

В. А. Декрет, В. М. Бистров, В. С. Зеленський

**ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ ПРИПОВЕРХНЕВИХ
КОРОТКИХ ВОЛОКОН У СЛАБКОАРМОВАНОМУ
КОМПОЗИТНОМУ МАТЕРІАЛІ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Гесстєрова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: numer@inmech.kiev.ua*

Abstract. A numerical solution is obtained for the problem of loss of stability determination in a structure of a composite material reinforced by the near-the-surface short fibers in compression along the direction of arrangement of fibers. The main relationships of the three-dimensional linearized theory of stability within the framework of the model of a piecewise - homogeneous medium are used. The subcritical stress-stress state is investigated, and dependence of the buckling modes in the structure of the composite material on the location of the fibers relative to the free surface and on the distance between adjacent fibers is established. For the numerical solution of the problem, the grid method based on a modified variational – difference approach is used. The sequential and parallel algorithms of Cholesky and subspace iteration methods are applied.

Key words: near-the-surface short fibers, buckling modes, piecewise-homogeneous model, three-dimensional linearized theory of stability, numerical approach, parallel algorithm.

Вступ.

Одним із можливих механізмів руйнування односпрямованих композитних матеріалів (КМ) при стиску вздовж напрямку армування є втрата стійкості армуючих шарів і волокон (microbuckling). Цей механізм може мати характер втрати стійкості у внутрішній структурі КМ або приповерхневої втрати стійкості у структурі КМ з формами втрати стійкості, згасаючими при віддаленні від поверхні КМ. Дослідження приповерхневої втрати стійкості проводиться за двома напрямками. Перший напрямок стосується дослідження втрати стійкості у структурі матеріалу біля вільної граничної поверхні, другий – біля завантаженої поверхні. Як правило, явище приповерхневої нестійкості передуює внутрішній нестійкості. У зв'язку з цим її дослідження дозволяє встановити мінімальне значення критичних параметрів навантаження, при яких може відбутися втрата несучої здатності у приповерхневих армуючих компонентах КМ біля вільної граничної поверхні, або у таких компонентах біля завантаженої поверхні.

Одним із найбільш точних підходів при розгляді вказаної проблеми є застосування тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) [2, 13] в рамках моделі кусково-однорідного середовища. Огляд відповідних результатів для КМ, армованих неперервними компонентами, при стиску паралельно вільній поверхні, представлений в [3, 19]. Окремі результати, які відносяться до втрати стійкості КМ біля завантаженої поверхні, наведені у роботах [11, 18, 21]. Результати дослідження стійкості армованих короткими волокнами КМ на основі моделі «коротких волокон» представлені в [4, 15 – 17]. Явище приповерхневої втрати стійкості КМ, слабкоармованого короткими волокнами біля вільної граничної поверхні, розглянуто у роботі [20] для моделі одного приповерхневого волокна у напівнескінченній матриці. Розрахункова модель та окремі результати для двох взаємодіючих приповерхневих коротких волокон наведені у роботі [1].

У роботі [20] показано, що з наближенням включення до граничної поверхні виникає початкове викривлення волокна, зумовлене несиметричністю основного напружено-деформівного стану, яке також може призвести до руйнування КМ. Отже, при дослідженні нестійкості КМ, слабоармованого короткими волокнами біля вільної плоскої граничної поверхні, під дією стискуючого навантаження, спрямованого вздовж волокон, необхідно виконувати аналіз спільної дії декількох механізмів, які мають місце в цьому процесі і можуть призвести до руйнування композиту.

У даній роботі на основі моделі «коротких волокон» та розрахункової схеми, представленій у роботі [1], досліджено докритичний стан КМ щодо початкового викривлення волокон і форми втрати стійкості приповерхневих волокон при стиску КМ зовнішнім навантаженням уздовж напрямку розміщення армуючих компонент в залежності від відстані між волокнами та волокнами і вільною поверхнею. Для задач вказаного класу, коли докритичний стан є суттєво неоднорідним, необхідно застосовувати чисельні методи. У роботі використовується метод сіток на основі модифікованого варіаційно-різницевого підходу [5, 12, 18]. Як приклад застосування тривимірної скінченно-елементної моделі при дослідженні впливу вільної поверхні на втрату стійкості у структурі армованих неперервними волокнами композитах можна навести результати роботи [22]. При чисельному моделюванні задачі стійкості композитів, для забезпечення потрібної точності наближеного розв'язку приходимо до необхідності розв'язання дискретних задач великої розмірності. Це потребує застосування методів високопродуктивних обчислень та, зокрема, алгоритмічно-програмних засобів паралельних обчислень на комп'ютерах з багатоядерними процесорами та графічними прискорювачами [10]. При чисельному моделюванні розглянутої у даній роботі задачі в рамках обчислювального експерименту застосовано паралельне програмне забезпечення для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Холецького [7 – 9] та часткової узагальненої алгебраїчної проблеми власних значень для розріджених симетричних матриць методом ітерацій на підпросторі [6, 24].

§1. Модель коротких волокон та її застосування для дослідження механізмів руйнування КМ, армованих приповерхневими короткими волокнами.

Дослідження механізмів руйнування КМ у даній роботі базується на наступній *Загальній концепції*, яка у [14] сформульована таким чином. «У разі композитних матеріалів, які моделюються у континуальному наближенні ортотропними матеріалами, при стиску вздовж осей симетрії властивостей матеріалів початковим етапом (стартом) руйнування є втрата стійкості у внутрішній структурі композитів (внутрішня нестійкість) або в приповерхневих шарах внутрішньої структури композиту (приповерхнева нестійкість). Поширення руйнування при цьому визначається поведінкою збурень у рамках жваної (порівняно наближеної або досить строгої) теорії стійкості та починається біля макро- і мікронеоднорідностей. Теоретичною межею міцності при стиску і теоретичним значенням граничного вкорочення є величина критичного навантаження і величина критичного вкорочення, обчислені у рамках жваної теорії стійкості». У даній роботі такою теорією є ТЛТСДТ у рамках другого варіанту теорії малих докритичних деформацій [2, 13].

Основні положення теорії стійкості волокон скінченних розмірів в матриці, які визначають постановку задач, а також межі її застосування, можна сформулювати таким чином [4, 14]:

1. Матеріали волокон і матриці моделюються лінійно-пружними ізотропними тілами; таке моделювання можна вважати прийнятним при порівняно короткостроковій дії зовнішнього навантаження при помірних температурах.

2. Застосовується другий варіант теорії малих докритичних деформацій тривимірної лінеаризованої теорії стійкості, коли початковий стан визначається за геометрично лінійною теорією; такий підхід вважається прийнятним для порівняно жорстких волокнистих композитних матеріалів, які переважно руйнуються при порівняно малих деформаціях.

