

В.І.Козлов¹, Л.П.Зінчук¹, Т.В.Карнаухова²

**НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ТА ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ШАРУВАТИХ
ОБОЛОНОК ІЗ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ
З УРАХУВАННЯМ ЗСУВНИХ ДЕФОРМАЦІЙ**

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,*

вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: term@inmech.kiev.ua

²*Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
пр. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: karn@inmech.kiev.ua*

Abstract. The numerical-analytical technique is proposed for the study of forced geometrically nonlinear vibrations of layered shells of revolution made of piezoelectric viscoelastic materials under electric and mechanical loads. The transverse shear deformations and the temperature of dissipative heating are taken into account. This method is based on the use of the finite element method in the variational formulation and the method of harmonic linearization. The results of numerical simulations for a three-layer cylindrical panel with hinged ends, consisting of the identical external piezoelectric layers and the internal passive viscoelastic layer, are presented. A behavior of the deflection in the neighborhood of the first resonance for cylindrical panels of different thicknesses is investigated. The calculation of the temperature field of vibroheating for the viscoelastic piezoelectric cylindrical panel under electric load is carried out.

Key words: forced vibration, geometric nonlinearity, piezoelectric layer, shell of revolution, finite element method, temperature of dissipative heating.

Вступ.

У даний час в умовах широкого використання багатошарових пластин і оболонок із п'єзоелектричних в'язкопружних матеріалів у різних галузях сучасної техніки, до них висувуються достатньо високі вимоги щодо геометричних розмірів, величин можливих механічних переміщень і деформацій, діапазонів керуючих навантажень і робочих температур. Одним з основних режимів роботи таких елементів є вимушені гармонічні коливання. Під дією на них гармонічного електромеханічного навантаження з частотою, близькою до резонансної, в непружних пластинах і оболонках при певних умовах, в залежності від рівня навантаження й умов теплообміну, можуть виникнути інтенсивні коливання і значно підвищитися температура, яка зумовлена гістerezисними втратами – так звана температура дисипативного розігріву [4, 15]. Зауважимо, що фізико-механічні характеристики ряду п'єзоелектричних матеріалів дозволяють проектувати тонкостінні елементи з урахуванням їх роботи при значних переміщеннях. Для моделювання електромеханічних коливань тонкостінних елементів використовуються різні гіпотези. Якщо вони виготовлені з в'язкопружних матеріалів і їх товщина не достатньо мала, використання класичних гіпотез Кірхгофа – Лява може призвести до значних похибок при розрахунку демпфування коливань і розподілу температури дисипативного розігріву. У зв'язку з цим актуальною є розробка методів геометрично нелінійного аналізу динамічної поведінки п'єзоелектричних в'язкопружних неоднорідних пластин і оболонок в околі резонансних частот з урахуванням дисипативного розігріву та деформацій поперечного зсуву.

Основні підходи до вивчення нелінійної динаміки пружних пластин і оболонок досить докладно представлені, наприклад, в оглядових роботах і монографіях [6, 9 – 12, 21 – 23].

Серед незначної кількості робіт, в яких представлено дослідження геометрично нелінійних коливань неоднорідних пластин і оболонок, які містять п'єзоелектричні шари, слід виокремити праці [14, 24, 25, 27]. Побудові електромеханічних моделей поведінки непружних шаруватих тонкостінних елементів із непружних п'єзоелектричних матеріалів і дослідженню впливу дисипативного розігріву, геометричної і фізичної нелінійностей на їх динамічну поведінку присвячені роботи [15, 16, 17]. Одним з найбільш універсальних чисельних методів розв'язування нелінійних задач теорії неоднорідних пластин і оболонок є метод скінченних елементів, з деталями використання якого для згаданих задач можна ознайомитись, наприклад, в роботах [1, 13, 25].

Дана робота присвячена розробці чисельно-аналітичної методики дослідження вимушених геометрично нелінійних коливань шаруватих в'язкопружних п'єзоелектричних оболонок обертання та температури дисипативного розігріву при механічному і електричному навантаженні в околі резонансних частот з урахуванням деформацій поперечного зсуву.

Розглядаються шаруваті оболонки, для моделювання механічної поведінки яких використовуються гіпотези типу С.П.Тимошенка та нелінійна теорія Кармана, які доповнені гіпотезами щодо електричних величин, коли відмінними від нуля є компоненти вектора напруженості електричного поля і нормальна складова вектора електричної індукції. Припускається, що температурне поле в межах кожного шару оболонки має квадратичний розподіл за товщиною, а фізико-механічні параметри матеріалів шарів не залежать від температури та електричного поля.

В основі запропонованого підходу лежить використання методу скінченних елементів у варіаційній постановці. Для апроксимації переміщень і геометрії оболонки в межах елемента використовуються кубічні поліноми, а прогин оболонки апроксимується бікубічними поліномами Ерміта. Для розв'язання отриманого матричного рівняння використано класичний метод розкладання невідомих величин за гармоніками, які визначаються з розв'язку узагальненої задачі на власні значення і власні функції для електропружної задачі. Це дозволило звести матричне рівняння руху до диференціального рівняння другого порядку з нелінійними квадратичним і кубічним членами, яке розв'язано методом гармонічної лінеаризації [2].

Для перевірки точності розробленої методики було розглянуто задачу про вимушені коливання шарнірно опертої в'язкоелектропружної циліндричної тришарової панелі симетричної будови окремо при механічному та електричному навантаженні, для якої нелінійне диференціальне рівняння відносно часу можна отримати, представляючи розв'язок задачі у вигляді подвійних тригонометричних рядів. Для циліндричних панелей різної товщини досліджено поведінку прогину в околі основного резонансу та проведено порівняння результатів розрахунків, одержаних на основі механічних гіпотез Кірхгофа – Лява і методики [20], з числовими результатами, отриманими з використанням уточненої теорії типу С.П.Тимошенка.

Також, використовуючи підхід [7, 18] до розв'язання задачі нестационарної теплопровідності та методом скінченних елементів, проведено розрахунок температурного поля вібророзігріву для розглянутої шарнірно опертої в'язкоелектропружної циліндричної панелі при електричному навантаженні.

§1. Варіаційна постановка задачі.

Як відзначено в роботах [1, 3], однією з широко використовуваних теорій при розрахунку напружено-деформованого стану неоднорідних пластин і оболонок методом скінченних елементів (МСЕ) є теорія С. П. Тимошенка. Це пояснюється тим, що функціонали, що входять у варіаційні формулювання задач, містять тільки перші похідні від переміщень. При розробці МСЕ в нелінійній теорії оболонок зазвичай використовується варіант так званої п'ятимодальної теорії, в якій поле переміщень характеризується п'ятьма незалежними функціями – прогином w , двома тангенціальними переміщеннями серединної поверхні u_0 , v_0 і двома функціями, що характеризують незалежний поворот нормалі u_1 , v_1 :

$$u(s, \theta, z) = u_0(s, \theta) + zu_1(s, \theta); \quad v(s, \theta, z) = v_0(s, \theta) + zv_1(s, \theta);$$

$$w(s, \theta, z) = w(s, \theta). \quad (1.1)$$

Розглянемо тришарову оболонку обертання товщини $H = h_1 + h_2 + h_3$, складену з трансверсально-ізоотропних в'язкопружних п'єзоелектричних шарів з товщиною поляризацією. Оболонка віднесена до криволінійної ортогональної системи координат (s, θ, z) . У якості базисної поверхні вибираємо серединну поверхню внутрішнього шару. Меридіан її базисної поверхні описується рівнянням $r = r(x)$. На поверхнях $z = a_0, a_1, a_2, a_3$ є суцільні або дискретні електродні покриття, на яких задаються відповідні значення потенціалів V_0, V_1, V_2, V_3 .

Виведення рівнянь стану, які визначають зв'язок між напруженнями і деформаціями, здійснюється з використанням уточненої теорії [4], що враховує деформації поперечного зсуву, і доповненої відповідними гіпотезами щодо електричних величин, коли вважається, що відмінними від нуля є компоненти вектора напруженості електричного поля і нормальна складова вектора електричної індукції ($D_z \neq 0$, $D_s = 0$, $D_\theta = 0$).

