

О. П. Жук¹, В. Д. Кубенко¹,
Я. О. Жук², І. В. Янчевський³

ТИСК ЗВУКОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НА ТВЕРДУ СФЕРУ В ЗАПОВНЕНІЙ РІДИНОЮ ПОДАТЛИВІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ТРУБЦІ

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

²Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
просп. Глушкова, 4е, 01033, Київ, Україна; e-mail: y.zhuk@i.ua;

³Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
просп. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua

Abstract. A statement of the problem of determination of the acoustic radiation force acting on the rigid spherical particle is formulated. The particle is located in the fluid filled thin flexible tube. The problem is solved by the use of the method of separation of variables, translational addition theorems for spherical wave functions, and expressions of reciprocal expansions of spherical wave functions through the cylindrical ones and vice versa. The problem of determination of the wavefield potential is reduced to the solution of the infinite system of algebraic equations arising when the boundary conditions are met. The characteristics of the acoustic radiation force are studied depending on the primary wave frequency, the radius of the rigid spherical particle, the radius of the compliant cylindrical elastic tube, properties of the filling liquid, thickness of the tube wall, and elastic properties of the tube material. It is found that the acoustic radiation force behavior is non-monotonic. Both magnitude and direction of the force can vary significantly.

Key words: compliant thin tube, ideal compressible liquid, rigid spherical particle, acoustic radiation force.

Вступ.

В потужному звуковому полі тиск звукового випромінювання (радіаційний тиск) обумовлює значну дію на середовище, в якому реалізується хвиля, на сторонні включення та інше. Дослідження тиску звукового випромінювання акустичної хвилі мають давню традицію [10, 13]. Вони продовжуються і до даного часу [1, 3, 4, 8, 12, 14], що свідчить про важливість як для теоретичного так і для практичного використання цього явища: визначення інтенсивності звукового поля [4], використання коагуляції аерозольних частинок для очищення газу [7], застосування акустичної левітації – дії радіаційних сил на об'єкт без фізичного контакту – в процесах безтигельного варіння скла, вирощування кристалів, в космічних технологіях при невагомості. Результати досліджень тиску звукового випромінювання в податливих (еластичних) трубках можуть бути використані в медицині при дослідженнях дії пульсових хвиль в артеріях.

Акустичний радіаційний тиск – квадратична величина відносно змінних звукового поля. При стоячій хвилі або поширенні звукових хвиль як в необмеженому, так і в обмеженому середовищах з різними границями для обчислення радіаційного тиску застосовуються різні підходи і методи [9, 10, 12 – 15, 18, 19 та ін.]. В подальшому для дослідження дії радіаційної сили на сферичну частинку у податливій (еластичній) заповненій рідиною циліндричній трубці використовуватимемо метод [10], що розвинутий для дослідження дії радіаційного тиску на тверду сферу [16] і на рідку сферичну краплю [17] в циліндричній трубці з твердими стінками, заповненій ідеальною рідиною.

Зауважимо, що метод з [10], розроблений для випадку ідеальної рідини, узагальнений на випадок в'язкої рідини [1, 3].

У відповідності з цим методом радіаційний тиск визначається середньою за часом величиною звукового тиску на поверхню перепони. У зв'язку з цим при визначенні звукового тиску в рідині необхідно враховувати величини, які є квадратичними за змінними поля. При цьому зазначимо, що обчислення акустичного тиску з точністю до величин другого порядку малості можна виконати, використавши потенціал поля швидкості в рідині, визначений при розв'язуванні лінійної задачі розсіяння первинної хвилі на перепонах [10, 16, 17].

Дослідження дії радіаційної сили звукового поля на тверду сферичну частинку в заповненій ідеальною рідиною тонкостінній податливій циліндричній трубці розділимо на два етапи. Перший етап – дослідження закономірностей взаємодії гармонічної акустичної хвилі з перешкодами: твердою сферою і внутрішньою поверхнею циліндричної трубки – розв'язок лінійної задачі розсіяння первинної хвилі. Другий етап – на основі результатів, одержаних на першому етапі, проведення обчислення гідродинамічних сил, які діють на сферичну частинку, з наступним осередненням їх в часі. Використовуючи отримані формули, досліджуються характеристики акустичної радіаційної сили в залежності від частоти первинної хвилі, радіусу твердої сферичної частинки, радіусу циліндричної податливої трубки, властивостей заповнюючої рідини, товщини стінки та пружних властивостей матеріалу трубки.

