)_{\bar{t}t} \right], \quad (m=1,2); \tag{2.1} \\
 L_{m+5}(\bar{U}_i^n) &= \rho_{2m+1} h_{2m+1} (w_{2m+1,i}^n)_{\bar{t}t} + \frac{\rho_2 h_2}{4} \left[(w_{1,i}^n)_{\bar{t}t} + (w_{3,i}^n)_{\bar{t}t} \right] + \\
 &+ (-1)^m \frac{\rho_2 h_2}{12} \left[(w_{3,i}^n)_{\bar{t}t} - (w_{1,i}^n)_{\bar{t}t} \right], \quad (m=0,1).
 \end{aligned}$$

У різницевих рівняннях (2.1) величини $L_j(\bar{U}_i^n)$, $j = \overline{1,6}$ відповідають різницеvim операторам згідно рівнянь (1.8) в i -й дискретній точці по просторовій координаті s та n -ому дискретному шару по часовій координаті t . Позначення різницевих похідних вводиться згідно [6]. Другий етап апроксимації рівнянь, який полягає в скінченно-різницевій апроксимації величин зусиль-моментів і відповідних деформацій, відбувається таким чином, щоб виконувався скінченно-різницевий аналог енергетичного рівняння [5]. Скінченно-різницеві вирази для зусиль-моментів для циліндричної оболонки наведено в роботі [7].

Побудову різницевих співвідношень для операторів (1.9) розглянемо на прикладі першого оператора системи (1.9).

$$\begin{aligned}
 L_1(\bar{U}) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}^1) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22}^1 \right] \right\} - \tag{2.2} \\
 &- \frac{1}{h_1} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}^1) - \frac{\partial A_2}{\partial A_1} M_{22}^1 \right] + \frac{1}{h_1} T_{13}^1 + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^1 k_1.
 \end{aligned}$$

Інтегруємо вихідне рівняння на різницевому інтервалі $[\alpha_{i-1/2}, \alpha_{i+1/2}]$

$$L_{1i}(\bar{U}) = \int_{\alpha_{i-1/2}}^{\alpha_{i+1/2}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}^1) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22}^1 \right] \right\} -$$

$$-\frac{1}{h_1} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}^1) - \frac{\partial A_2}{\partial A_1} M_{22}^1 \right] + \frac{1}{h_1} T_{13}^1 + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^1 k_1 \left\} d\alpha_1.$$

В результаті одержуємо

$$L_{1i}^n(\bar{U}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(A_1 A_2)_i} \left[\frac{(A_2 T_{11}^{1n})_{i+1/2} - (A_2 T_{11}^{1n})_{i-1/2}}{\Delta \alpha_1} - \frac{A_{2i+1/2} - A_{2i-1/2}}{\Delta \alpha_1} T_{22i}^{1n} \right] - \frac{1}{h_1} \left[\frac{1}{(A_1 A_2)_i} \frac{(A_2 M_{11}^{1n})_{i+1/2} - (A_2 M_{11}^{1n})_{i-1/2}}{\Delta \alpha_1} - \frac{A_{2i+1/2} - A_{2i-1/2}}{\Delta \alpha_1} M_{22}^{1n} \right] + \frac{1}{h_1} T_{13}^{1n} + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^{1n} k_1 \right\}.$$

Аналогічним чином апроксимуються інші рівняння системи (1.9).

При розв'язуванні задач динаміки шаруватих оболонок за запропонованою схемою кроки інтегрування за часовою та просторовими координатами залежать від товщини найбільш тонкого жорсткого шару. Відомо [6], що для стійкості явної різницевої схеми повинна виконуватися умова $\Delta t \leq 2/\omega_{\max}$, де Δt – крок інтегрування за часом, ω_{\max} – максимальна власна частота різницевої системи. Це призводить до зниження ефективності схеми при розв'язуванні задач даного класу. Оскільки максимальну власну частоту мають коливання зсуву (при незначному внеску в розв'язок), тоді виникає потреба їх зниження за умови мінімальності спотворення низькочастотної частини спектра коливань. Цього можна досягти при використанні методу регуляризації різницевої схеми, який використовується в [8, 9] для однорідних оболонок типу Тимошенка. Регуляризація виконується шляхом домноження коефіцієнтів інерції обертання кожного шару на регуляризуючі множники [9].