Відповідно до згаданих вище гіпотез щодо електромеханічних величин і зсувної теорії С. П. Тимошенка, а також класичних рівнянь стану для п'єзоелектричних середовищ [4, 8], рівняння стану для k -го шару оболонки обертання можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} \varepsilon_{ss} + B_{12}^{(k)} \varepsilon_{\theta\theta} - \gamma_{11}^{(k)} E_z^{(k)}; \quad \sigma_{\theta\theta}^{(k)} = B_{12}^{(k)} \varepsilon_{ss} + B_{11}^{(k)} \varepsilon_{\theta\theta} - \gamma_{11}^{(k)} E_z^{(k)}; \\ \sigma_{s\theta}^{(k)} &= 2G_{12}^{(k)} \varepsilon_{s\theta}; \quad \sigma_{sz}^{(k)} = 2G_{13}^{(k)} \varepsilon_{sz}; \quad \sigma_{\theta z}^{(k)} = 2G_{23}^{(k)} \varepsilon_{\theta z}; \\ D_z^{(k)} &= \gamma_{33}^{(k)} E_z^{(k)} + \gamma_{11}^{(k)} (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де

$$\begin{aligned} B_{11}^{(k)} &= c_{11}^{E(k)} - (c_{13}^{E(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}; \quad B_{12}^{(k)} = c_{12}^{E(k)} - (c_{13}^{E(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}; \\ \gamma_{11}^{(k)} &= e_{13}^{(k)} - c_{13}^{E(k)} e_{33}^{(k)} / c_{33}^{E(k)}; \quad \gamma_{33}^{(k)} = \mu_{33}^{S(k)} + (e_{33}^{(k)})^2 / c_{33}^{E(k)}; \quad 2G_{12}^{(k)} = c_{11}^{E(k)} - c_{12}^{E(k)}; \\ G_{13}^{(k)} &= G_{23}^{(k)} = c_{44}^{E(k)} + (e_{15}^{(k)})^2 / \mu_{11}^{S(k)}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

У співвідношеннях (1.2) – (1.3) $c_{ij}^{E(k)}$, $e_{ij}^{(k)}$ – в'язкопружні та п'єзоелектричні модулі; $\mu_{ij}^{S(k)}$ – діелектричні проникності п'єзоелектричного матеріалу відповідно для k -го шару оболонки.

Надалі розглядатимемо такі оболонки, для яких значеннями z/R_1 і z/R_2 можна знехтувати в порівнянні з одиницею (R_1 , R_2 – радіуси головних кривизн серединної поверхні).

У цьому випадку відповідно до нелінійної теорії тонкостінних елементів, запропонованої Т.Карманом, з використанням залежностей (1.1) і співвідношень Коші компоненти тензора деформацій запишемо у вигляді [15]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \varepsilon_{ss}^0 + \kappa_{ss} z; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \kappa_{\theta\theta} z; \quad \varepsilon_{s\theta} = \varepsilon_{s\theta}^0 + \kappa_{s\theta} z; \\ \varepsilon_{ss}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2; \\ \varepsilon_{s\theta}^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v_0 + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right); \quad \kappa_{ss} = \frac{\partial u_1}{\partial s}; \quad \kappa_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u_1; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\kappa_{s\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v_1 \right); \quad \varepsilon_{sz} = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{\partial w}{\partial s} \right); \quad \kappa_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right).$$

В (1.4) φ – кут між нормаллю до поверхні оболонки і віссю обертання [20].

Відповідно до вказаних вище гіпотез щодо електричної індукції, після інтегрування за товщиною координатою z залежності

$$E_z^{(k)} = \frac{1}{\gamma_{33}^{(k)}} D_z^{(k)} - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}} \left[\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0 + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) z \right]$$

отримаємо

$$D_z^{(k)}(s, \theta) = -\frac{V_k - V_{k-1}}{H_1^{(k)}} + (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}}. \quad (1.5)$$

Тут введено наступні позначення:

$$H_1^{(k)} = \frac{a_k - a_{k-1}}{\gamma_{33}^{(k)}}; \quad H_2^{(k)} = \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}} (a_k - a_{k-1}); \quad H_3^{(k)} = \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{2\gamma_{33}^{(k)}} (a_k^2 - a_{k-1}^2); \quad (k=1,2,3). \quad (1.6)$$

З урахуванням співвідношень (1.5), (1.6) рівняння стану (1.2) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^{(k)} &= A_{11}^{(k)} \varepsilon_{ss} + A_{12}^{(k)} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}} \left(-\frac{V_k - V_{k-1}}{H_1^{(k)}} + (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}} \right); \\ \sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= A_{12}^{(k)} \varepsilon_{ss} + A_{11}^{(k)} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}} \left(-\frac{V_k - V_{k-1}}{H_1^{(k)}} + (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}} \right); \\ \sigma_{s\theta}^{(k)} &= 2G_{12}^{(k)} \varepsilon_{s\theta}; \quad \sigma_{sz}^{(k)} = 2G_{13}^{(k)} \varepsilon_{sz}; \quad \sigma_{\theta z}^{(k)} = 2G_{23}^{(k)} \varepsilon_{\theta z}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

де

$$A_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)} + \frac{\gamma_{11}^{(k)} \gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}}; \quad A_{12}^{(k)} = B_{12}^{(k)} + \frac{\gamma_{11}^{(k)} \gamma_{11}^{(k)}}{\gamma_{33}^{(k)}}.$$

Розв'язування тривимірної задачі про динамічну поведінку неоднорідних тіл обертання при електромеханічному навантаженні здійснюється з використанням варіаційного рівняння [4]

$$\delta E = 0, \quad (1.8)$$

де

$$E = \frac{1}{2} \iiint_V \left(c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - 2e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - \mu_{ij}^s E_i E_j + \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} u_i + \zeta \frac{\partial u_i}{\partial t} u_i \right) dV - \iint_S P_i u_i ds. \quad (1.9)$$

Відзначимо, що для спрощення викладок у подальшому будемо розглядати оболонки обертання симетричної будови.

З урахуванням зазначених вище гіпотез для даної задачі тривимірне варіаційне рівняння (1.8) зводиться до нелінійного двовимірного рівняння. Представимо двовимірний функціонал у вигляді двох складових

$$E = E_L + E_{NL}, \quad (1.10)$$

де E_L – лінійна частина, яка містить квадратичні члени за переміщеннями і їх похідні, а E_{NL} – функціонал, що включає члени вищого порядку.

$$E_L = \frac{1}{2} \iint_F \left\{ C_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1} \right)^2 + 2C_{12} \left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +C_{11}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r}u_0+\frac{w}{R_2}\right)^2+C_{44}\left(\frac{\partial v_0}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-\frac{\cos\varphi}{r}v_0\right)^2+C_{55}\left(u_1+\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{u_0}{R_1}\right)^2+ \\
& +C_{55}\left(v_1+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{v_0}{R_2}\right)^2+D_{11}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2+2D_{12}\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r}u_1\right)+ \quad (1.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +D_{11}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r}u_1\right)^2+D_{44}\left(\frac{\partial v_1}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial\theta}-\frac{\cos\varphi}{r}v_1\right)^2+ \\
& +\rho_1\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}u_0+\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}v_0+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}w\right)+\zeta_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}u_0+\frac{\partial v_0}{\partial t}v_0+\frac{\partial w}{\partial t}w\right)\}dF+ \\
& +\iint_F\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial s}+\frac{w}{R_1}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r}u_0+\frac{w}{R_2}\right)Q^0+\right. \right. \\
& \left. \left. +\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r}u_1\right)Q^1\right]-P_z w\right\}dF-\iint_{S_1}P_s u_0 ds_1-\iint_{S_2}P_\theta v_0 ds_2; \\
E_{NL} & =\frac{1}{2}\iint_F\left\{C_{11}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial s}+\frac{w}{R_1}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^4\right]+C_{12}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial s}+\frac{w}{R_1}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2+\right. \right. \\
& \left. \left. +\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r}u_0+\frac{w}{R_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\right)\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\right]+ \quad (1.12) \right. \\
& \left. +C_{11}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r}u_0+\frac{w}{R_2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^4\right]+ \right. \\
& \left. +C_{44}\left[2\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v_0}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-\frac{\cos\varphi}{r}v_0\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\right]\right\}dF; \quad dF=rdsd\theta.
\end{aligned}$$

У функціоналах (1.11) і (1.12) введено позначення

$$\begin{aligned}
C_{ij} & =\sum_{k=1}^3\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k}A_{ij}^{(k)}dz-\frac{H_2^{(k)}H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}}\right); \quad D_{ij}=\sum_{k=1}^3\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k}A_{ij}^{(k)}z^2dz-\frac{H_3^{(k)}H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}}\right); \quad (i,j=1,2); \\
Q^0 & =\sum_{k=1}^3(V_k-V_{k-1})\frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}}; \quad Q^1=\sum_{k=1}^3(V_k-V_{k-1})\frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}}; \\
C_{44} & =\sum_{k=1}^3\int_{a_{k-1}}^{a_k}G_{12}^{(k)}dz; \quad D_{44}=\sum_{k=1}^3\int_{a_{k-1}}^{a_k}G_{12}^{(k)}z^2dz; \quad C_{55}=\sum_{k=1}^3\int_{a_{k-1}}^{a_k}G_{13}^{(k)}dz; \quad (1.13) \\
\rho_1 & =\sum_{k=1}^3\int_{a_{k-1}}^{a_k}\rho^{(k)}dz; \quad \zeta_1=\sum_{k=1}^3\int_{a_{k-1}}^{a_k}\zeta^{(k)}dz,
\end{aligned}$$

P_z, P_s, P_θ – компоненти вектора поверхневого навантаження; $\rho^{(k)}$ і $\zeta^{(k)}$ – густина і коефіцієнт в'язкого тертя матеріалу k -го шару оболонки.

§2. Скінченно-елементний метод розв'язування задачі.

Розв'язок варіаційної задачі знаходимо методом скінченних елементів з використанням дванадцятивузлових ізопараметричних чотирикутних елементів.