§1. Постановка задачі визначення потенціалів поля швидкості.

Розглянемо випадок реалізації у вузькій циліндричній трубці плоскої поздовжньої стоячої звукової хвилі, в якій складові руху рідини, паралельні осі трубки, мають значно більшу кінетичну енергію ніж складові, перпендикулярні цій осі. Для таких хвиль у вузьких трубках існує критичне значення частоти, яке відповідає довжині хвилі, що дорівнює радіусу трубки [5, 11].

Постановку лінійної задачі першого етапу дослідження – одержання потенціалів хвильового поля в трубці – сформулюємо при умові, що властивості рідини, а також механічні властивості трубки поздовжньо однорідні. В такому випадку маємо те ж саме одномірне рівняння, яке описує плоскі звукові хвилі в необмеженій рідині [11]. Відмінність буде лише у величинах швидкостей поширення хвиль. Це обумовлено тим, що ефективна стисливість рідини в трубці є сума істинної стисливості рідини і розтягу трубки (відносного збільшення густини рідини і відносного збільшення площі поперечного перетину трубки на одиницю збільшення тиску) [11].

Дослідження виконаємо для випадку циліндричної трубки, радіус якої R_0 при відсутності в ній тиску, при товщині стінки трубки δ . Матеріал трубки має модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона ν . Трубка заповнена ідеальною стисливою рідиною густиною ρ_0 , швидкість звуку в якій c_0 . В трубці знаходиться тверда сферична частинка радіуса r_0 з центром на її осі.

Введемо циліндричну систему координат (R, φ, z) , вісь Oz якої направимо вздовж осі трубки, а початок координат виберемо в центрі сферичної частинки. Введемо також сферичну систему координат (r, φ, θ) (рис. 1).

Розглянемо усталений в часі хвильовий процес – плоску стоячу хвилю, яка описується потенціалом

$$\Phi_0 = A \exp[i(kz - \omega t)]. \quad (1.1)$$

Потенціал звукової хвилі Φ у відповідності з прийнятим методом дослідження є розв'язком рівняння

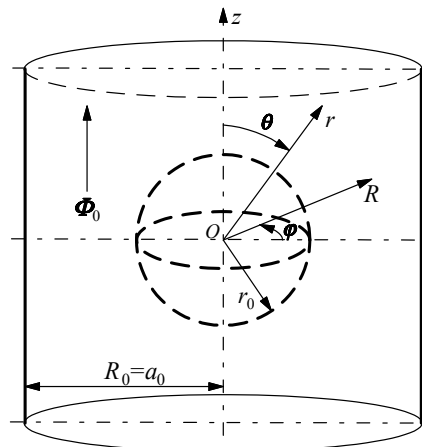


Рис. 1

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.2)$$

У формулах (1.1) і (1.2) позначено: A – амплітуда; $k = \omega/c$ – хвильове число; ω – кутова частота; t – час; Δ – диференціальний оператор Лапласа; c – швидкість плоскої хвилі в рідині, яка заповнює податливу (еластичну) трубку. Зазначимо, що швидкість c плоскої хвилі в трубці відмінна від швидкості плоскої хвилі в необмеженій рідині і обчислюється за формулою [5, 11]

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2R_0/(\delta E' \beta_0)}}, \quad (1.3)$$

в якій $E' = E/(1 - \nu^2)$; $\beta_0 = 1/(\rho c_0^2)$ – стисливість рідини; R_0 – радіус трубки при відсутності в ній тиску, обумовленого звуковою хвилею.