3. Розглядається навантаження зовнішніми «мертвими» навантаженнями, у зв'язку з чим виконуються достатні умови застосування статичного методу ТЛТУДТ (метод Ейлера); усі дослідження виконуються із застосуванням статичного методу (біфуркаційний підхід).

4. На межі розділу наповнювача і матриці приймаються умови ідеального контакту (неперервності векторів напружень і переміщень) як при визначенні докритичного стану, так і при дослідженні задач стійкості.

5. У разі скінченного числа волокон приймаються умови згасання «на нескінченності»; для періодичної системи волокон додатково приймаються відповідні умови періодичності.

6. Усі дослідження виконуються у рамках плоскої деформації: розглядається поперечний переріз волокнистих матеріалів, що проходить через вісь волокон, які лежать в одній площині; для періодичної системи волокон додатково приймаються відповідні умови періодичності.

При дослідженні механізмів руйнування КМ, армованих приповерхневими волокнами, розглядається композит, який займає нижній напівпростір $\text{const} \geq x_2 > -\infty$ з армуючими волокнами, які розташовані паралельно вільній поверхні КМ. В залежності від відстані між волокнами та волокнами і вільною поверхнею механізми руйнування можуть бути пов'язані як із внутрішньою втратою стійкості, так і з приповерхневою нестійкістю КМ.

Базовою моделлю при дослідженні стійкості слабкоармованих короткими волокнами КМ є ізольоване волокно в нескінченній матриці при стиску зовнішнім навантаженням у стані плоскої деформації (рис. 1, а). Розрахункові схеми при дослідженні стійкості армованих короткими волокнами КМ для інших моделей будуються на основі розрахункової схеми для одного волокна у матриці [4, 15, 16].

При аналізі механічних ефектів, пов'язаних із зміною відстані між приповерхневими волокнами і вільною поверхнею слабкоармованих КМ, можуть бути використані результати для базової моделі (рис. 1, а) та для моделі двох послідовно розміщених волокон у нескінченній матриці (рис 1, б) у випадку слабкоармованого КМ нерегулярної структури. Такі моделі будемо називати спорідненими моделями для дослідження стійкості армованих приповерхневими короткими волокнами КМ. Спорідненість розрахункових моделей полягає у тому, що при дослідженні механізмів руйнування КМ при стиску вони можуть застосовуватися сумісно, або переходити одна у іншу відповідно до зміни концентрації компонентів КМ та їх розташування відносно границь КМ і відносно одна одної.

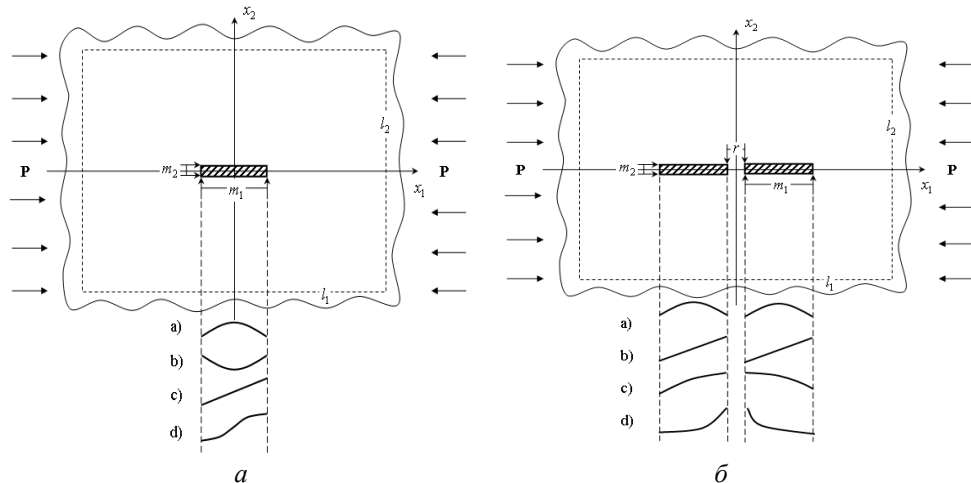


Рис. 1

Розрахункова модель для дослідження стійкості армованих приповерхневими короткими волокнами КМ представлена на рис. 2.

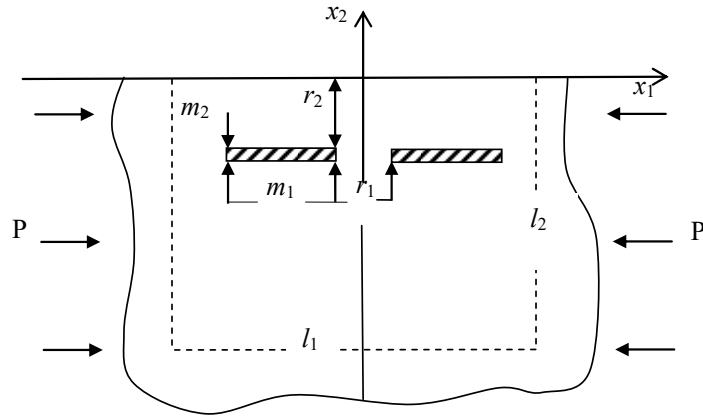


Рис. 2

§2. Постановка задачі.

Розглянемо випадок, коли КМ вважається слабкоармованим та має нерегулярну структуру. Це припущення дозволяє розглядати розрахункову схему для двох послідовно розміщених приповерхневих волокон у напівнескінченній матриці. Така розрахункова схема для дослідження стійкості КМ, армованого короткими волокнами поблизу вільної поверхні КМ, відповідає розрахунковій моделі, представлений на рис. 2, та включає рівняння лінійної теорії пружності і ТЛТУДТ при неоднорідному докритичному стані та граничні умови, які відповідають розрахунковій області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma = \{(x_1, x_2) | -l_1/2 \leq x_1 \leq l_1/2; -l_2/2 \leq x_2 \leq 0\}$ для стану плоскої деформації у площині Ox_1x_2 . Одна із сторін цієї області співпадає з вільною граничною поверхнею. Розміри розрахункової області визначаються в результаті обчислювального експерименту, виходячи із умови згасання на сторонах прямокутника, що не співпадають з граничною поверхнею, збурень, обумовлених концентрацією напружень навколо волокон.

Постановка задачі визначення стійкості слабкоармованого приповерхневими взаємодіючими короткими волокнами КМ здійснюється аналогічно постановці для двох послідовно розміщених волокон у нескінченній матриці при стиску вздовж напрямку розташування волокон [17]. При цьому граничні умови на вільній поверхні є однорідними умовами у напруженнях. Також мають місце умови згасання «на нескінченності» при $x_1 \rightarrow \pm \infty$, $x_2 \rightarrow -\infty$. У напрямку Ox_1 композит навантажений стискаючим навантаженням постійної інтенсивності P . Навантаження вважається «мертвим», що забезпечує виконання достатніх умов застосування статичного методу ТЛТСДТ [13].