Циліндрична система координат (r, θ, s) використовується як глобальна система координат, в якій об'єднуються всі скінченні елементи. Зауважимо, що меридіональна s і осьова x координати пов'язані співвідношенням

$$ds = A dx; \quad A = \sqrt{1 + (dr/dx)^2}.$$

Як локальна система координат, в якій визначаються апроксимуючі функції і виконується інтегрування, використовується нормалізована система координат (ξ, η) .

Для апроксимації прогину, його похідних, тангенціальних переміщень і кутів повороту використовуються кубічні поліноми [13, 19]. При цьому прогин оболонки в межах елемента апроксимується бікубічними поліномами Ерміта

$$w = \sum_{i=1}^4 L_i(\xi, \eta) w_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+4}(\xi, \eta) \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+8}(\xi, \eta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+12}(\xi, \eta) \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i, \quad (2.1)$$

де w_i , $\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i$, $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_i$, $\left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i$ – амплітудні значення прогину і його похідних в кутових точках елемента; $L_i(\xi, \eta)$ – поліноми Ерміта, які представлені в [13, 19].

Тангенціальні складові переміщень серединної поверхні оболонки і кути повороту в межах елемента апроксимуються кубічними поліномами

$$u_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) u_{0i}; \quad v_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) v_{0i}; \quad u_1 = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) u_{1i}; \quad v_1 = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) v_{1i}, \quad (2.2)$$

а явний вигляд поліномів $N_i(\xi, \eta)$ можна знайти в [13, 19].

При цьому зв'язок між координатами s , r , θ і координатами місцевої системи ξ , η , визначаються залежностями

$$s = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) s_i, \quad r = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) r_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \theta_i, \quad (2.3)$$

де s_i , r_i , θ_i – вузлові значення координат.

Співвідношення (2.1) – (2.3) показують, що скінченний елемент має 64 ступені свободи: 8 ступенів (w , $\partial w / \partial s$, $\partial w / (r \partial \theta)$, $\partial^2 w / (r \partial \theta \partial s)$, u_0 , v_0 , u_1 , v_1) у кожній кутовій точці і 4 ступені свободи (u_0 , v_0 , u_1 , v_1) у кожному вузлі, розташованому на сторонах чотирикутника.

У роботах [13, 19] такий кінцевий елемент використовується при розв'язуванні статичних та динамічних задач для одношарових і багатшарових оболонок. Проведено числове порівняння результатів розрахунку напружено-деформованого стану пружних і в'язкопружних оболонок з результатами, отриманими аналітичними та іншими чисельними методами. Відзначено, що використання таких функцій апроксимації дозволяє з високою точністю отримати розв'язок для оболонок різної геометричної форми.

Вважаємо, що серединна поверхня оболонки розбивається N вузловими точками на M скінченних елементів.

Представляючи компоненти механічних і електричних навантажень, які діють в межах елемента, у вигляді

$$P = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) P_i; \quad V = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) V_i$$

і з огляду на вирази для переміщень (1.1) і деформацій (1.4), з умови стаціонарності функціоналу (1.10) $\delta E = 0$ отримаємо систему нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку для визначення прогину, його похідних, тангенціальних переміщень і кутів повороту [5, 19]

$$\frac{\partial E}{\partial w_j} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial E_m}{\partial w_j} = 0; \dots; \frac{\partial E}{\partial v_{1j}} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial E_m}{\partial v_{1j}} = 0. \quad (2.4)$$

При цьому диференціювання за u_0, v_0, u_1, v_1 проводиться у всіх вузлових точках елемента, а за $w, w^s, w^\theta, w^{s\theta}$ – тільки в кутових точках чотирикутного елемента.

У матричній формі систему диференціальних рівнянь (2.4) можна записати у вигляді

$$[M] \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + [C] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + [K] \mathbf{U} + \mathbf{G}_{NL}(\mathbf{U}) = \mathbf{Q}(t), \quad (2.5)$$

де $[M]$ – матриця мас; $[C]$ – матриця втрат; $[K]$ – матриця жорсткості; $\mathbf{Q}(t)$ – вектор-стовпець зовнішнього навантаження; \mathbf{U} – вектор-стовпець прогину і його похідних, а також тангенціальних переміщень і кутів повороту у вузлових точках, а $\mathbf{G}_{NL}(\mathbf{U})$ – вектор-стовпець, компоненти якого отримано на основі диференціювання нелінійної складової функціоналу (1.10), причому цей вектор містить елементи з квадратичною і кубічною нелінійностями стосовно прогину оболонки.

Початкові умови вибираємо у вигляді

$$\mathbf{U} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2.6)$$

Розв'язок векторного рівняння (2.5) при початкових умовах (2.6) представимо у вигляді ряду за власними формами коливань електропружної оболонки (без урахування дисипації енергії)

$$\mathbf{U}(w, \dots, v_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{W}_n(w, \dots, v_1) f_n(t), \quad (2.7)$$

отриманими у результаті розв'язання узагальненої задачі на власні значення

$$[K] \mathbf{W}_n - \omega_n^2 [M] \mathbf{W}_n = 0. \quad (2.8)$$

У представленні (2.7) $f_n(t)$ – функції часу, що підлягають визначенню.

У рівнянні (2.8) \mathbf{W}_n – це ортонормований власний вектор, який задовольняє таким умовам [1]:

$$\mathbf{W}_m^T [M] \mathbf{W}_n = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n; \\ 1 & \text{при } m = n; \end{cases} \quad \mathbf{W}_m^T [K] \mathbf{W}_n = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n; \\ \omega_m^2 & \text{при } m = n; \end{cases}$$

$$\mathbf{W}_m^T [C] \mathbf{W}_n = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 2\omega_m \zeta_m & \text{при } m = n \end{cases}. \quad (2.9)$$

Тут ω_m – кругова частота власних коливань оболонки, а ζ_m – коефіцієнт демпфування m -ї форми коливань.

Підставляючи розв'язок (2.7) у векторне рівняння (2.5), домножуючи його на транспонований вектор \mathbf{W}_n^T і враховуючи (2.9), отримаємо

$$\frac{\partial^2 f_n(t)}{\partial t^2} + 2\omega_n \zeta_n \frac{\partial f_n(t)}{\partial t} + \omega_n^2 f_n(t) + \mathbf{W}_n^T \mathbf{G}_{NL}(\mathbf{W}_n, f_n(t)) = \mathbf{W}_n^T \mathbf{Q}(t); \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

У рівнянні (2.10) після підстановки розв'язку у вигляді (2.7) вектор-стовпець $\mathbf{G}_{NL} = \mathbf{G}_{NL}(\mathbf{W}_n, f_n(t))$ буде залежати від \mathbf{W}_n і скалярної функції $f_n(t)$, що і відображено у символічному записі.

Обчислюючи компоненти вектора $\mathbf{G}_{NL}(\mathbf{W}_n, f_n(t))$ та перемножуючи зліва отриманий вектор на транспонований вектор \mathbf{W}_n^T і згрупповуючи коефіцієнти при $(f_n(t))^2$ і $(f_n(t))^3$, нелінійне диференціальне рівняння другого порядку (2.10) для визначення функції часу $f_n(t)$ можна записати у вигляді

$$\frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} + 2\omega_n \zeta_n \frac{df_n(t)}{dt} + \omega_n^2 f_n(t) + \beta_1 f_n^2(t) + \beta_2 f_n^3(t) = F_n(t), \quad n=1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Розглянемо випадок одночастотних коливань при гармонічному навантаженні $F_n(t) = F_{0n} \cos \Omega t$.

Ввівши безрозмірні параметри

$$\tau = \omega_n t; \quad y = f_n \frac{\omega_n^2}{F_{0n}}; \quad \eta_1 = \frac{\Omega}{\omega_n}; \quad D = 2\zeta_n; \quad \mu_1 = \beta_1 \frac{F_{0n}}{\omega_n^4}; \quad \mu_2 = \beta_2 \frac{F_{0n}}{\omega_n^6}, \quad (2.12)$$

рівняння (2.11) запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + D \frac{dy}{d\tau} + y + \mu_1 y^2 + \mu_2 y^3 = \cos \eta_1 \tau. \quad (2.13)$$