§3. Числові результати.

Наведено числові результати розв'язків динамічних задач нестационарної поведінки тришарових оболонок обертання з кусково-однорідним заповнювачем (циліндричних, сферичних, конічних) у широкому діапазоні зміни фізико-механічних та геометричних параметрів. Розглянуто задачі динамічного деформування вказаних тришарових оболонок для випадку жорсткого закріплення країв оболонки при внутрішньому розподіленому навантаженні.

Циліндрична оболонка. Розглядалася задача динамічної поведінки тришарової циліндричної оболонки з неоднорідним заповнювачем при розподіленому навантаженні. Задача розв'язувалася при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах:

$$R/h = 30; \quad h = h_1 + h_2 + h_3; \quad h_1 = h_3; \quad h_2/h_1 = 8; \quad L/R = 2;$$

$$\rho_1 = \rho_3 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad E_1^1 = E_2^1 = E_1^3 = E_2^3 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

На інтервалах $0 \leq x \leq L/4$ і $3/4L \leq x \leq L$ покладалося $E_1/E_{fil} = 100$, $\rho_1/\rho_{fil} = 4$. В інтервалі $L/4 \leq x \leq 3/4L$ покладалося $E_1/E_{fil} = 400$, $\rho_1/\rho_{fil} = 8$. Позначення E_1^1, ρ_1 відповідають фізико-механічним параметрам величин матеріалу обшивок; E_{fil}, ρ_{fil} – величини заповнювача. Навантаження задавалося наступними формулами

$$P_3(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)], \quad (3.1)$$

де $A = 10^6$ Па – амплітуда навантаження, $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с – тривалість навантаження.