Дослідження докритичного стану виконується у рамках класичної лінійної теорії пружності ізотропного тіла. Задача стійкості при застосуванні статичного методу зводиться до узагальненої задачі на власні значення, у якій мінімальне власне значення λ відповідає критичному навантаженню, а відповідна власна функція $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ визначає форму втрати стійкості.

Початковий стан із урахуванням симетрії навантаження визначаємо із наступних основних співвідношень лінійної теорії пружності для області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq l_1/2; -l_2/2 \leq x_2 \leq 0\}$:

рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,i}^0 = 0, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (2.1)$$

граничні умови

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^0 &= 0 \wedge \sigma_{22}^0 = 0, \quad (0 \leq x_1 \leq l_1/2) \wedge (x_2 = 0); \\ \sigma_{12}^0 &= 0 \wedge u_2^0 = 0, \quad (0 \leq x_1 \leq l_1/2) \wedge (x_2 = -l_2); \\ u_1^0 &= 0 \wedge \sigma_{12}^0 = 0, \quad (x_1 = 0) \wedge (-l_2 \leq x_2 \leq 0); \\ \sigma_{11}^0 &= P \wedge \sigma_{12}^0 = 0, \quad (x_1 = l_1/2) \wedge (-l_2 \leq x_2 \leq 0);\end{aligned}\tag{2.2}$$

умови ідеального контакту між компонентами КМ

$$\left[n_i \sigma_{ij}^0 \right] = 0; \quad \left[u_i^0 \right] = 0;\tag{2.3}$$

співвідношення між компонентами напружень σ_{ij}^0 , деформацій ε_{ij}^0 і переміщень u_i^0 у межах компонента КМ

$$\sigma_{ij}^0 = \delta_{ij} A_{ik} \varepsilon_{kk}^0 + 2(1 - \delta_{ij}) G \varepsilon_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0), \quad i \neq j,\tag{2.4}$$

де

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad A_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.\tag{2.5}$$

В (2.5) A_{ij} , E , G , ν – модулі пружності, модуль Юнга, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона компонента КМ.

Основні співвідношення тривимірної лінеаризованої теорії стійкості для визначення критичних параметрів стійкості КМ мають наступний вигляд: рівняння рівноваги у збуреннях

$$(\sigma_{mi} + \lambda \sigma_{ji}^0 u_{m,i})_{,j} = 0, \quad x \in \bar{\Omega};\tag{2.6}$$

граничні умови

$$\begin{aligned}\sigma_{m2} &= 0, \quad (0 \leq x_1 \leq l_1/2) \wedge x_2 = 0; \\ (\sigma_{12} + \lambda \sigma_{22}^0 u_{1,2}) &= 0 \wedge u_2 = 0, \quad (0 \leq x_1 \leq l_1/2) \wedge x_2 = -l_2; \\ u_1 = 0 \wedge \sigma_{12} + \lambda (P u_{2,1} + \sigma_{12}^0 u_{2,2}) &= 0, \quad (x_1 = 0) \wedge (-l_2 \leq x_2 \leq 0); \\ \sigma_{m1} + \lambda (P u_{m,1} + \sigma_{12}^0 u_{m,2}) &= 0, \quad (x_1 = l_1/2) \wedge (-l_2 \leq x_2 \leq 0);\end{aligned}\tag{2.7}$$

умови ідеального контакту на границі між компонентами КМ

$$\left[n_i (\sigma_{mi} + \lambda \sigma_{ij}^0 u_{m,j}) \right] = 0, \quad [u_i] = 0.\tag{2.8}$$

Співвідношення між збуреннями напружень σ_{ij} , деформацій ε_{ij} і переміщень u_i у межах компонента КМ мають вигляд (2.4), (2.5).

Позначення в (2.1) – (2.8) є загальноприйнятими і індекси змінюються від 1 до 2 (\wedge, \vee – знаки логічного множення и додавання). Верхнім індексом «0» позначено компоненти напружень і переміщень для докритичного стану. Індекс, який позначає належність до компонента КМ, для зручності не застосовується. У співвідношеннях

(2.3), (2.8) n_i – орти зовнішньої нормалі до поверхні, $[f(x)] = f(x-0) - f(x+0)$ – стрибок функції $f(x)$.

Критичне навантаження визначається із співвідношення

$$P_{кр} = \min |\lambda| P, \quad (2.9)$$

де $\min |\lambda|$ – мінімальне за модулем власне значення задачі (2.6) – (2.8); P – інтенсивність зовнішнього навантаження.

§3. Чисельний розв'язок.

3.1. Дискретна модель. При застосуванні методу сіток в розрахунковій області $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) | -l_1/2 \leq x_1 \leq l_1/2; -l_2/2 \leq x_2 \leq 0\}$ вводиться кінцево-різницева сітка (рис. 3):

$$\bar{\omega} = \omega \cup \gamma = \{x = (x_1^m, x_2^n), m = \overline{0, M}, n = \overline{0, N}\}, \gamma = \gamma_{u_1} \cup \gamma_{u_2} \cup \gamma_{\sigma_1} \cup \gamma_{\sigma_2}, \quad (3.1)$$

де ω – множина внутрішніх вузлів; $\gamma_{u_1}, \gamma_{u_2}, \gamma_{\sigma_1}, \gamma_{\sigma_2}$ – множина граничних вузлів на ділянках границі Γ області $\bar{\Omega}$, де згідно граничним умовам задачі (2.1) – (2.5) задані умови в переміщеннях та напруженнях для першої та другої складових вектору переміщень та поверхневої сили, відповідно.

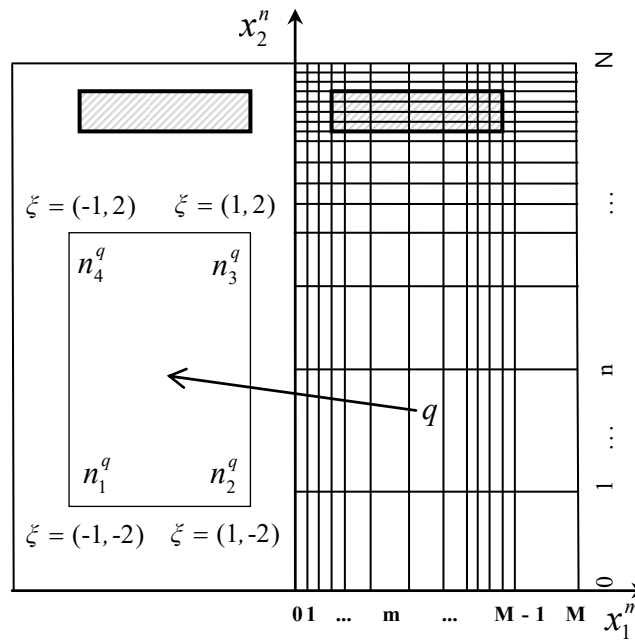


Рис. 3

Задачам (2.1) – (2.5), (2.6) – (2.8) ставляться у відповідність задача на розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) та алгебраїчна задача на власні значення із розрідженими симетричними додатно визначеними матрицями. Ці задачі мають наступний вигляд:

$$Au^0 = \Phi, x \in \bar{\omega}; \quad (3.2)$$

$$Au = \lambda Bu, x \in \bar{\omega}. \quad (3.3)$$

У (3.2), (3.3) u^0 , u – вектори-стовпці значень переміщень і збурень у вузлах різницевої сітки $\bar{\omega}$; Φ – вектор-стовпець значень масової сили у вузлах ω і поверхневої сили у вузлах $x \in \gamma_{\sigma_1}, \gamma_{\sigma_2}$ та значень заданих переміщень у вузлах $x \in \gamma_{u_1}, \gamma_{u_2}$ відповідно до граничних умов задач (2.1) – (2.5), (2.6) – (2.8). У даній задачі масові сили відсутні і відповідні значення компонент вектору Φ дорівнюють нулю. Матриці A, B для врахування граничних умов у переміщеннях відповідним чином корегуються [5]. При цьому, в разі однорідних граничних умов, які мають місце у задачі, що розглядається, зберігається симетричність матриць та залишається незмінною їх розмірність.

Відповідно до концепції базових схем [5] матриці A, B та вектор правої частини Φ задач (3.2), (3.3) отримуються шляхом підсумовування матриць A^q, B^q та векторів Φ^q , що відповідають різницеvim схемам на комірці різницевої сітки $\bar{\omega}$, по усім коміркам $q = \overline{1, Q}$

$$A = \sum_{q=1}^Q A^q, A^q = (A_{ij}^q)_{2 \times 2}; B = \sum_{q=1}^Q B^q, B^q = (B_{ij}^q)_{2 \times 2}; \Phi = \sum_{q=1}^Q \Phi^q, \Phi^q = (\Phi_1^q, \Phi_2^q)^T. \quad (3.4)$$

Матриці A, B є блочними матрицями порядку $2 \times M \times N$ з блоками стрічкової структури порядку $M \times N$ відповідно до кількості вузлів різницевої сітки та розмірності задач. Матриці A^q, B^q є розрідженими матрицями, блоки яких містять ненульові рядки та стовпці, які відповідають вузлам $n^q = \{n_1^q, n_2^q, n_3^q, n_4^q\}$, асоційованим з коміркою q . Це відноситься також до ненульових значень компонент вектора Φ^q . Для ідентифікації вузлів комірки різницевої сітки множині вузлів $n^q = \{n_1^q, n_2^q, n_3^q, n_4^q\}$ ставиться у відповідність множина векторних параметрів $\xi = \{\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4\}$. Компоненти $\xi_i, i = 1, 2$ векторного параметру $\xi^p = \xi = (\xi_1, \xi_2)$ приймають значення $\xi_i = \pm 1$ в залежності від приналежності до певного вузла комірки різницевої сітки. Відповідність між параметрами ξ^p та їх компонентами ξ_i на комірці різницевої сітки показана на рис. 3.

Для практичного застосування при побудові дискретних задач обчислюються приведені базові матриці $a^q = (a_{ij}^q)_{2 \times 2}, b^q = (b_{ij}^q)_{2 \times 2}$ та вектор правої частини $\varphi^q = (\varphi_1^q, \varphi_2^q)^T$ на комірці сітки:

$$a^q = \begin{bmatrix} a_{11}^q & a_{12}^q \\ a_{21}^q & a_{22}^q \end{bmatrix}; b^q = \begin{bmatrix} b_{11}^q & 0 \\ 0 & b_{11}^q \end{bmatrix}; \varphi^q = \begin{pmatrix} \varphi_1^q \\ \varphi_2^q \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Кожний блок базової матриці $a^q = (a_{ij}^q)_{2 \times 2}$ має розмірність 4×4 і вводиться на комірці q сітки наступним чином (індекс q для зручності опущений, сумування по індексах, що повторюються, не проводиться):

$$a_{ii} u_i^0 = \begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i & 0 & -\gamma_i \\ -\beta_i & \alpha_i & -\gamma_i & 0 \\ 0 & -\gamma_i & \alpha_i & -\beta_i \\ -\gamma_i & 0 & -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{in_1}^0 \\ u_{in_2}^0 \\ u_{in_3}^0 \\ u_{in_4}^0 \end{pmatrix}; a_{12} u_2^0 = \begin{pmatrix} \delta & \lambda & -\delta & -\lambda \\ -\lambda & -\delta & \lambda & \delta \\ -\delta & -\lambda & \delta & \lambda \\ \lambda & \delta & -\lambda & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2n_1}^0 \\ u_{2n_2}^0 \\ u_{2n_3}^0 \\ u_{2n_4}^0 \end{pmatrix}; a_{21} = a_{12}^T, \quad (3.6)$$

де

$$\alpha_i = 2 \left(A_{ii} \frac{h_{3-i}}{h_i} + G \frac{h_i}{h_{3-i}} \right); \beta_i = 2A_{ii} \frac{h_{3-i}}{h_i}; \gamma_i = 2G \frac{h_i}{h_{3-i}}, \quad i=1, 2; \quad (3.7)$$

$$\delta = A_{12} + G, \quad \lambda = A_{12} - G.$$

Компоненти базового вектора φ_m^0 на комірці q мають наступний вигляд:

$$\varphi_m^0 = \left(\varphi_m^0(\xi^1), \varphi_m^0(\xi^2), \varphi_m^0(\xi^3), \varphi_m^0(\xi^4) \right), \quad m=1, 2, \quad (3.8)$$

де

$$\varphi_m^0(\xi^p) = 2h_1h_2P_{mi}(\xi^p)/h_i, \quad p=\overline{1, 4}. \quad (3.9)$$

При відсутності масових сил і при однорідних граничних умовах в переміщеннях ненульовими компонентами складової φ_m^0 , $m=1, 2$ базового вектора розмірності 4 будуть дві із чотирьох компонент, які відповідають вузлам комірки, на яких задані ненульові значення однієї із двох складових вектору поверхневої сили. Ці компоненти визначаються векторними параметрами ξ^p , $p=\overline{1, 4}$, які, відповідно до граничних умов (2.2) на ділянці $(x_1 = l_1/2) \wedge (-l_2 \leq x_2 \leq 0)$ границі, приймають значення $\xi^2 = \xi = (1, -2)$, $\xi^3 = \xi = (1, 2)$.