Використовуючи метод гармонічної лінеаризації [2] і представляючи розв'язок у вигляді

$$y = A \cos \eta_1 \tau + B \sin \eta_1 \tau + Z, \quad (2.14)$$

для визначення коефіцієнтів A, B, Z отримаємо систему трьох нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} A(1 - \eta_1^2) + DB\eta_1 + 2\mu_1 AZ + \mu_2 \left(\frac{3}{4} A^3 + \frac{3}{4} AB^2 + 3AZ^2 \right) &= 1; \\ B(1 - \eta_1^2) - DA\eta_1 + 2\mu_1 BZ + \mu_2 \left(\frac{3}{4} B^3 + \frac{3}{4} A^2 B + 3BZ^2 \right) &= 0; \\ Z + \mu_1 \left(\frac{X}{2} + Z^2 \right) + \mu_2 \left(\frac{3}{2} XZ + Z^3 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Якщо невідомими вважати квадрат амплітуди X ($X = A^2 + B^2$) і Z , то система рівнянь (2.15) спрощується і набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{9}{16} \mu_2^2 X^3 + \frac{3}{2} \mu_2 (1 - \eta_1^2) X^2 + \left[(1 - \eta_1^2)^2 + D^2 \eta_1^2 \right] X + 9\mu_2^2 XZ^4 + 12\mu_1 \mu_2 XZ^3 + \\ + \frac{9}{2} \mu_2 X^2 Z^2 + 6\mu_2 (1 - \eta_1^2) XZ^2 + 4\mu_1 XZ^2 + 3\mu_1 \mu_2 X^2 Z + 4\mu_1 (1 - \eta_1^2) XZ &= 1; \\ X \left(\frac{3}{2} \mu_2 Z + \frac{1}{2} \mu_1 \right) + \mu_2 Z^3 + \mu_1 Z^2 + Z &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Виключаючи квадрат амплітуди X з рівнянь (2.16), для визначення Z отримаємо алгебраїчне рівняння 9-го степеня

$$A_0 + A_1 Z + A_2 Z^2 + A_3 Z^3 + A_4 Z^4 + A_5 Z^5 + A_6 Z^6 + A_7 Z^7 + A_8 Z^8 + A_9 Z^9 = 0, \quad (2.17)$$

коефіцієнти якого мають вигляд

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\mu_1^3; \quad A_1 = 18\mu_1^2 \mu_2 + 4\mu_1^2 \mu_3; \quad \mu_3 = (D\eta_1)^2 + (1 - \eta_1^2)^2; \\ A_2 &= 54\mu_1 \mu_2^2 + (16\mu_1^3 - 12\mu_1 \mu_2)(1 - \eta_1^2) + 4\mu_3(\mu_1^3 + 6\mu_1 \mu_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= 9\mu_2^2 - 24\mu_1^2\mu_2 + 4\mu_3(7\mu_1^2\mu_2 + 9\mu_2^2) + \\
&+ (1-\eta_1^2)(-36\mu_2^2 + 16\mu_1^4 + 96\mu_1^2\mu_2) + 54\mu_2^3 + 16\mu_1^4; \\
A_4 &= -81\mu_1\mu_2^2 + 60\mu_1\mu_2^2\mu_3 + (1-\eta_1^2)(124\mu_1^3\mu_2 + 192\mu_1\mu_2^2) + 96\mu_1^3\mu_2 + 16\mu_1^5; \\
A_5 &= -81\mu_2^3 + 231\mu_1^2\mu_2^2 + (1-\eta_1^2)(384\mu_1^2\mu_2^2 + 144\mu_2^3) + 136\mu_1^4\mu_2 + 36\mu_2^3\mu_3; \\
A_6 &= 270\mu_1\mu_2^3 + 420\mu_1\mu_2^3(1-\eta_1^2) + 465\mu_1^3\mu_2^2; \quad A_7 = 135\mu_2^4 + 795\mu_1^2\mu_2^3 + 180\mu_2^4(1-\eta_1^2); \\
A_8 &= 675\mu_1\mu_2^4; \quad A_9 = 225\mu_2^5.
\end{aligned}$$

Визначивши дійсні корені полінома (2.17), квадрат амплітуди X і коефіцієнти A і B , можна обчислити, використовуючи співвідношення

$$X = -2 \frac{\mu_2 Z^3 + \mu_1 Z^2 + Z}{3\mu_2 Z + \mu_1}; \quad A = \frac{3}{4} \mu_2 X^2 + [(1-\eta_1) + 2\mu_1 Z + 3\mu_2] X; \quad B = XD\eta_1.$$

§3. Аналітично-чисельний метод розв'язування задачі про нелінійні коливання тришарової в'язкоелектропружної циліндричної панелі з шарнірно закріпленими торцями.

Нелінійні задачі про динамічну поведінку замкнутої циліндричної оболонки і циліндричної панелі з шарнірно закріпленими торцями мають аналітичний розв'язок у вигляді подвійних тригонометричних рядів. Ці розв'язки можуть служити еталоном при розробці чисельних методів.

Розглянемо задачу про нелінійні коливання симетричної тришарової циліндричної панелі радіуса R , що знаходиться під дією рівномірно розподіленого тиску $P_z = P_0 \cos \Omega t$. На електродованих поверхнях оболонки задані значення потенціалу. У задачах про згинні коливання пластин і оболонок переважаючими є інерційні сили в напрямку нормалі до серединної поверхні. Нехтуючи інерційними силами для тангенціальних і зсувних складових, спрощене варіаційне рівняння, яке використовується при розв'язуванні даної задачі, запишемо у вигляді

$$\delta E = \delta(E_L + E_{NL}) = 0; \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
E_L &= \frac{1}{2} \iint_F \left\{ C_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial s} \right)^2 + 2C_{12} \left(\frac{\partial u_0}{\partial s} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) + \right. \\
&+ C_{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right)^2 + C_{44} \left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 + C_{55} \left(u_1 + \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \\
&+ C_{55} \left(v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + D_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial u_1}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) + \\
&+ D_{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^2 + D_{44} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w + \zeta_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} w \right) \left. \right\} dF + \\
&+ \iint_F \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) Q^0 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) Q^1 \right] - P_z w \right\} dF; \quad (3.2) \\
E_{NL} &= \frac{1}{2} \iint_F \left\{ C_{11} \left[\frac{\partial u_0}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^4 \right] + C_{12} \left[\frac{\partial u_0}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$+C_{11} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^4 \right] +$$

$$+C_{44} \left[2 \left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial s} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \Big\} dF; \quad dF = r ds d\theta.$$

Ввівши позначення $x = s$ ($0 \leq x \leq a$) і $y = R\theta$ ($0 \leq y \leq b$), розглянута задача зводиться до розв'язування варіаційного рівняння (3.1) при наступних початкових

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (3.3)$$

і граничних умовах:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad v_0 = 0, \quad v_1 = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b. \quad (3.4)$$

З огляду на граничні умови (3.4), розв'язок задачі шукається у вигляді подвійних тригонометричних рядів

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(t) \sin(k_m x) \sin(p_n y); \quad u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0(t) \cos(k_m x) \sin(p_n y);$$

$$v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0(t) \sin(k_m x) \cos(p_n y); \quad u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^1(t) \cos(k_m x) \sin(p_n y); \quad (3.5)$$

$$v_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^1(t) \sin(k_m x) \cos(p_n y),$$

де $k_m = \frac{m\pi}{a}$, $p_n = \frac{n\pi}{b}$, ($m, n = 1, 2, 3, \dots$).

Представимо компоненти механічного та електричного навантажень також у вигляді розкладу за тригонометричними функціями

$$P_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin(k_m x) \sin(p_n y); \quad V_k - V_{k-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}^k \sin(k_m x) \sin(p_n y);$$

$$P_{mn} = \frac{16P_0}{abk_m p_n}; \quad V_{mn}^k = \frac{16(V_k - V_{k-1})}{abk_m p_n}. \quad (3.6)$$

З огляду на вирази (3.5), (3.6), з умови (3.1) для визначення коефіцієнтів розкладу отримаємо систему рівнянь

$$(C_{11}k_m^2 + C_{44}p_n^2)u_{mn}^0 + (C_{12} + C_{44})k_m p_n v_{mn}^0 - C_{12} \frac{k_m}{R} w_{mn} -$$

$$-\frac{16}{9ab} \left[(C_{11} \frac{k_m^2}{p_n} + (C_{12} - C_{44})p_n \right] w_{mn}^2 - Q_{mn}^0 k_m = 0;$$

$$(C_{12} + C_{44})k_m p_n u_{mn}^0 + (C_{11}p_n^2 + C_{44}k_m^2)v_{mn}^0 - C_{12} \frac{p_n}{R} w_{mn} -$$

$$-\frac{16}{9ab} \left[(C_{11} \frac{p_n^2}{k_m} + (C_{12} - C_{44})k_m \right] w_{mn}^2 - Q_{mn}^0 p_n = 0;$$

$$\begin{aligned}
& (D_{11}k_m^2 + D_{44}p_n^2 + C_{55})u_{mn}^1 + (D_{12} + D_{44})k_m p_n v_{mn}^1 + C_{55}k_m w_{mn} - Q_{mn}^1 k_m = 0 ; \\
& (D_{12} + D_{44})k_m p_n u_{mn}^1 + (D_{11}p_n^2 + D_{44}k_m^2 + C_{55})v_{mn}^1 + C_{55}p_n w_{mn} - Q_{mn}^1 p_n = 0 ; \\
& \rho_1 \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial t^2} + \zeta_{mn} \frac{\partial w_{mn}}{\partial t} + \left[C_{11} \frac{1}{R^2} + C_{55}(p_n^2 + k_m^2) \right] w_{mn} - C_{12} k_m \frac{1}{R} u_{mn}^0 - C_{11} p_n \frac{1}{R} v_{mn}^0 + \\
& \quad + C_{55} k_m u_{mn}^1 + C_{55} p_n v_{mn}^1 + \frac{32}{9abk_m p_n} \left[-C_{11}(k_m^3 u_{mn}^0 + p_n^2 v_{mn}^0) + \right. \\
& \quad \left. + (C_{44} - C_{12})(k_m p_n^2 u_{mn}^0 + k_m^2 p_n v_{mn}^0) \right] w_{mn} + \frac{16}{3abk_m p_n} (C_{12} k_m^2 + C_{11} p_n^2) \frac{w_{mn}^2}{R} + \\
& \quad + \frac{1}{32} C_{11} (9k_m^4 + 2k_m^2 p_n^2 + 9p_n^4) w_{mn}^3 - Q_{mn}^0 \frac{1}{R} - P_{mn} = 0 . \tag{3.7}
\end{aligned}$$

У системі (3.7) ζ_{mn} – коефіцієнт в'язкого тертя для відповідної моди коливань, а також введено позначення $Q_{mn}^0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 V_{mn}^k \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}}$, $Q_{mn}^1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 V_{mn}^k \frac{H_3^{(k)}}{H_1^{(k)}}$.