В лінійній теорії швидкість рідини і тиск в ній, обумовлені звуковою хвилею, визначаються відповідно формулами:

$$v = \text{grad } \Phi; \quad p = -\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (1.4)$$

В дослідженні використовуватимемо знерозмірені величини, які обчислимо відносно радіуса трубки і параметрів рідини, що її заповнює:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{R}{R_0}; \quad \bar{r} = \frac{r}{R_0}; \quad \bar{t} = \frac{tc_0}{R_0}; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega R_0}{c_0}; \quad \bar{v} = \frac{v}{c_0}; \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{R_0 c_0}; \\ \bar{p} &= \frac{p}{R_0 c_0^2}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R_0}; \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{R_0}; \quad \bar{R}_0 = 1; \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В подальшому використовуватимемо тільки знерозмірені величини, тому риску в позначеннях величин не пишемо. В знерозмірених величинах потенціал (1.1) буде мати такий вигляд

$$\Phi_0 = F(\omega) \exp[i\omega(\eta z - t)], \quad (1.6)$$

де $\eta = 1/c$.

Для амплітудної частини потенціалу гармонічних хвиль із хвильового рівняння (1.2) одержуємо рівняння Гельмгольца

$$\Delta\Phi + (\eta\omega)^2 \Phi = 0, \quad (1.7)$$

а формули (1.4) для обчислення швидкості і тиску в рідині трубки будуть мати такий вигляд:

$$p = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}; \quad v = \text{grad } \Phi. \quad (1.8)$$

Потенціал хвильового поля в трубці формується в результаті інтерференції первинної хвилі (1.6) і хвиль, розсіяних на твердій сфері і відбитих від стінки трубки. Тому потенціал хвильового поля в трубці має такий вигляд:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_{sph} + \Phi_{cyl}. \quad (1.9)$$

У формулі (1.9) Φ_{sph} – потенціал хвилі, відбитої від сферичної частинки; Φ_{cyl} – потенціал хвилі, відбитої від еластичної стінки трубки; Φ – потенціал хвильового поля в трубці.

Знаходження потенціалів цих хвиль зводиться до розв'язування багатозв'язної лінійної задачі дифракції хвилі (1.6) на твердій сфері і на внутрішній поверхні податливої (еластичної) трубки – розв'язування рівняння Гельмгольца (1.7).

Для рівняння (1.7) сформулюємо граничні умови. На поверхні нерухомої твердої сфери нормальна швидкість рідини дорівнює нулю

$$v_r = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (1.10)$$

На внутрішній поверхні податливої (еластичної) трубки гранична умова повинна відображати рівність радіальної швидкості $\partial \Phi / \partial R$ рідини і радіальної швидкості внутрішньої поверхні стінок трубки $\dot{R}(t)$, де $R(t)$ внутрішній радіус трубки в момент t . В лінійній теорії цю граничну умову можна записати як

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|_{R=R_0} = \dot{R}(t), \quad (1.11)$$

оскільки будь яка різниця в значеннях $\partial \Phi / \partial R$ при $R = R(t)$ і при $R = R_0$ менша ніж

$$|R(t) - R_0| \max \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right|,$$

а тому нею можна в лінійній теорії знехтувати як добутком малих величин [11].

Потенціал Φ_{sph} розсіяних на сфері хвиль повинен задовольняти також умовам випромінювання Зоммерфельда на нескінченності

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{d\Phi_{sph}}{dr} - i\omega \Phi_{sph} \right) = 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_{sph} = 0. \quad (1.12)$$

Оскільки рідина обмежена стінками трубки, то потенціал Φ_{cyl} відбитої від внутрішньої поверхні трубки хвилі також повинен бути обмеженим:

$$\Phi_{cyl} \rightarrow \text{const} \quad \text{якщо} \quad R \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

§2. Побудова потенціалів хвильового поля в трубці.

Визначимо потенціали, приведені у формулі (1.9), розв'язавши багатозв'язну задачу для рівняння (1.7) з граничними умовами (1.10), (1.11) на поверхні сферичної частинки і на внутрішній поверхні трубки. Вказані потенціали повинні задовольняти умовам Зоммерфельда на нескінченності (1.12) і бути обмеженими (1.13).