Кожний блок базової матриці $b^q = (b_{ij}^q)_{2 \times 2}$ має розмірність 4×4 і вводиться на комірці q сітки наступним чином (індекс q для зручності опущений):

$$b_{ii}u_i = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{in_1} \\ u_{in_2} \\ u_{in_3} \\ u_{in_4} \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \quad (3.10)$$

де

$$\alpha = \left(\sigma_{jj}^0 + \sigma_{jj}^{\xi_j} \right) \frac{h_{3-j}}{h_j} + 2\text{sign}(\xi_1\xi_2)\sigma_{12}; \quad \beta = - \left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^{\xi_1} \right) \frac{h_2}{h_1} + \text{sign}(\xi_1\xi_2) \left(\sigma_{12}^{\xi_1} - \sigma_{12}^0 \right); \quad (3.11)$$

$$\gamma = - \left(\sigma_{22}^0 + \sigma_{22}^{\xi_2} \right) \frac{h_1}{h_2} + \text{sign}(\xi_1\xi_2) \left(\sigma_{12}^{\xi_2} - \sigma_{12}^0 \right); \quad \delta = -\text{sign}(\xi_1\xi_2) \left(\sigma_{12}^{\xi_1} + \sigma_{12}^{\xi_2} \right).$$

Підсумовування у (3.10) по індексах, що повторюються, не проводиться. Компоненти напружень σ_{ij}^0 визначаються із дискретного аналогу співвідношення (2.4) на основі розв'язку u^0 системи алгебраїчних рівнянь (3.2).

Таким чином, вище представлений підхід до побудови у матрично-векторному вигляді різницевих схем, які відповідають диференційним задачам (2.1) – (2.5), (2.6) – (2.8).

3.2. Обчислювальний алгоритм. Алгоритм чисельного дослідження докритичного стану та стійкості армованих КМ розроблений для проведення розрахунків у обчислювальному середовищі, яке включає локальний ПК та суперкомп'ютер, об'єднаних мережею Internet. На локальному ПК формується дискретна модель та в рамках обчислювального експерименту досліджується практична збіжність розв'язку дискретних задач, визначаються потрібні обчислювальні ресурси щодо застосування традиційних або паралельних комп'ютерів для отримання розв'язків з необхідною точністю. За результатами обчислювального експерименту на локальному ПК розв'язуються задачі

невеликої розмірності на основі послідовних алгоритмів розв'язку СЛАР і алгебраїчної задачі на власні значення та здійснюється препроцесинг даних для їх передачі на відповідний обчислювальний вузол суперкомп'ютера для проведення обчислень на основі паралельних алгоритмів. Для розв'язання СЛАР застосовується метод Холецкого [7 – 9], для розв'язання задачі на власні значення – метод ітерацій на підпросторі [6, 24]. Паралельні алгоритми стороннього програмного забезпечення реалізовані на основі технології MPI [25] для комп'ютерів MIMD архітектури та технологій MPI і CUDA [26] для гібридних комп'ютерів MIMD/SIMD архітектури. На сьогодні найбільш продуктивними є суперкомп'ютери гібридної архітектури, що поєднують обчислення на багатоядерних комп'ютерах MIMD-архітектури (CPU) з прискоренням обчислень на графічних процесорах (GPU).

Таким чином, обчислювальний алгоритм розв'язання задачі визначення початкового стану (2.1) – (2.5) і задачі стійкості (2.6) – (2.8) у зазначеному обчислювальному середовищі на основі підходу до побудови дискретної моделі, представленому у попередньому розділі, включає наступні етапи:

побудова дискретної моделі у частині формування матриці A та вектору Φ відповідно до співвідношень (3.4) – (3.9) і препроцесинг даних щодо необхідного формату представлення матриці A та вектору Φ для їх передачі на суперкомп'ютер для паралельних обчислень;

розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (3.2) на основі послідовного або паралельного алгоритму методу Холецкого;

обчислення компонент напружень σ_{ij}^0 на основі отриманих значень компонент переміщень u_i^0 відповідно до дискретного аналогу співвідношень (2.4), (2.5), побудова дискретної моделі у частині формування матриці B відповідно до співвідношень (3.4), (3.10), (3.11) та препроцесинг даних щодо необхідного формату представлення матриці B для паралельних обчислень;

розв'язання алгебраїчної задачі на власні значення (3.2) на основі послідовного або паралельного алгоритму методу ітерування підпростору та обчислення критичних навантажень відповідно до співвідношення (2.9).

У даній роботі розрахунки на основі паралельних алгоритмів проведені на обчислювальному вузлі суперкомп'ютера СКІТ [27] (один обчислювальний вузол, два восьмиядерних процесора Xeon E5 2600, 2 GPU Tesla M2075). Оцінка ефективності застосованих алгоритмів є порівняною із результатами для базової моделі, яка відповідає випадку одного волокна у матриці [23].

§4. Результати розв'язку задачі.

Результати отримані для розрахункової моделі, представленої на рис. 2. Розрахунки проводилися для наступних механічних та геометричних характеристик КМ (індекс « a » відноситься до волокна, індекс « m » – до матриці): відношення модулів Юнга волокна і матриці $E_a E_m^{-1} = 100$; коефіцієнти Пуассона $\nu_a = \nu_m = 0,3$; коефіцієнт форми волокна $m_1 / m_2 = 100$; безрозмірна відстань $r_1^* = r_1 / m_1$ між волокнами набувала значень 0,02; 0,06; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,0; безрозмірна відстань $r_2^* = r_2 / m_1$ між волокнами і вільною поверхнею приймала значення 0; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 1,0; 2,0.

У наступних підрозділах представлена графічна інформація щодо розподілення безрозмірних переміщень $u_2^*(x_1^*) = u_2(x_1^*) / u_2^{\max}$ та розподілення безрозмірних зрушень переміщень $u_2^*(x_1^*) = u_2(x_1^*) / u_2^{\max}$ (форми втрати стійкості) для різних значень відстані r_1^* між волокнами та відстані r_2^* волокон до вільної поверхні матеріалу. Графіки побудовано для горизонтальних перерізів волокон: $x_2 = -r_2$, $-(r_2 + m_2/2)$, $-(r_2 + m_2)$ для області

$$\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq r_1 + 3/2 m_1; -(r_2 + m_2) \leq x_2 \leq -r_2\}.$$

Відповідні криві на рис. 5 – 7 позначені як 1, 2, 3. Із урахуванням симетрії відносно осі Ox_2 отриманих значень для розподілення переміщень у докритичному стані та збурень переміщень графічна інформація наведена для області $0 \leq x_1 \leq r_1 + 3/2 m_1$. У

приведених вище виразах u_2^{\max} , $u_2^{\max 0}$ – максимальні значення переміщень і збурення переміщень у вказаній області, $x_1^* = (x_1 / m_1)$ – безрозмірна координата.

4.1 Аналіз результатів визначення докритичного стану КМ. У роботі [20] представлено результати дослідження докритичного напружено-деформованого стану для одного приповерхневого волокна у матриці. Показано, що під дією стискаючого навантаження в композитному матеріалі, армованому коротким волокном біля вільної граничної поверхні, виникає несиметричний докритичний стан, який призводить до початкового викривлення волокна.