Розв'язки перших чотирьох рівнянь системи (3.7) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
u_{mn}^0 &= S_1 \frac{w_{mn}}{R} + Q_1 w_{mn}^2 + Q_{mn}^0 \frac{k_m}{C_{11}(k_m^2 + p_n^2)} ; \\
v_{mn}^0 &= S_2 \frac{w_{mn}}{R} + Q_2 w_{mn}^2 + Q_{mn}^0 \frac{p_n}{C_{11}(k_m^2 + p_n^2)} ; \\
u_{mn}^1 &= -\frac{C_{55} k_m}{D_{11}(k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} w_{mn} + Q_{mn}^1 \frac{k_m}{D_{11}(k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} ; \\
v_{mn}^1 &= -\frac{C_{55} p_n}{D_{11}(k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} w_{mn} + Q_{mn}^1 \frac{p_n}{D_{11}(k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} , \tag{3.8}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{k_m (C_{12} k_m^2 - C_{11} p_n^2)}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2} ; \quad S_2 = \frac{p_n [C_{11} (p_n^2 + k_m^2) - (C_{11} + C_{12}) k_m^2]}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2} ; \\
Q_1 &= \frac{16}{9abk_m p_n} \frac{(5C_{12} + 4C_{44}) k_m^3 p_n^2 - 2C_{11} k_m p_n^4 + C_{11} k_m^5}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2} ; \\
Q_2 &= \frac{16}{9abk_m p_n} \frac{(5C_{12} + 4C_{44}) k_m^2 p_n^3 - 2C_{11} k_m^4 p_n + C_{11} p_n^5}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2} .
\end{aligned}$$

Підставляючи отримані вирази (3.8) для u_{mn}^0 , v_{mn}^0 , u_{mn}^1 , v_{mn}^1 у п'яте рівняння системи (3.7), для визначення w_{mn} отримаємо нелінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + 2\zeta_{mn}^* \frac{dw_{mn}}{dt} + \omega_{mn}^2 w_{mn} + \beta_1 (w_{mn})^2 + \beta_2 (w_{mn})^3 = \frac{1}{\rho_1} P_{mn} + \\
& \quad + \frac{1}{\rho_1} \left[\frac{1}{R} Q_{mn}^0 \frac{(C_{12} k_m^2 + C_{11} p_n^2)}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2} + Q_{mn}^1 \frac{C_{55} (p_n^2 + k_m^2)^2}{D_{11} (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} \right] , \tag{3.9}
\end{aligned}$$

де

$$\omega_{mn}^2 = \left[\frac{C_{55}D_{11}(k_m^2 + p_n^2)^2}{D_{11}(k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} + \frac{(C_{11}^2 - C_{12}^2)k_m^4}{C_{11}R^2(k_m^2 + p_n^2)^2} \right] \frac{1}{\rho_1}; \quad \zeta_{mn}^* = \frac{\zeta_{mn}}{2\rho_1};$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\rho_1 R} \left\{ \frac{16}{3abk_m p_n} (C_{12}k_m^2 + C_{11}p_n^2) - C_{12}k_m Q_1 - C_{11}p_n Q_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{32}{9abk_m p_n} \left[(C_{44} - C_{12})(k_m p_n^2 S_1 + k_m^2 p_n S_2) - C_{11}(k_m^3 S_1 + p_n^3 S_2) \right] \right\};$$

$$\beta_2 = \frac{C_{11}}{64\rho_1} (9k_m^4 + 2k_m^2 p_n^2 + 9p_n^4) +$$

$$+ \frac{32}{9abk_m p_n \rho_1} \left[(C_{44} - C_{12})(k_m p_n^2 Q_1 + k_m^2 p_n Q_2) - C_{11}(k_m^3 Q_1 + p_n^3 Q_2) \right],$$

ζ_{mn}^* – коефіцієнт демпфування для відповідної моди коливань.

Враховуючи, що механічне навантаження і значення електричного потенціалу являються періодичними функціями часу, для розв'язання рівняння (3.9) можна використати описаний вище у §2 метод.

§4. Методика визначення температурного поля.

Дослідження термомеханічного стану розглянутих у цій роботі шаруватих оболонок обертання із в'язкопружних п'єзоелектричних матеріалів при дії електромеханічного навантаження зводиться до послідовного розв'язування задачі про вимушені нелінійні коливання оболонок обертання і задачі нестационарної теплопровідності для визначення температурного поля, обумовленого дисипативним розігрівом.

Розрахунок температури дисипативного розігріву проводимемо МСЕ на тій же сітці кінцевих елементів, що і для розглянутої вище динамічної задачі (див. §2). Для цього скористаємося тривимірним варіаційним рівнянням теплопровідності [4]

$$\delta I = 0, \quad (4.1)$$

де

$$I = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \lambda^{(k)} \left[\left(\frac{\partial T^{(k)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial T^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] + 2C^{(k)} \rho^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial t} T^{(k)} - 2D^{(k)} T^{(k)} \right\} dV +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \alpha_T (T^{(k)} - 2\theta_c) T^{(k)} d\Sigma. \quad (4.2)$$

Тут введено наступні позначення: V – об'єм тіла обертання, обмеженого поверхнею Σ ; $\lambda^{(k)}$ – теплопровідність; $C^{(k)}$ – коефіцієнт питомої теплоємності; $\rho^{(k)}$ – густина матеріалу відповідно для k -го шару; α_T – коефіцієнт тепловіддачі при конвективно-му теплообміні на поверхні тіла з середовищем з температурою θ_c .

Для задачі вібророзігріву функція теплових джерел $D^{(k)}$ для k -го шару в (4.2) дорівнює осередненому за цикл значенню дисипативної функції, яка визначається через комплексні фізико-механічні характеристики матеріалу, комплексні складові тензорів напружень $\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma'_{ij}{}^{(k)} + i\sigma''_{ij}{}^{(k)}$, деформацій $\varepsilon_{ij}^{(k)} = \varepsilon'_{ij}{}^{(k)} + i\varepsilon''_{ij}{}^{(k)}$, векторів напруженості $E_j^{(k)} = E'_j{}^{(k)} + iE''_j{}^{(k)}$, індукції електричного поля $D_j^{(k)} = D'_j{}^{(k)} + iD''_j{}^{(k)}$,

$$D^{(k)} = \frac{\omega}{2} \left(\sigma''_{ij}{}^{(k)} \varepsilon'_{ij}{}^{(k)} - \sigma'_{ij}{}^{(k)} \varepsilon''_{ij}{}^{(k)} + E_j^{(k)} D'_j{}^{(k)} - E'_j{}^{(k)} D''_j{}^{(k)} \right). \quad (4.3)$$

Різні методи розрахунку температурних полів у пластинах і оболонках наведені в роботах [7, 18]. При цьому в багатьох випадках тривимірна задача теплопровідності зводиться до розв'язування послідовності двовимірних задач. Для цього температуру представимо у вигляді ряду

$$T^{(k)}(s, \theta, z, t) = \sum_{i=0}^m T_i^{(k)}(s, \theta, t) p_i(z). \quad (4.4)$$

Тут $T_i^{(k)}(s, \theta, t)$ – шукані функції, що характеризують температурне поле на рівні координатної поверхні; $p_i(z)$ – задані функції розподілу температурного поля по товщині оболонки, які задовольняють умовам ідеального теплового контакту між шарами і дозволяють описувати температуру по товщині кожного шару у вигляді поліному довільного ступеня m . При розв'язуванні багатьох практичних задач можна обмежитися трьома членами ряду (4.4). Тоді з (4.4) випливає, що температура k -го шару апроксимується квадратичним поліномом по z ($m=2$).

Застосовуючи звичайну процедуру МСЕ і припускаючи, що похідна за часом dT/dt не варіюється, отримаємо систему $3N$ лінійних диференціальних рівнянь відносно вузлових значень T_i . Для розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь використовується метод кінцевих різниць, в якому апроксимація за часом здійснюється відповідно до співвідношення $dT_i/dt \approx (T_i(t + \Delta t) - T_i(t))/\Delta t$. Для знаходження температури T_i в момент часу $t + \Delta t$ використовуються рівняння, невідомі в яких записані також для значення часу $t + \Delta t$. Це дозволяє реалізувати неявну схему розв'язування задачі по часу, а саме для знаходження температури у вузлових точках, отримати систему $3N$ лінійних алгебраїчних рівнянь [7, 18].

§5. Аналіз числових результатів.

Ефективність розробленої методики дослідження нелінійних коливань шаруватих оболонок з урахуванням деформацій поперечного зсуву перевірена шляхом порівняння числових результатів, отриманих на основі аналітично-чисельного підходу, з результатами розрахунків, одержаних методом скінченних елементів.