Потенціали Φ_{sph} і Φ_{cyl} знайдемо при розв'язуванні рівняння (1.7) методом розділення змінних у відповідних системах координат (сферичній і циліндричній). Множину розв'язків Φ_{sph} виберемо у вигляді узагальнених рядів Фур'є за сферичними хвильовими функціями

$$\Phi_{sph}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(\eta \omega r) P_n(\cos \theta), \quad (2.1)$$

а множину розв'язків Φ_{cyl} – у вигляді інтеграла

$$\Phi_{cyl}(R, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0 \left(\sqrt{(\eta \omega)^2 - \xi^2} R \right) e^{i\xi z} d\xi. \quad (2.2)$$

У формулах (2.1) і (2.2) $h_n^{(1)}(\cdot)$ – сферичні функції Ганкеля першого роду n -го порядку; $P_n(\cdot)$ – поліноми Лежандра; $J_0(\cdot)$ – циліндрична функція Бесселя нульового порядку; A_n – невідомі сталі; $B(\xi)$ – невідома густина; ξ – стала розділення. В (2.1) і (2.2) множник $\exp(-i\omega t)$ не приведено.

Із множини розв'язків (2.1) і (2.2) рівняння (1.7) виберемо такі, які задовольняють граничним умовам (1.10) і (1.11). Зазначимо, що множини розв'язків (2.1) і (2.2) вибрані такими, що задовольняють граничним умовам на нескінченності (1.12) і на осі трубки (1.13).

Складові потенціали (1.6), (2.1) і (2.2) потенціалу (1.9) поля швидкості рідини в трубці одержані в системах координат, зв'язаних зі сферою і з циліндричною трубою. Щоб задовольнити граничним умовам на поверхні конкретного тіла необхідно записати загальний потенціал Φ в системі координат, зв'язаній з цим тілом [2,6]. Таким чином, щоб використати умову (1.10) на поверхні сферичної частинки необхідно потенціал Φ (1.9) (його складові потенціали (1.6) і (2.2)) записати у сферичній системі координат (r, φ, θ) . Відповідно, щоб використати граничну умову (1.11) на внутрішній стінці трубки, необхідно записати потенціал (1.9) (його складові потенціали (1.6) і (2.1)) у циліндричній системі координат (R, φ, z) . Для цього використаємо співвідношення [2, 6], за допомогою яких циліндричні хвильові функції виразимо через сферичні і навпаки.

$$h_n^{(1)}(\eta\omega r)P_n(\cos\theta) = \frac{i^{-n}}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} P_n\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) H_0\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2} R\right) e^{i\xi z} d\xi; \quad (2.3)$$

$$e^{i\xi z} J_0\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2} R\right) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) P_n\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) j_n(\eta\omega r) P_n(\cos\theta). \quad (2.4)$$

У формулі (2.3) $H_0(\cdot)$ – циліндрична функція Ганкеля нульового порядку.

За допомогою співвідношення (2.3) потенціал (2.1), представлений у сферичній системі координат, запишемо в циліндричній системі координат, зв'язаній з циліндром,

$$\Phi_{sph}(R, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2} R\right) e^{i\xi z} d\xi; \quad A(\xi) = \frac{1}{2\eta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_n i^{-n} P_n\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right). \quad (2.5)$$

Співвідношення (2.4) дозволяє потенціал (2.2), представлений в циліндричній системі координат, записати у сферичній системі координат, зв'язаній зі сферичною частинкою,

$$\Phi_{cyl}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(\eta\omega r) P_n(\cos\theta); \quad B_n = i^n (2n+1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_n\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) d\xi. \quad (2.6)$$

Потенціал Φ_0 стоячої плоскої хвилі (1.1), яка реалізується в циліндричній трубці, запишемо у вигляді узагальненого ряду Фур'є за сферичними хвильовими функціями [16, 17]

$$\Phi_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F(\omega) i^n (2n+1) j_n(\eta\omega r) P_n(\cos\theta). \quad (2.7)$$

Отже, використовуючи співвідношення (1.6), (2.2) і (2.5) потенціал хвильового поля в трубці (1.9) в циліндричній системі координат (R, φ, z) запишемо в такому вигляді:

$$\Phi(R, z) = F(\omega)e^{i\eta\omega z} + \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi)H_0\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2}R\right)e^{i\xi z}d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi)J_0\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2}R\right)e^{i\xi z}d\xi. \quad (2.8)$$

У сферичній системі координат (r, φ, θ) він буде мати наступний вигляд:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[F(\omega)i^n (2n+1)j_n(\eta\omega r) + A_n h_n^{(1)}(\eta\omega r) + B_n j_n(\eta\omega r) \right] P_n(\cos\theta). \quad (2.9)$$

При виведенні формули (2.9) використано співвідношення (2.1), (2.6) і (2.7). У формулах (2.8) і (2.9) для потенціалу Φ множник $\exp(-i\omega t)$ не приведено.