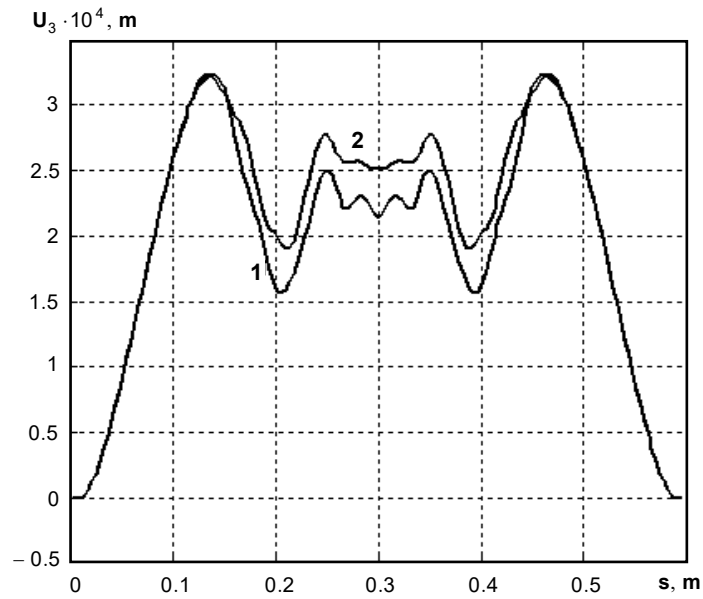


Рис. 1

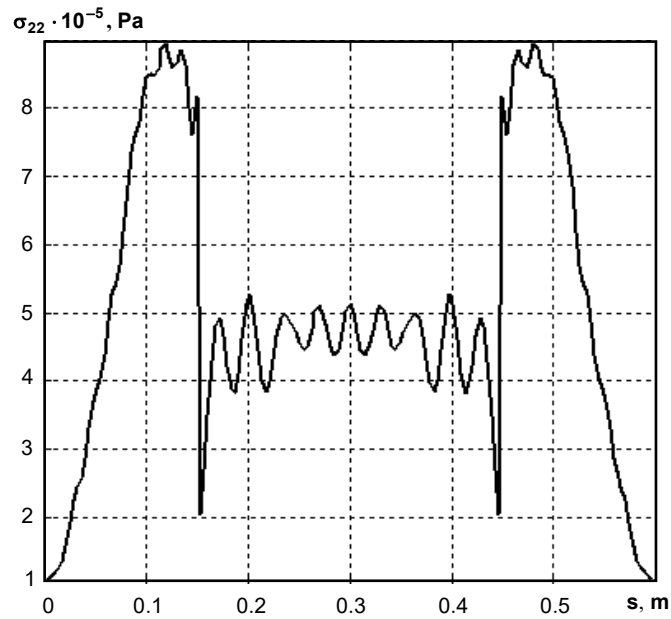


Рис. 2

На рис. 1 та рис. 2 представлені характерні розподіли величин прогинів w_1, w_3 і напруження σ_{22} в заповнювачі по просторовій координаті x в момент часу $t = 7T$. Графічне представлення дозволяє аналізувати якісний і кількісний розподіл величин прогинів і напружень по довжині циліндричної оболонки. Чітко проявляється область із заповнювачем $E_1/E_{fil} = 400 - L/4 \leq x \leq 3/4L$. В областях $0 \leq x \leq L/4$ і $3/4L \leq x \leq L$ величини прогинів для внутрішньої обшивки (крива 1) і зовнішньої обшивки (крива 2) практично збігаються. Різниця проявляється в області $L/4 \leq x \leq 3/4L$. Для величин заповнювача σ_{22} (рис. 2) в області $L/4 \leq x \leq 3/4L$ спостерігаються високочастотні

коливання, які пояснюються впливом поперечного нормального напруження σ_{33} й, відповідно, нормальних поперечних деформацій у вихідних рівняннях коливань. Чітко проявляються на рисунках області контакту заповнювача з різними фізико-механічними властивостями.

Конічна оболонка. Розглядалася задача динамічної поведінки жорстко затисненої по краях тришарової конічної оболонки з неоднорідним заповнювачем при дії розподіленого нормального внутрішнього навантаження $P_3(t)$ при наступних геометричних і фізико-механічних параметрах вихідної конструкції:

$$R_0/h = 30; h = h_1 + h_2 + h_3; h_1 = h_3; h_2/h_1 = 8; L/R = 2; \rho_1 = \rho_3 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$E_1^1 = E_2^1 = E_1^3 = E_2^3 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \nu_1^1 = \nu_2^1 = \nu_1^3 = \nu_2^3 = 0,3;$$

в областях $0 \leq s \leq L/4$ і $3L/4 \leq s \leq L$ параметри заповнювача $E_{fil} = E_1^1/100$; $\rho_{fil} = \rho_1/4$; $\nu_{fil} = 0,34$; в області $s/4 \leq s \leq 3L/4$ параметри заповнювача $E_{fil} = E_1^1/500$; $\rho_{fil} = \rho_1/8$; $\nu_{fil} = 0,34$. Позначення E_1^1, ν_1^1, ρ_1 відповідають фізико-механічним параметрам величин матеріалу обшивок, а $E_{fil}, \nu_{fil}, \rho_{fil}$ відповідають величинам заповнювача. Розподілене нормальне навантаження задавалося згідно (3.1). Розрахунки проводилися для випадків $\beta = \pi/12$ і $\beta = \pi/6$ (β – кут конусності). Зокрема, на рис. 3 представлений характерний розподіл величин u_3 залежно від просторової координати s для внутрішньої обшивки в момент часу $t = 7T$. Крива 1 відповідає випадку $\beta = \pi/6$, крива 2 – $\beta = \pi/12$. На рис. 4 наведено залежності величин σ_{22} для заповнювача (позначення відповідають рис. 3). Графічне представлення дозволяє аналізувати якісний і кількісний розподіл величини σ_{22} по довжині конічної оболонки (лінії контактів, які обумовлені неоднорідністю заповнювача, впливом кута конусності на розподіл НДС структури та ін.).