Як приклад розглянуто задачу для тришарової шарнірно опертої циліндричної панелі постійної товщини з середнім пасивним в'язкопружним шаром при дії на неї рівномірно розподіленого механічного тиску $P_z = P_0 \cos \Omega t$. Зовнішні шари оболонки мають однакову товщину і виготовлені з однакового п'єзоелектричного в'язкопружного матеріалу. На електродованих поверхнях панелі підтримується нульове значення потенціалу.

Середній шар оболонки виготовлений з алюмінієвого сплаву з такими механічними характеристиками:

$$E = E' + iE'' = (7,3 + 0,0016i) \times 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad \nu = 0,34; \quad \rho = 0,28 \times 10^4 \text{ кг/м}^3.$$

П'єзоелектричні шари виготовлені з п'єзокераміки PZT (EC-65) і мають такі комплексні фізико-механічні характеристики [26]:

$$s_{ij}^E = s_{ij}' + is_{ij}''; \quad d_{ij} = d_{ij}' + id_{ij}''; \quad \varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij}' + i\varepsilon_{ij}''.$$

де

$$\begin{aligned} s_{11}' &= 0,171 \times 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad s_{12}' = -0,58 \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad s_{13}' = -0,91 \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}; \\ s_{33}' &= 0,184 \times 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad s_{55}' = 0,460 \times 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad d_{31}' = -189,7 \times 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \\ d_{33}' &= 357 \times 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \quad d_{15}' = 609 \times 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \quad \varepsilon_{11}' = 0,20541 \times 10^{-7} \text{ Ф/м}; \\ \varepsilon_{33}' &= 0,14803 \times 10^{-7} \text{ Ф/м}; \quad s_{11}'' = -0,2 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad s_{12}'' = 0,1 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \\ s_{13}'' &= 0,2 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad s_{33}'' = -0,4 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad s_{55}'' = -5,6 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \end{aligned}$$

$$d_{31}'' = -4,8 \times 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \quad d_{33}'' = -14,7 \times 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \quad d_{15}'' = -253,6 \times 10^{-12} \text{ Кл/м}^2; \\ \varepsilon_{11}'' = -11270 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}; \quad \varepsilon_{33}'' = -342 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

У розрахунках вибиралася густина п'єзокераміки $\rho = 0,75 \times 10^4 \text{ кг/м}^3$.

Перехід від заданих параметрів $s_{ij}^E, d_{ij}, \varepsilon_{ij}^T$ до фізико-механічних характеристик $c_{ij}^E, e_{ij}, \mu_{ij}^S$, для PZT (EC-65) здійснюється на основі відомих формул перетворення [6].

У даній роботі представлено результати розрахунків, які проводилися для тонкошківної оболонки ($H/R = 0,01$) з параметрами: $H = 0,001 \text{ м}, h_1 = h_3 = 0,00025 \text{ м}, h_2 = 0,0005 \text{ м}, R = 0,1 \text{ м}, a = L = 0,1 \text{ м}, b = R \cdot \theta = 0,1 \text{ м}$; оболонки середньої товщини ($H/R = 0,1$) з параметрами: $H = 0,01 \text{ м}, h_1 = h_3 = 0,0025 \text{ м}, h_2 = 0,005 \text{ м}, R = 0,1 \text{ м}, a = L = 0,1 \text{ м}, b = R \cdot \theta = 0,1 \text{ м}$; і досить товстої оболонки ($H/R = 0,2$) відповідно з параметрами: $H = 0,01 \text{ м}, h_1 = h_3 = 0,005 \text{ м}, h_2 = 0,01 \text{ м}, R = 0,1 \text{ м}, a = L = 0,1 \text{ м}, b = R \cdot \theta = 0,1 \text{ м}$.

Коефіцієнт демпфування кожної з форм коливань ζ_n істотно залежить від фізико-механічних властивостей матеріалу, товщини шарів оболонки і частоти власних коливань. Залежно від значень цих параметрів він може змінюватися в межах $0,0001 \div 0,5$.

У цій роботі за методикою, викладеною в роботі [1], з використанням в'язкоелектропружних властивостей шарів обчислюється матриця втрат, а потім з урахуванням ортогональності власних функцій обчислюється коефіцієнт демпфування для кожної з форм коливань.

При розв'язуванні задачі методом скінченних елементів чверть поверхні оболонки розбивалася на 25 чотирикутних скінченних елементів з 456-ма вузловими точками.

Нижче на рисунках в околі першої резонансної частоти представлено результати обчислень модуля амплітуди прогину для серединної точки панелі ($a/2; b/2$), в якій модуль амплітуди прогину досягає максимального значення.

Для циліндричних панелей з різною товщиною ($H/R = 0,01; H/R = 0,1; H/R = 0,2$) проведено порівняння результатів розрахунків, отриманих на основі класичної теорії Кірхгофа – Лява і проведених на основі запропонованого авторами подібного підходу [20], з числовими результатами, обчисленими з використанням представленої у цій статті уточненої теорії типу С.П.Тимошенка.

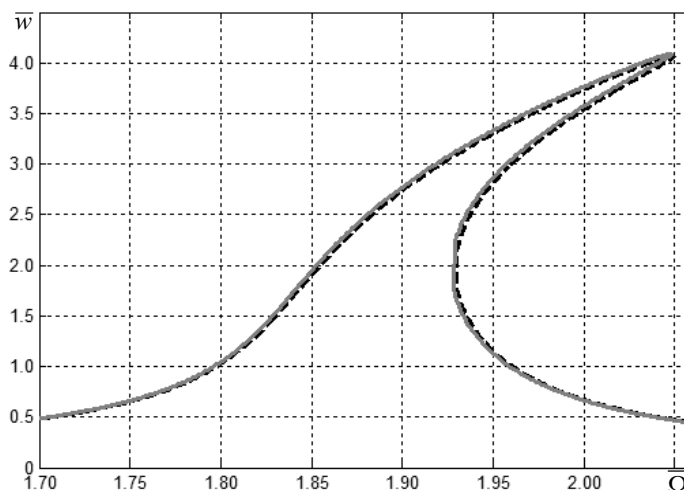


Рис. 1

На рис. 1 – 5 введено позначення $\bar{\Omega}$, \bar{w} , які пов'язані з круговою частотою збудження і модулем амплітуди прогину для серединної точки панелі наступним чином: $\Omega = \bar{\Omega} \times 10^4$ рад/с, $|w(a/2; b/2)| = \bar{w} \times 10^{-3}$ м.

На рис. 1 показано характер зміни модуля амплітуди прогину панелі в разі $H/R = 0,01$ в околі першої резонансної частоти $\omega_1 = 1,88186 \times 10^4$ рад/с при коефіцієнті демпфування для першої моди $\zeta_1 = 0,01$. Розглядалося механічне навантаження панелі з параметром $P_0 = 0,1 \times 10^6$ Па. Суцільна сіра лінія відповідає результатам, отриманим на основі МСЕ, а чорна штрихова лінія представляє результати, які одержано на основі аналітичного підходу. Слід зазначити, що для вказаних розмірів панелі результати, отримані з використанням теорії С.П.Тимошенка, як для МСЕ, так і для аналітичного методу, практично збігаються з розрахунками, які проведені на основі класичної теорії.

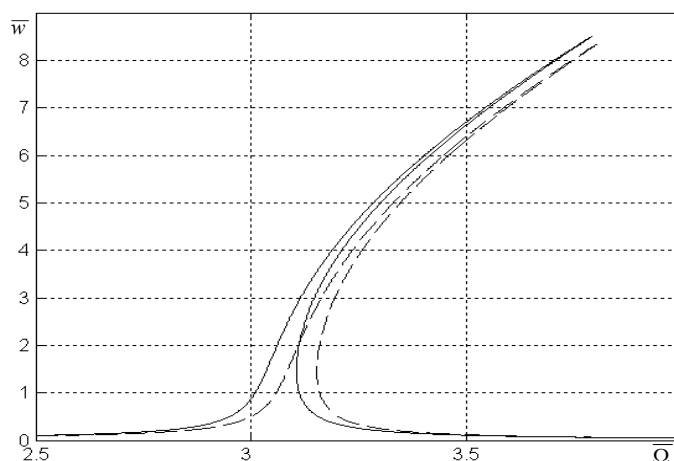


Рис. 2

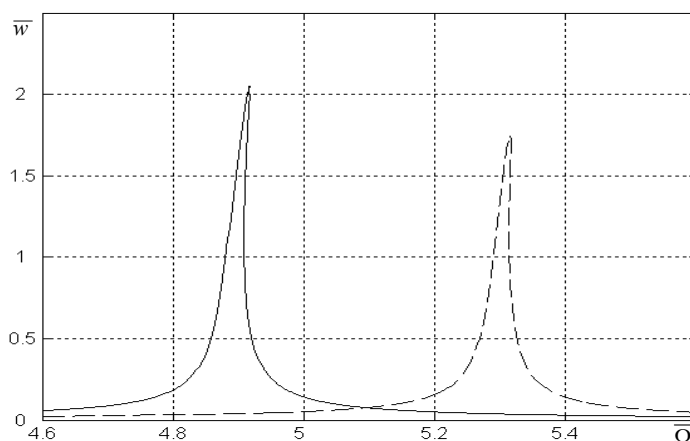


Рис. 3

При інших товщинах панелі відхилення інші. Так, як приклад, на рис. 2 показано поведінку модуля амплітуди прогину в околі першої резонансної частоти $\omega_1 = 3,05328 \times 10^4$ рад/с для панелі при $H/R = 0,1$ і механічному навантаженні з парамет-

ром $P_0 = 0,1 \times 10^7$ Па та коефіцієнті демпфування $\zeta = 0,0016$. Рис. 3 ілюструє при тому ж механічному навантаженні поведінку модуля амплітуди прогину для досить товстої панелі при $H/R = 0,2$. Обчислення проводилися на основі аналітичного методу. На рис. 2, 3 суцільна лінія відповідає розрахункам, проведеним на основі теорії С.П.Тимошенка, а штрихова – розрахункам, отриманим на основі класичної теорії Кірхгофа – Лява.