У разі, коли відстань від поверхні до волокна досить велика ($r_2^* = 15$), характер розподілу переміщень $u_2^*(x_1^*)$ у волокні для перерізів $x_2 = -r_2, -(r_2 + m_2)$ відносно власної осі є симетричним, тоді як викривлення самої осі волокна для перерізу $x_2 = -(r_2 + m_2/2)$ практично відсутнє (рис. 4, б). У тому випадку, коли волокно знаходиться на поверхні ($r_2^* = 0$), відбувається викривлення волокна разом з граничною поверхнею, при цьому спостерігається викривлення осі волокна у бік області, не заповненої матеріалом матриці (рис. 4, а).

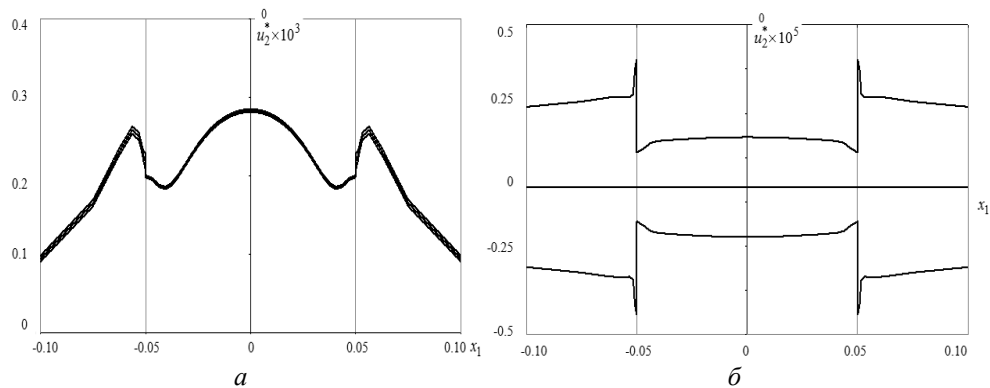


Рис. 4

Несиметричність початкового стану відносно власної осі волокна, очевидно, обумовлена взаємним впливом волокна і вільної граничної поверхні під дією стискаючого навантаження. При цьому спостерігається симетричність початкового напружено-деформованого стану відносно осі, яка проходить через середину волокна нормально до вільної поверхні.

У разі достатньо віддалених одне від одного приповерхневих волокон спостерігається аналогічна картина. Так, на рис. 5 показано розподілення переміщень $u_2^*(x_1^*)$ у випадку двох приповерхневих волокон у матриці для області

$$\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq r_1 + 3/2 m_1; -(r_2 + m_2) \leq x_2 \leq -r_2\}$$

при відстані $r_1^* = 2,0$ між волокнами: рис. 5, а – для значення $r_2^* = 0$ відстані волокна до поверхні; рис. 5, б – для значення $r_2^* = 2$.

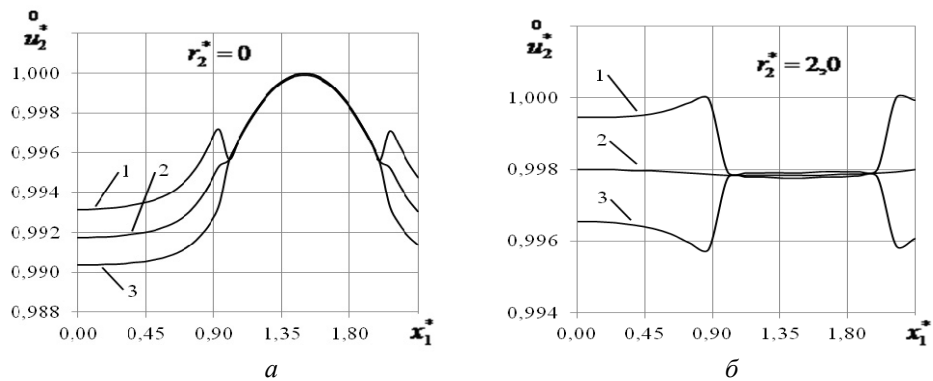


Рис. 5

Однак, при зменшенні відстані між волокнами втрачається симетричність початкового напружено-деформованого стану відносно осі, яка проходить через середину волокна нормально до вільної поверхні. Так, на рис. 6 показано розподілення переміщень $u_2^0(x_1^*)$ при відстані $r_1^* = 0,25$ між волокнами: рис. 6, а – для значення $r_2^* = 0$ відстані волокна до поверхні; на рис. 6, б – для значення $r_2^* = 2$.

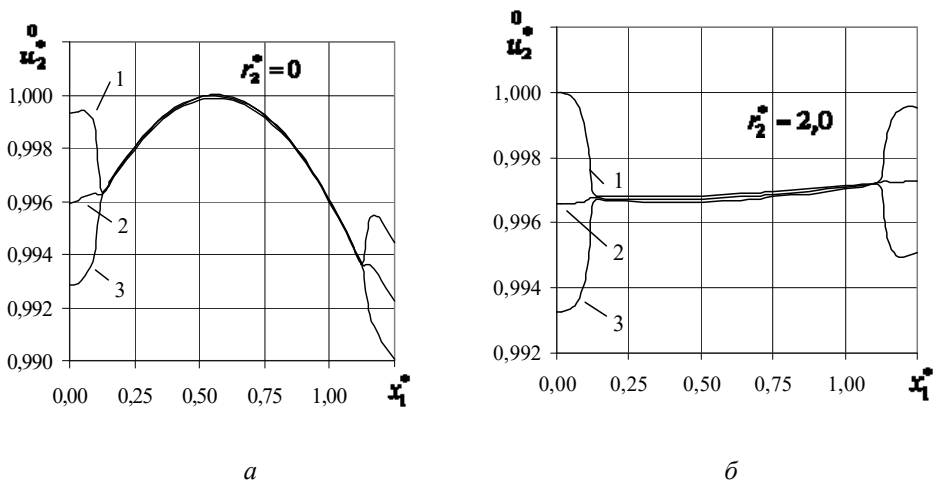


Рис. 6

Це відбувається внаслідок того, що сумісно із вигином волокон відбувається їх поворот. При цьому у більшій мірі це стосується волокон, які знаходяться на поверхні, що обумовлено їх взаємодією із поверхнею та між собою (рис. 4, а). У той же час вказана несиметричність для віддалених від поверхні волокон обумовлена тільки їх взаємодією і має менш виражений характер.

Таким чином, як з'ясовано вище, під дією стискаючого навантаження в КМ, армованому короткими волокнами поблизу вільної граничної поверхні, виникає несиметричний докритичний напружено-деформований стан як відносно власної осі волокна, так і відносно осі, яка проходить через середину волокна нормально до вільної поверхні КМ, що призводить до початкового викривлення волокна. Таке початкове викривлення армуючих елементів (волокон) може стати причиною руйнування КМ, коли величина докритичної деформації перевищуватиме межу міцності матеріалу. Ступінь проявлення цього механізму руйнування КМ залежить від механічних характеристик компонентів КМ та їх розміщення відносно вільної поверхні КМ і відносно одна одної.