В граничній умові (1.11) врахована радіальна швидкість коливання внутрішньої поверхні стінки трубки під дією тиску рідини. Радіальні переміщення поверхні обумовлені зміною в часі окружного зусилля, яке розтягує стінку трубки в поперечному напрямі, змінюючи радіус трубки. Якщо виділити кільце трубки довжиною $l=1$ (товщина стінки δ), то, як легко показати, радіальне переміщення $u_r = R(t) - R_0$ точок стінки трубки буде визначатися в знерозміреному вигляді формулою

$$u_r = \frac{p}{\delta E'}. \quad (2.10)$$

Отже, граничну умову (1.11), беручи до уваги сказане вище, запишемо так:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|_{R=R_0} = \frac{1}{\delta E'} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Використовуючи потенціал (2.8) і формулу (1.9), представимо (2.11) при $z=0$ в такому вигляді:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left[A(\xi)H_1\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2}\right) + B(\xi)J_1\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2}\right) \right] \sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2} d\xi = \\ & = \frac{\omega^2}{\delta E'} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F(\omega) \frac{1}{\pi(1+\xi^2)} + A(\xi)H_0\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2}\right) + B(\xi)J_0\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2}\right) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В (2.12) використано співвідношення

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{1+\xi^2}. \quad (2.13)$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} C(\omega, \xi) &= H_1\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2}\right) \sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2} - H_0\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2}\right) \frac{\omega^2}{\delta E'}; \\ D(\omega, \xi) &= J_1\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2}\right) \sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2} - J_0\left(\sqrt{(\eta\omega)^2 - \xi^2}\right) \frac{\omega^2}{\delta E'}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тоді із (2.12), використавши (2.14), маємо для граничної умови (2.11) таке співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[A(\xi)C(\omega, \xi) + B(\xi)D(\omega, \xi) - F(\omega) \frac{\omega^2}{\pi \delta E'(1+\xi^2)} \right] d\xi = 0. \quad (2.15)$$

Граничну умову (1.10) на поверхні сферичної частинки, взявши до уваги потенціал (2.9), запишемо в такому вигляді:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[F(\omega)(2n+1) i^n j'_n(\eta\omega r_0) + A_n h_n^{(1)'}(\eta\omega r_0) + B_n j'_n(\eta\omega r_0) \right] P_n(\cos\theta) = 0. \quad (2.16)$$

Використовуючи ортогональність поліномів Лежандра, одержимо із співвідношення (2.16) нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A_n і B_n

$$A_n h_n^{(1)'}(\eta\omega r_0) + B_n j'_n(\eta\omega r_0) = -A(2n+1) i^n j'_n(\eta\omega r_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Коефіцієнти B_n можна виразити через A_n . Для цього скористаємося співвідношеннями (2.6), (2.15) і (2.5). В результаті одержимо

$$B_n = -\frac{2n+1}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} q_{mn} A_m + \frac{2n+1}{\pi} i^n G(\omega). \quad (2.18)$$

У формулі (2.18) позначено

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)\omega^2}{\delta E'D(\omega, \xi)(1+\xi^2)} P_n\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) d\xi; \quad (2.19)$$

$$q_{mn} = 2 \int_0^{\infty} \frac{C(\omega, \xi)}{D(\omega, \xi)} P_m\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) P_n\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) d\xi. \quad (2.20)$$

Із (2.17), беручи до уваги формулу (2.18) для коефіцієнтів B_n , одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A_n

$$A_n - \frac{(2n+1)}{2\omega} \frac{j'_n(\eta\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\eta\omega r_0)} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} q_{mn} A_m = -(2n+1) i^n \left[F(\omega) + \frac{G(\omega)}{\pi} \right] \frac{j'_n(\eta\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\eta\omega r_0)} \quad (2.21)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots).$

Обчислимо їх, застосувавши до системи рівнянь (2.21) метод редукції.