Аналіз даних, представлених на рис. 2, 3 показує, що врахування деформацій поперечного зсуву супроводжується зміщенням амплітудно-частотних характеристик прогину у бік зменшення частоти резонансу і можливим збільшенням значень модуля амплітуди прогину. Таким чином, для не достатньо тонких панелей слід використовувати уточнені гіпотези.

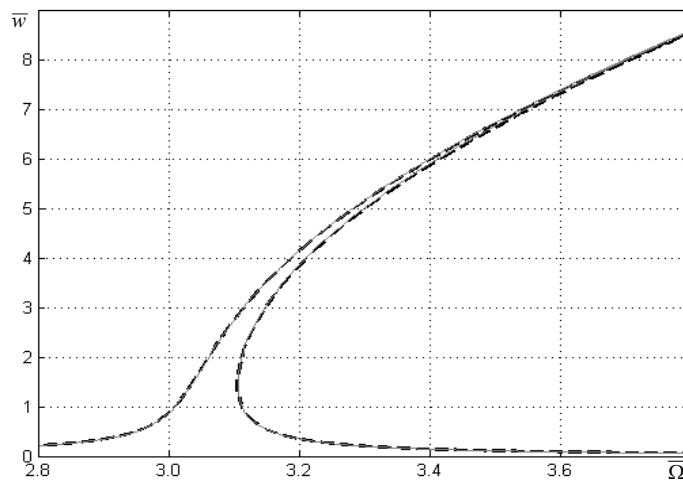


Рис. 4

На рис. 4 показано зміну модуля амплітудних значень прогину в околі першої резонансної частоти $\omega_1 = 3,05328 \times 10^4$ рад/с для панелі при $H/R = 0,1$ і механічному навантаженні з параметром $P_0 = 0,1 \times 10^7$ Па в разі використання чисельного методу скінченних елементів (суцільна сіра лінія) і аналітичного методу (пунктирна чорна лінія) при коефіцієнті демпфування $\zeta_1 = 0,0016$. Як не важко помітити, отримані результати

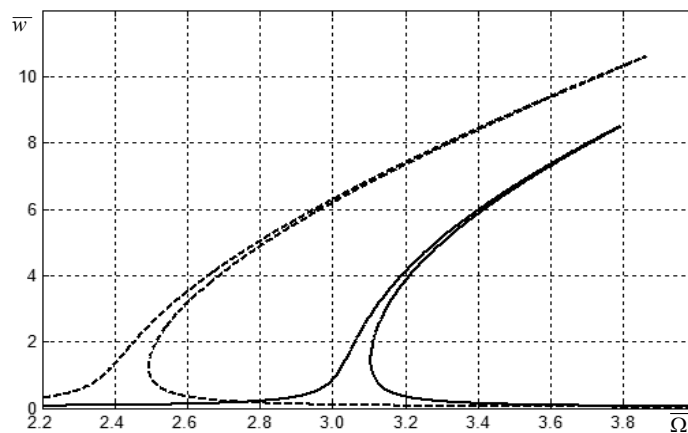


Рис. 5

на основі згаданих підходів практично збігаються, що підтверджує досить високу точність обчислень за розробленими програмами на основі методу скінченних елементів.

На рис. 5 показані для порівняння результати розрахунків модуля амплітудних значень прогину в околі першої резонансної частоти з використанням аналітичного підходу, які проведені на основі теорії С.П. Тимошенка ($P_0 = 0,1 \times 10^7$ Па, $\zeta_1 = 0,0016$) при $H/R = 0,1$ (суцільна лінія) і $H/R = 10$ (штрихова лінія). У другому випадку фактично маємо розв'язок для пластини.

Аналіз рис. 2 – 5 показує, що вплив геометричної нелінійності на амплітудно-частотні характеристики прогину істотно залежить від товщини циліндричної панелі і в'язкопружних характеристик матеріалу.

Для оцінки точності запропонованого методу дослідження нелінійних поперечних коливань тонкостінних елементів при електричному навантаженні виконано розрахунки коливань зазначеної панелі, коли на зовнішніх електродованих поверхнях підтримується амплітудне значення потенціалу 360В і нульове значення на внутрішньому електроді.

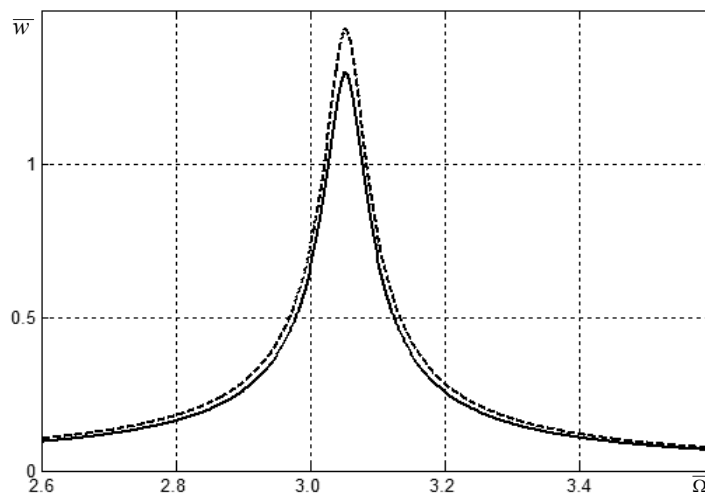


Рис. 6

На рис. 6 для порівняння наведено результати, які отримані на основі чисельного методу скінченних елементів (суцільна лінія) і аналітичного методу (пунктирна лінія), представленого в §3, при $\zeta_1 = 0,01$ в околі першої резонансної частоти для панелі при $H/R = 0,1$. На цьому малюнку введені позначення $\bar{\Omega}$, \bar{w} , які пов'язані з частотою збудження і модулем амплітуди прогину для серединної точки панелі наступним чином: $\Omega = \bar{\Omega} \times 10^4$ рад/с, $|w(a/2; b/2)| = \bar{w} \times 10^{-4}$ м.

Рис. 7 представляє динамічну зміну амплітудних значень прогину для серединної точки панелі $w(a/2; b/2) = \tilde{w} \times 10^{-4}$ м при $H/R = 0,1$, механічному навантаженні з параметром $P_0 = 0,1 \times 10^7$ Па, коефіцієнті демпфування $\zeta_1 = 0,0016$ і таких значеннях кругової частоти збудження вимушених коливань: $\Omega = 0,27 \times 10^5$ рад/с (штрихпунктирна лінія), $\Omega = 0,28 \times 10^5$ рад/с (штрихова лінія), $\Omega = 0,29 \times 10^5$ рад/с (точкова лінія), $\Omega = 0,295 \times 10^5$ рад/с (суцільна лінія). Обчислення проводилися з використанням аналітичного підходу.

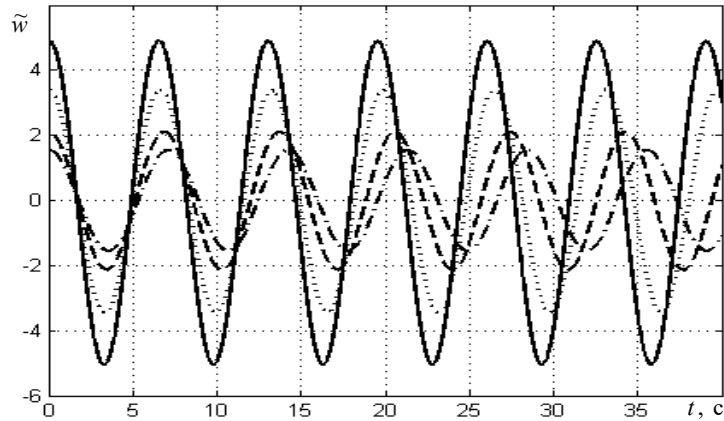


Рис. 7

З використанням методики розв'язання задачі теплопровідності, що представлена в попередньому параграфі, проведено розрахунок температурного поля вібророзігріву панелі середньої товщини ($H/R = 0,1$) при електричному навантаженні, коли на зовнішніх електродованих поверхнях підтримується задане амплітудне значення електричного потенціалу і нульове значення на внутрішньому електроді.

При визначенні дисипативної функції використовувалися комплексні характеристики п'єзокераміки PZT (EC-65) і алюмінію, а також знайдені чисельно коефіцієнти A , B , Z для обчислення комплексних складових компонент тензорів деформацій і напружень.