При дослідженні руйнування КМ цей механізм потрібно враховувати спільно з механізмами руйнування, які пов'язані із втратою стійкості у внутрішній структурі КМ.

4.2 Аналіз результатів визначення критичних параметрів стійкості КМ. У роботі [17] для випадку двох послідовно розміщених коротких волокон у нескінченній матриці (розрахункова модель на рис. 1, б) представлені «уявні» форми втрати стійкості у внутрішній структурі КМ. Ця модель може вважатись близькою (інакше – спорідненою, як це визначено у розділі 1) до моделі для двох приповерхневих волокон у напівнескінченній матриці при віддаленні волокон від вільної поверхні і результати дослідження стійкості за цими двома моделями можуть бути використані для сумісного аналізу механізмів руйнування КМ. Вказані форми є наступними. Згинальна форма втрати стійкості *a*) відповідає випадку, коли кожний армуючий елемент втрачає стійкість як би майже без взаємодії з іншим армуючим елементом. Форма втрати стійкості *b*) відповідає випадку, коли виникає майже жорсткий поворот кожного волокна; такий випадок реалізується для досить жорсткого матеріалу волокон, коли матриця не забезпечує належної підтримувальної дії і при втраті стійкості на торцях як би утворюється «шарнір», близький до пластичного шарніру. Схема *c*) відповідає випадку, коли два волокна втрачають стійкість як би по «одній згинальній формі» (загальна згинальна форма втрати стійкості). Схема *d*) відповідає випадку, коли два волокна втрачають стійкість як би при порівняно жорсткому взаємному повороті сусідніх волокон з деяким згином; такий випадок реалізується для досить жорсткого матеріалу волокон, коли матриця між волокнами не забезпечує належної підтримувальної дії і при втраті стійкості між волокнами як би виникає «шарнір», близький до пластичного шарніру.

У роботі [17] показано, що для випадку двох послідовно розміщених коротких волокон у нескінченній матриці при зменшенні відстані між волокнами послідовно реалізуються форми втрати стійкості, які близькі до «уявних» форм втрати стійкості *c*) – «загальна згинальна форма втрати стійкості» і форми *d*) – «взаємний поворот із вигином», показаних на рис. 1, б. Цим формам відповідає розподілення збурень переміщень $u_2^*(x_1^*)$, представлених на рис. 7, *a* – для значення $r_1^* = 0,001$ відстані між волокнами і рис. 7, *б* – для значення $r_1^* = 1,0$.

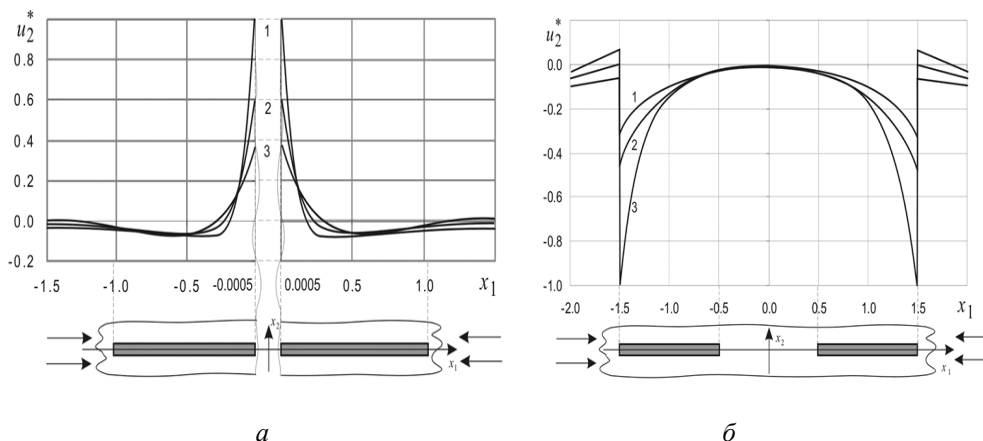
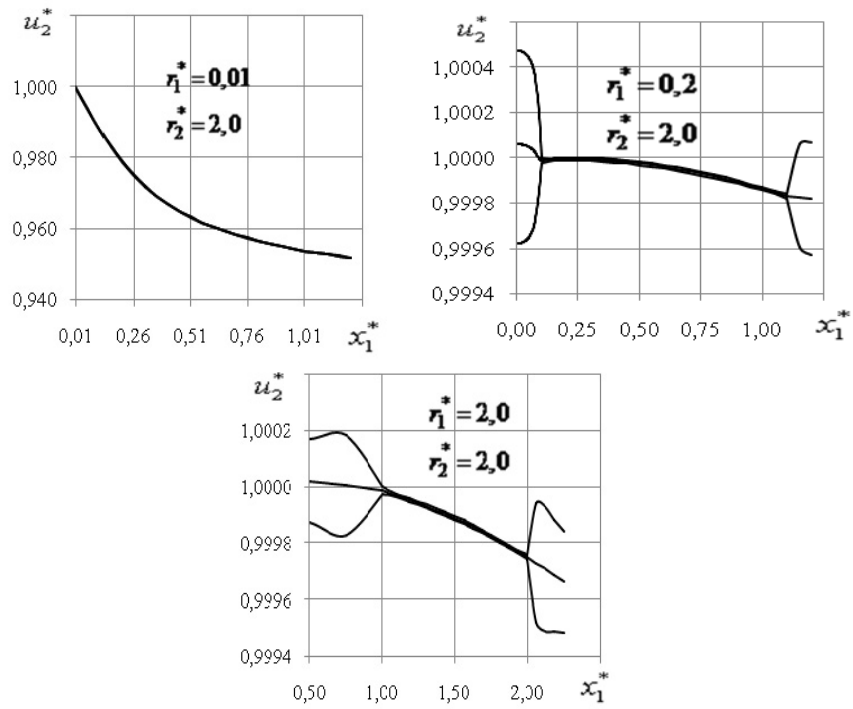


Рис. 7

Аналогічний результат спостерігається для віддалених від вільної поверхні волокон. На рис. 8 ці форми відповідають графікам для значень $(r_1^* = 2,0; r_2^* = 2,0)$ і $(r_1^* = 0,01; r_2^* = 2,0)$.



Puc. 8

$r_1^* \ r_2^*$	0,02	0,06	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0
0							
0,05							
0,1							
0,2							
0,3							
0,5							
1,0							
2,0							

Puc. 9

Наближення взаємодіючих волокон до вільної поверхні КМ певним чином впливає на характер проявлення вказаних форм втрати стійкості і вказана послідовність, як показують результати проведеного у даній роботі дослідження, проявляється лише у певному діапазоні значення відстані волокон від вільної поверхні. У загальному випадку при наближенні до вільної поверхні реалізуються форми втрати стійкості, які відповідають жорсткому повороту волокон з подальшою зміною напрямку згину відносно осі волокна та зміною напрямку повороту відносно осі, яка проходить через середину волокон нормально до вільної поверхні КМ. На рис. 9 наведена в умовних позначеннях із збереженням масштабу інформація щодо форм втрати стійкості для різних значень r_1^* і r_2^* для перерізу $x_2 = -(r_2 + m_2 / 2)$ області

$$\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq r_1; -(r_2 + m_2) \leq x_2 \leq -r_2\}.$$

Висновки.