§3. Визначення радіаційної сили, що діє на сферичну частинку.

Радіаційна сила, яка діє в акустичному полі на тверду сферичну частинку, є середня за період первинної хвилі величина гідродинамічної сили. Оскільки поле швидкості плоскої хвилі в рідині трубки симетричне відносно осі Oz , гідродинамічна сила діє вздовж цієї осі і дорівнює інтегралу по поверхні сферичної частинки від тиску p

$$F_z = -r_0^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} p \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi. \quad (3.1)$$

У випадку, що розглядається, для знаходження гідродинамічної сили F_z із (3.1) одержуємо таку формулу

$$F_z = -2\pi r_0^2 \int_0^{\pi} p \sin\theta \cos\theta d\theta, \quad (3.2)$$

в якій необхідно брати дійсну частину у співвідношенні (2.9) при обчисленні тиску p і $r = r_0$.

Зауважимо, що відповідно з прийнятим підходом дослідження обчислення тиску звукової хвилі на сферичну поверхню частинки необхідно виконувати з точністю до

малих величин другого порядку. Для цього використаємо формулу для тиску, наведену в [10], яка, будучи знерозміреною, в досліджуваному випадку має такий вигляд:

$$p = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2r_0^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (3.3)$$

Оскільки розглядається випадок нерухокої сферичної частинки, тому перший доданок в правій частині (3.3), який змінюється в часі за законом синусоїди, при осередненні гідродинамічної сили (3.2) за періодом первинної хвилі робить в радіаційну силу нульовий внесок, тому в подальшому його не враховуємо.

Відділимо в потенціалі (2.9) дійсну частину від уявної. Для неї одержимо

$$\begin{aligned} \text{Re}\Phi = & \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n}(\eta\omega r) P_{2n}(\cos\theta) \cos\omega t + \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\eta\omega r) P_n(\cos\theta) \cos\omega t - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} L_{2n-1}(\eta\omega r) P_{2n-1}(\cos\theta) \sin\omega t + \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\eta\omega r) P_n(\cos\theta) \sin\omega t, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де

$$\begin{aligned} K_{2n}(\eta\omega r) &= (-1)^n F(\omega)(4n+1)j_{2n}(\eta\omega r); \quad L_{2n-1}(\eta\omega r) = (-1)^n F(\omega)(4n-1)j_{2n-1}(\eta\omega r); \\ M_n(\eta\omega r) &= \text{Re} A_n j_n(\eta\omega r) - \text{Im} A_n y_n(\eta\omega r); \quad N_n(\eta\omega r) = \text{Re} A_n y_n(\eta\omega r) + \text{Im} A_n j_n(\eta\omega r); \\ G_n(\eta\omega r) &= \text{Re} B_n j_n(\eta\omega r); \quad T_n(\eta\omega r) = \text{Im} B_n j_n(\eta\omega r); \\ D_n(\eta\omega r) &= M_n(\eta\omega r) + G_n(\eta\omega r); \quad S_n(\eta\omega r) = N_n(\eta\omega r) + T_n(\eta\omega r). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В подальшому для скорочення записів приймаємо $\text{Re}\Phi = \Phi$ (не пишемо Re).

При розрахунку тиску p і гідродинамічної сили F_z , з якою рідина діє на сферичну частинку, використаємо співвідношення (3.2) – (3.5). Зауважимо при цьому, що беручи до уваги вказане вище, формулу (3.3) для визначення тиску застосовуватимемо в такому вигляді:

$$p = -\frac{1}{2r_0^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (3.6)$$

Обчислимо внесок кожного з доданків (3.6) у величину сили F_z (3.2) при $r = r_0$.