Розрахунок температурного поля проводився з використанням методу скінченних елементів, при цьому теплофізичні характеристики і температура навколишнього середовища вибиралися наступними: коефіцієнт теплопровідності для п'єзокерамічних шарів $\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = 1,25 \text{ Вт}/(\text{м} \times ^\circ\text{C})$, для шару алюмінію $\lambda^{(2)} = 200 \text{ Вт}/(\text{м} \times ^\circ\text{C})$, коефіцієнт температуропровідності відповідно $a^{(1)} = a^{(3)} = 0,4 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ та $a^{(2)} = 0,1 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_T = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \times ^\circ\text{C})$, температура навколишнього середовища $\theta_c = 20^\circ\text{C}$.

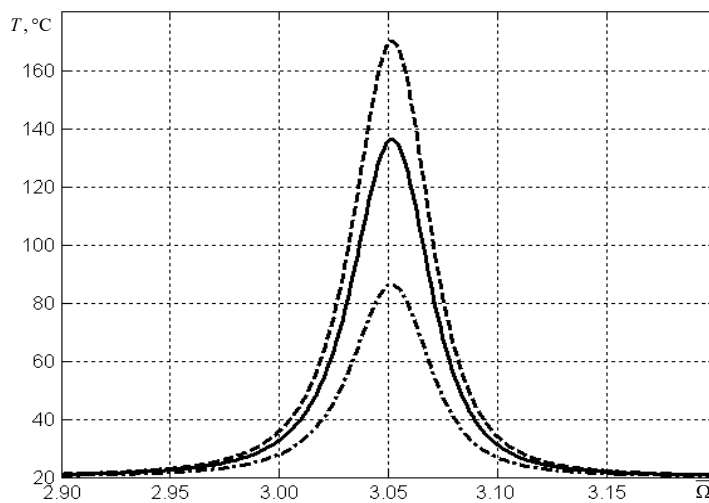


Рис. 8

На рис. 8 показана залежність усталеної температури в серединній точці панелі $(a/2; b/2)$ від кутової частоти $\Omega = \bar{\Omega} \times 10^4$ рад/с, в околі першої резонансної частоти $\omega_1 = 3,05328 \times 10^4$ рад/с при різних амплітудних значеннях електричного потенціалу на зовнішніх поверхнях циліндричної панелі: 60 В (штрих-пунктирна лінія), 70 В (суцільна лінія) і 75 В (пунктирна лінія).

Як показують результати проведеного чисельного моделювання, врахування геометричної нелінійності істотно впливає на розподіл температури в околі першої резонансної частоти.

Висновки.

Розроблено чисельно-аналітичну методику дослідження вимушених геометрично нелінійних коливань шаруватих в'язкопружних п'єзоелектричних оболонок обертання і оболонкових конструктивних елементів при дії електромеханічного навантаження з урахуванням деформацій поперечного зсуву та дисипативного розігріву. Тестування чисельного підходу проведено на задачі про коливання шарнірно закріпленої в'язкоелектропружної тришарової циліндричної панелі в околі першої резонансної частоти. Для панелей різної товщини проведено порівняння результатів розрахунку, отриманих на основі класичних гіпотез Кірхгофа – Лява та уточнених гіпотез типу С.П. Тимошенка. Під час чисельного моделювання встановлено, що для обраних геометричних параметрів циліндричних панелей врахування деформацій поперечного зсуву супроводжується зміщенням амплітудно-частотних характеристик прогину у бік зменшення частоти резонансу, а при дослідженні вимушених геометрично нелінійних коливань недостатньо тонких панелей слід використовувати уточнені гіпотези. Проведено розрахунок температурного поля вібророзігріву для розглянутої в'язкоелектропружної циліндричної панелі при електричному навантаженні.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Запропоновано чисельно-аналітичну методику дослідження вимушених геометрично нелінійних коливань шаруватих оболонок обертання із п'єзоелектричних в'язкопружних матеріалів при дії електричного та механічного навантажень з урахуванням деформацій поперечного зсуву і температури дисипативного розігріву, яка ґрунтується на використанні методу скінченних елементів у варіаційній постановці та методу гармонічної лінеаризації. Представлено результати чисельного моделювання для тришарової циліндричної панелі з шарнірно закріпленими торцями, що складається з однакових зовнішніх п'єзоелектричних шарів і внутрішнього пасивного в'язкопружного шару. Досліджено поведінку прогину в околі першого резонансу для циліндричних панелей різної товщини. Проведено розрахунок температурного поля вібророзігріву для розглянутої в'язкоелектропружної циліндричної панелі при електричному навантаженні.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: вимушені коливання, геометрична нелінійність, п'єзоелектричний шар, оболонка обертання, метод скінченних елементів, температура дисипативного розігріву.

1. Бате К., Вилсон Е. Численные метода анализа и метод конечных элементов. – Москва: Стройиздат, 1982. – 448 с.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 595 с.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
4. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
5. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В. Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. – Київ, 2015. – 94. – С. 75 – 95.
6. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – Киев: Выща шк., 1989. – 208 с.
7. Механика связанных полей в элементах конструкций (под ред. Гузя А.Н.): в 5-ти томах. Т.1. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.

8. *Механика связанных полей в элементах конструкций* (под ред. Гузя А.Н.): в 5-ти томах. Т.4. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость.– Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с.
9. *Alijani F., Amabili M.* Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013 // *Int. J. of Non-Linear Mechanics.* – 2014. – **58**, N 1. – P. 233 – 257.
10. *Allahkarami F., Saryazdi M.G., Nikkhah-Bahrami M.* Nonlinear Forced Vibration of Curved Microbeam Resting on Nonlinear Foundation Using the Modified Strain Gradient Theory // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 6. – P. 718 – 738.
11. *Amabili M., Paidoussis M.P.* Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid structure interaction // *Appl. Mech. Reviews.* – 2003. – **56**, N 4. – P. 349 – 381.
12. *Amabili M.* *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials.* – Cambridge: Cambridge University Press, 2018. – 582 p.
13. *Bhimaraddi A., Carr A.J., Moss P.J.* A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution // *Computers & Struct.* – 1989. – **31**, N 3. – P. 299 – 308.
14. *Chróscielewski J., Schmidt R., Eremeyev V.A.* Nonlinear finite element modeling of vibration control of plane rod-type structural members with integrated piezoelectric patches // *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* – 2019. – **31**, N 1. – P. 147 – 188.
15. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I.* Thermomechanics of Inelastic Thin-Walled Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 1. – P. 6 – 58.
16. *Kirichok I.F., Chernyushok O.A.* Axisymmetrical Vibrations and Vibroheating of a Thermoviscoelastic Cylindrical Shell with Piezoactuators and Shear Deformation Taken into Account // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 3. – P. 340 – 346.
17. *Kirichok I.F., Chernyushok O.A.* Forced Vibration and Self-Heating of a Thermoviscoelastic Cylindrical Shear Compliant Shell with Piezoelectric Actuators and Sensors Account // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 6. – P. 723 – 731.
18. *Kozlov V.I.* Oscillation and Dissipative Heating of a Multilayer Shell of Revolution Made of Viscoelastic Material // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 6. – P.480 – 486.
19. *Kozlov V.I., Karnaukhova T.V., Peresun'ko M.V.* Numerical modeling of the active damping of forced thermomechanical resonance vibrations of viscoelastic shells of revolution with the help of piezoelectric inclusions // *J. Math. Sci.* – 2010. – **171**, N 5. – P. 565 – 578.
20. *Kozlov V.I., Zinchuk L.P., Karnaukhova T.V., Sichko V.M.* Forced Geometrically Nonlinear Vibrations of Thin Shells of Revolution with Piezoelectric Layers // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 2. – P. 200 – 216.
21. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Nonlinear Problems of the Vibration of Thin Shells (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 8. – P. 703 – 728.
22. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 1. – P. 12 – 63.
23. *Liu C.J., Zheng Z.L., Yang X.Y., Guo J.J.* Geometric Nonlinear Vibration Analysis for Pretensioned Rectangular Orthotropic Membrane // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 1. – P. 104 – 119.
24. *Moita J.M.S., Soares C.M.M., Soares C.A.M.* Geometrically non-linear analysis of composite structures with integrated piezoelectric sensors and actuators // *Composite Struct.* – 2002. – **57**, N 1 – 4. – P. 253 – 261.
25. *Rao M.N., Schmidt R., Schröder K.U.* Static and dynamic FE analysis of piezolaminated composite shells considering electric field nonlinearity under thermo-electro-mechanical loads // *Acta Mechanica.* – 2018. – **229**, N 12. – P. 5093 – 5120.
26. *Sabat R.G., Mukherjee B., Ren W., Yung G.* Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // *J. Appl. Phys.* – 2007. – **101**, N 6. – P. 064111 – 1 – 7.
27. *Zhang S., Zhao G., Rao M.N., Schmidt R., Yu Y.* A review on modeling techniques of piezoelectric integrated plates and shells // *J. of Intelligent Material Systems and Struct.* – 2019. – **30**, N 8. – P. 1133 – 1147.

Надійшла 28.02.2020

Затверджена до друку 24.06.2021