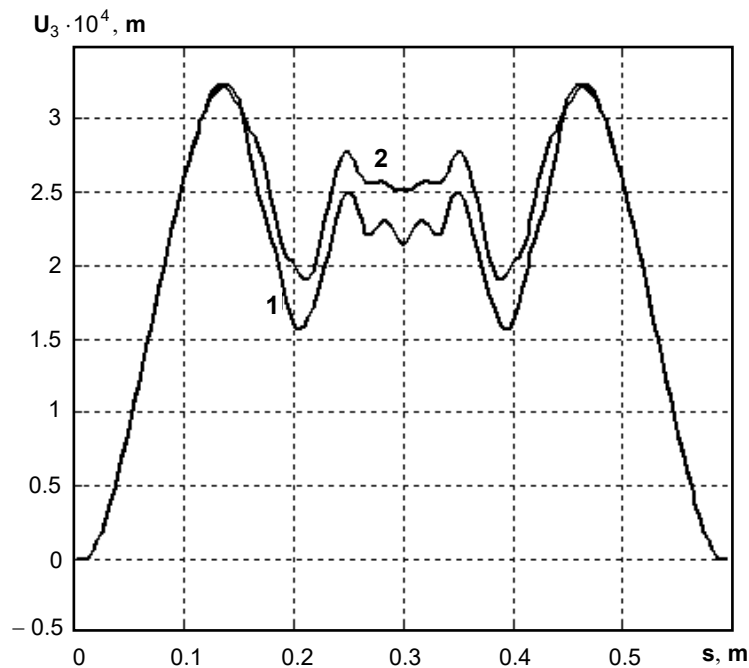


Рис. 3

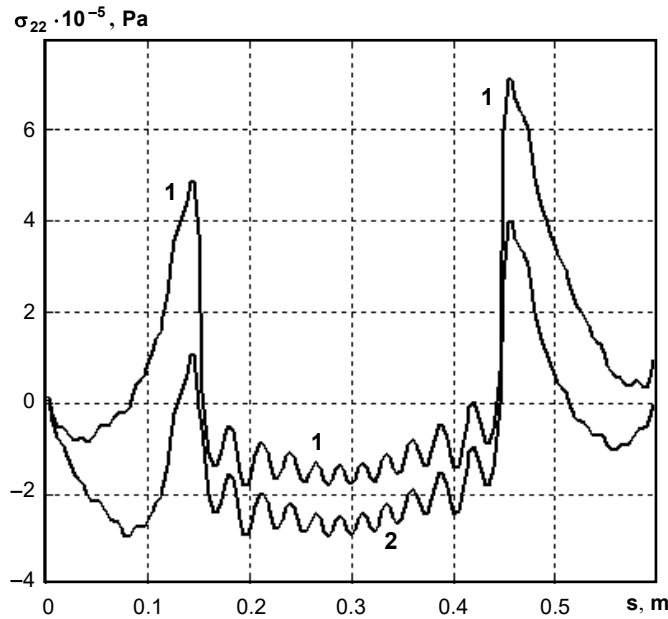


Рис. 4

Сферична оболонка. Розглядалася задача динамічної поведінки жорстко затисненого по краях сегмента еліпсоїдальної сферичної оболонки ($\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1N}$) з кусково-однорідним заповнювачем при розподіленому нормальному внутрішньому навантаженні $P_3(t)$. Геометричні та фізико-механічні параметри вихідної структури наступні:

$$a/h = 20; \alpha_{10} = \pi/12; \alpha_{1N} = 11\pi/12; h = h_1 + h_{fil} + h_3; b/a = 1,25;$$

$$h_1 = h_3; h_{fil}/h_1 = 8; \rho_1 = \rho_3 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; E_1^1 = E_2^1 = E_1^3 = E_2^3 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па};$$

$$\nu_1^1 = \nu_2^1 = \nu_1^3 = \nu_2^3 = 0,3;$$

в областях $s_0 \leq s \leq s_0 + \Delta s/4$ і $s_N - \Delta s/4 \leq s \leq s_N$; ($\Delta s = s_N - s_0$)

$$E_{fil} = E_1^1/100; \rho_{fil} = \rho_1/4; \nu_{fil} = 0,34;$$

в області $s_0 + \Delta s/4 \leq s \leq s_N - \Delta s/4$

$$E_{fil} = E_1^1/400; \rho_{fil} = \rho_1/4; \nu_{fil} = 0,34.$$

Позначення E_1^1, ν_1^1, ρ_1 відповідають фізико-механічним параметрам величин матеріалу обшивок, а позначення $E_{fil}, \nu_{fil}, \rho_{fil}$ відповідають параметрам заповнювача. Розподілене нормальне навантаження задавалося у вигляді (3.1). Розрахунки проводилися на часовому інтервалі $t = 20T$. Отримані результати дозволяють проводити детальний аналіз НДС досліджуваної неоднорідної оболонки в будь-який момент зазначеного часового інтервалу. Зокрема, на рис. 5 представлений характерний розподіл величин w_1 і w_3 (внутрішній і зовнішній прогини) залежно від просторової координати в момент часу $t = 7,5T$ (у силу симетрії вихідної конструкції відносно $\alpha_1 = \pi/2$, результати представлені для $\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \pi/2$). Крива з індексом 1 відповідає прогину w_1 для внутрішньої обшивки, крива з індексом 2 – прогину для зовнішньої обшивки w_3 . На рис. 6 представлено розподіл величини напруження σ_{22} в серединній поверхні