Отримані результати дозволяють зробити наступні висновки.

Під дією стискаючого навантаження в КМ, армованому приповерхневими короткими волокнами, виникає несиметричний докритичний напружено-деформований стан як відносно власної осі волокна, так і відносно осі, яка проходить через середину волокна нормально до вільної поверхні КМ. Це призводить до початкового викривлення волокна, яке може стати причиною руйнування КМ, коли величина докритичної деформації перевищуватиме межу міцності матеріалу у структурі КМ.

Форми втрати стійкості суттєво залежать від розташування волокон у матриці, що певним чином може впливати на механізми руйнування, пов'язані із втратою стійкості КМ. Для волокон, розташованих на поверхні, має місце згинальна форма втрати стійкості, яка практично не змінюється при зближенні волокон. При віддаленні від вільної поверхні мають місце втрата стійкості у формі повороту із згином та жорсткого взаємного повороту волокон. При зміні відстані між волокнами змінюється напрямок повороту та вигину.

При математичному моделюванні задач стійкості КМ, армованих короткими волокнами, застосування паралельних алгоритмів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь та алгебраїчних задач на власні значення на базі суперкомп'ютерних технологій забезпечує можливість отримання з необхідною точністю розв'язку дискретних задач великої розмірності при ефективному використанні обчислювальних ресурсів.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетних програм: «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» та «Математичне моделювання у міждисциплінарних дослідженнях процесів та систем на основі інтелектуальних суперкомп'ютерних, грид- і хмарних технологій» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Отримано чисельний розв'язок задачі визначення втрати стійкості в структурі композитного матеріалу, слабоармованого приповерхневими короткими волокнами при стиску вздовж напрямку армування. Використано основні співвідношення тривимірної лінеаризованої теорії стійкості в рамках моделі кусково-однорідного середовища. Досліджено докритичний стан, пов'язаний з початковим викривленням волокон, і встановлена залежність форм втрати стійкості в структурі композитного матеріалу від розташування волокон відносно вільної поверхні і від відстані між сусідніми волокнами. Для чисельного розв'язання задачі використано метод сіток на основі модифікованого варіаційно-різницевого підходу. Застосовані послідовні і паралельні алгоритми методів Холецького та ітерування підпростору.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: приповерхневі короткі волокна, форма втрати стійкості, кусково-однорідна модель, тривимірний лінеаризована теорія стійкості, чисельний підхід, паралельний алгоритм.

1. Бистров В.М., Декрет В.А., Зеленський В.С. Втрата стійкості композитного матеріалу, слабо армованого приповерхневими короткими волокнами // Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – 2020. – Вип. 31. – С. 19 – 30.
2. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища школа, 1986. – 512 с.
3. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. (Т.1. Разрушение в структуре материала. – 592 с. Т.2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.). – Киев: «ЛИТЕРА», 2008.
4. Гузь А.Н., Декрет В.А. Модель коротких волокон в теории устойчивости композитов. – Saarbrücken: LAP Lambert acad. publ., 2015. – 315 с.
5. Механика композитов (под ред. А.Н. Гузя): в 12-и томах. Т.11. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.В., Василенко А.Т. и др. Численные методы. – Киев: «А.С.К.», 2002. – 448 с.
6. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – Москва: Мир, 1983. – 384 с.
7. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – Москва: Мир, 1988. – 410с.
8. Попов А.В., Химич А.Н. Параллельный алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений с ленточной симметричной матрицей // Компьютерная математика. – 2005. – № 2. – С. 52 – 59.
9. Химич О.М., Баранов А.Ю. Гібридний алгоритм розв'язування лінійних систем зі стрічковими матрицями прямими методами // Компьютерная математика. – 2013. – Вып. 2. – С. 80 – 87.
10. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. – Киев: Наук. думка, 2008. – 247 с.
11. Bystrov V.M., Dekret V.A., Zelenskii V.S. Loss of Stability in a Composite Laminate Compressed by a Surface Load // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 156 – 163.
12. Bystrov V.M., Dekret V.A., Zelenskii V.S. Numerical Analysis of the Edge Effect in a Composite Laminate with Compressed Reinforcement Plies // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 561 – 566.
13. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin: Springer-Verlag Heilberg, 1999. – 555 p.
14. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). II. // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 3. – P. 239 – 295.
15. Guz A.N., Dekret V.A. On Two Models in Three-Dimensional Theory of Stability of Composite Materials // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 8. – P. 839 – 854.
16. Guz A.N., Dekret V.A. Finite-Fiber Model in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composites (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 1 – 48.
17. Guz A.N., Dekret V.A., Kokhanenko Yu.V. Two-dimensional Stability Problem for Two Interacting Short Fiber Model in Composite: In-line Arrangement // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 9. – P. 994 – 1001.
18. Guz A.N., Kokhanenko Yu.V. Numerical Solution of Three-Dimensional Stability Problems for Elastic body // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 11. – P. 1369 – 1399.
19. Guz A.N., Lapusta Yu.N. Three-Dimensional Problems of the Near-surface Instability of Fiber Composites in Compression (Model of Piecewise Uniform Medium) (Survey) // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, N 7. – P. 641 – 670.
20. Dekret V.A. Near-Surface Instability of Composite Materials Weakly Reinforced with Short Fibers // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 6. – P. 609 – 625.
21. Dekret V.A., Zelenskii V.S., Bystrov V.M. Numerical Analysis of the Stability of a Laminated Composite with Uniaxially Compressed Reinforcement Plies // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 549 – 557.
22. Harich J., Lapusta Y., Wagner W. 3D FE-modeling of surface and anisotropy effects during micro-buckling in fiber composites // Compos. Struct. – 2009. – **89**, N 4. – P. 551 – 555.
23. Khimich A.N., Dekret V.A., Popov A.V., Chistyakov A.V. Numerical Study of the Stability of Composite Materials on Computers of Hybrid Architecture // J. of Automation and Information Sci. – 2018. – **50**, N 7. – P. 7 – 24.
24. Khimich A.N., Popov A.V., Chistyakov O.V. Hybrid algorithms for solving the algebraic eigenvalue problem with sparse matrix // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. – **53**, N 6. – P. 132 – 146.
25. <https://www.open-mpi.org/>
26. <https://docs.nvidia.com/>
27. <http://icybcluster.org.ua/>

Надійшла 23.12.2020

Затверджена до друку 24.06.2021