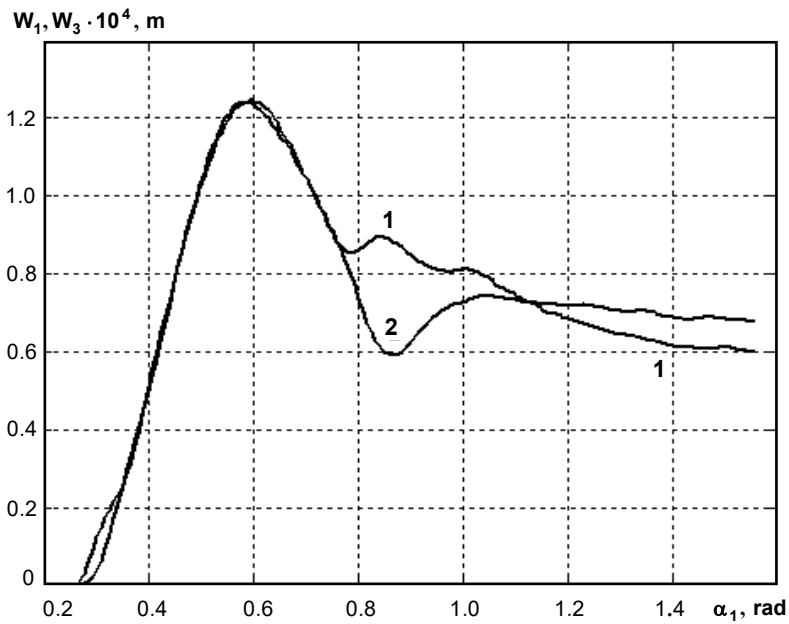


Рис. 5

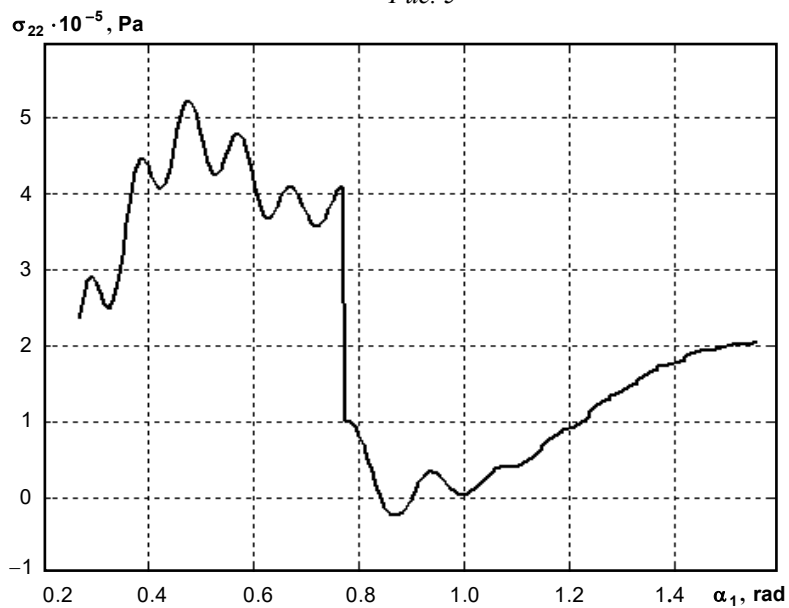


Рис. 6

заповнювача в залежності від просторової координати в момент часу $t = 3T$ (час досягнення максимального значення на досліджуваному інтервалі часу). На наведених графіках залежностей величин чітко виділяється лінія розриву, яка розділяє області заповнювача з різними фізико-механічними параметрами – $\alpha_1 \approx 0,8$ рад. Як показують числові розрахунки, в області заповнювача $E_{fil} = E_1^1/100$; $\rho_{fil} = \rho_1/4$; $\nu_{fil} = 0,34$ величини прогинів w_1 і w_3 практично не відрізняються. Різниця починає проявлятися при значеннях менших від $E_{fil} = E_1^1/100$ (зокрема, в області $s_0 + \Delta s/4 \leq s \leq s_N - \Delta s/4$).

Висновки.

Розглянуто задачі динамічної поведінки тришарових оболонок обертання при впливі на них розподілених імпульсних навантажень. Наведено рівняння коливань оболонок з відповідними граничними й початковими умовами. Для розв'язання поставлених задач побудовано чисельний алгоритм, заснований на скінченно-різницевої апроксимації вихідних рівнянь за просторовою і часовою координатами. Наведено числові результати для випадків динамічної поведінки тришарових циліндричних, конічних і сферичних оболонок при розподілених імпульсних навантаженнях.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачі про динамічну поведінку тришарових оболонок обертання під дією на них розподілених імпульсних навантажень. Отримано рівняння коливань оболонок з відповідними граничними та початковими умовами. Для розв'язування поставлених задач побудовано чисельні алгоритми, що базуються на скінченно-різницевої апроксимації вихідних рівнянь за просторовою і часовою координатами. Наведено числові результати для випадків динамічної поведінки циліндричних, конічних та сферичних оболонок при розподілених імпульсних навантаженнях.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тришарові оболонки обертання, теорія типу Тимошенка, вимушені коливання, чисельний розв'язок.

1. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г., Столов В.П.* Численное исследование динамического деформирования многослойных композитных цилиндрических оболочек с тонкими жесткими слоями // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. Межвуз. Сб. / Горьк. ун.-т., 1988. – С. 48 – 53.
2. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1980. – 376 с.
3. *Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках (под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя). – Киев: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
4. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композитных материалов. – 1988. – № 2. – С. 287 – 298.
5. *Навал И.К., Пацюк В.И., Римский В.К.* Нестационарные волны в деформируемых средах. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 236 с.
6. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Ленинград-Москва: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
7. *Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1977. – 656 с.
9. *Altenbach H.* Theories for laminated and sandwich plates: A review // Mechanics of Composite Materials. – 1998. – **34**, N3. – P. 243 – 252.
10. *Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamics of Inhomogeneous Shell Systems Under Non-Stationary Loading (Survey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 5. – P. 481 – 537.
11. *Meish V.F., Meish Yu.A., Pavlyuk A.V.* Dynamics of a Three-Layer Elliptic Cylindrical Shell Reinforced with Discrete Rings // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 172 – 179.
12. *Meish V.F., Maiborodina N.V.* Stress State of Discretely Stiffened Ellipsoidal Shells under a Nonstationary Normal Load // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 6. – P. 675 – 686.
13. *Meish V.F., Meish Yu.A., Arnauta N.V.* Numerical Analysis of Unsteady Oscillations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Variable Geometries // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 426 – 433.
14. *Noor A.K., Burton W.S.* Assessment of Computational Models for Multilayered Composite Shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – **43**, N 4. – P. 67 – 97.
15. *Pagano N.J.* Free edge stress fields in composite laminates // Int. J. Solids Struct. – 1978. – **14**. – P. 401 – 406.
16. *Qatu M.S.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Shells: 1989 – 2000, Part 1: Laminated Composite Shells // Appl. Mech. Rev. – 2002. – **55**, N 4. – P. 325 – 350.
17. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // Composite Struct. – 2010. – **93**, N 1. – P. 14 – 31.
18. *Reddy J.N., Liu C.F.* A higher – order shear deformation theory of laminated elastic shells // Int. J. Engng. Sci. – 1985. – **23**. – P. 669 – 683.
19. *Reddy J.N.* On refined computational models of composite laminates // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1989. – **27**. – P. 361 – 382.
20. *Shulga N.A., Meish V.F., Khamrenko Yu.A.* Nonstationary Vibrations of Three-layered Cylindrical Shells under Axisymmetric Loading // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, N 8. – P. 754 – 757.

Надійшла 28.07.2020

Затверджена до друку 24.06.2021