Внесок першого доданку визначається інтегралом

$$F_z^{(1)} = \pi \int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta. \quad (3.7)$$

Похідна по θ потенціалу хвильового поля (3.4) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(r, \theta, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n}(\eta\omega r) P'_{2n}(\cos\theta) \sin\theta \cos\omega t - \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\eta\omega r) P'_n(\cos\theta) \cos\omega t + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n-1}(\eta\omega r) P'_{2n-1}(\cos\theta) \sin\theta \sin\omega t - \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\eta\omega r) P'_n(\cos\theta) \sin\theta \sin\omega t. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Інтегруючи (3.7) при умові (3.8) і враховуючи співвідношення

$$\int_{-1}^1 \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \frac{dP_m(\mu)}{d\mu} \mu(1-\mu^2) d\mu = \begin{cases} \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}, & m = n+1, \\ 0, & m \neq n+1, \end{cases} \quad \mu = \cos\theta, \quad (3.9)$$

одержимо формулу для визначення внеску першого доданку співвідношення для тиску (3.6) у величину гідродинамічної сили F_z при $r = r_0$

$$\begin{aligned}
F_z^{(1)} &= \\
&= 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n(2n+1)}{4n+1} \left[\frac{2(n+1)}{4n+3} K_{2n}(\eta\omega r_0) D_{2n+1}(\eta\omega r_0) + \frac{(2n-1)}{4n-1} K_{2n}(\eta\omega r_0) D_{2n-1}(\eta\omega r_0) \right] \times \right. \\
&\quad \times \cos^2 \omega t - \\
&\quad \left. - \frac{n(2n-1)}{4n-1} \left[\frac{2n+1}{4n+1} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n}(\eta\omega r_0) + \frac{2(n-1)}{4n-3} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n-2}(\eta\omega r_0) \right] \sin^2 \omega t \right\} + \\
&\quad + 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} D_n(\eta\omega r_0) D_{n+1}(\eta\omega r_0) \cos^2 \omega t + \right. \\
&\quad \left. + \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} S_n(\eta\omega r_0) S_{n+1}(\eta\omega r_0) \sin^2 \omega t \right].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

У (3.10) не приведено доданки, які при осередненні $F_z^{(1)}$ в часі дорівнюють нулю. Після осереднення (3.10) в часі одержуємо внесок гідродинамічної сили $F_z^{(1)}$ у величину радіаційної сили

$$\begin{aligned}
\langle F_z^{(1)} \rangle &= \\
&= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n(2n+1)}{4n+1} \left[\frac{2(n+1)}{4n+3} K_{2n}(\eta\omega r_0) D_{2n+1}(\eta\omega r_0) + \frac{(2n-1)}{4n-1} K_{2n}(\eta\omega r_0) D_{2n-1}(\eta\omega r_0) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{n(2n-1)}{4n-1} \left[\frac{2n+1}{4n+1} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n}(\eta\omega r_0) + \frac{2(n-1)}{4n-3} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n-2}(\eta\omega r_0) \right] \right\} + \\
&\quad + 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} D_n(\eta\omega r_0) D_{n+1}(\eta\omega r_0) + \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} S_n(\eta\omega r_0) S_{n+1}(\eta\omega r_0) \right].
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Внесок у величину гідродинамічної сили F_z другого доданку для тиску (3.6) визначається інтегралом

$$F_z^{(2)} = -\pi d^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta. \tag{3.12}$$

Похідна по t потенціалу хвильового поля (3.4) має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\omega \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n}(\eta\omega r) P_{2n}(\cos \theta) \sin \omega t - \omega \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\eta\omega r) P_n(\cos \theta) \sin \omega t - \\
&\quad - \omega \sum_{n=1}^{\infty} L_{2n-1}(\eta\omega r) P_{2n-1}(\cos \theta) \cos \omega t + \omega \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\eta\omega r) P_n(\cos \theta) \cos \omega t.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Інтегруючи при $r = r_0$ співвідношення (3.12) при умові (3.13) і враховуючи вираз

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) \mu d\mu = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}, & m = n+1, \\ 0, & m \neq n+1, \end{cases} \tag{3.14}$$

одержимо формулу для визначення внеску другого доданку для тиску (3.6) у величину гідродинамічної сили.

$$\begin{aligned}
F_z^{(2)} &= -4\pi(\omega r_0)^2 \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)} \left[\frac{2n+1}{4n+3} K_{2n}(\eta\omega r_0) D_{2n+1}(\eta\omega r_0) + \frac{2n}{4n-1} K_{2n}(\eta\omega r_0) D_{2n-1}(\eta\omega r_0) \right] \sin^2 \omega t - \\
&\quad -4\pi(\omega r_0)^2 \times \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-1} \left[\frac{2n}{4n+1} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n}(\eta\omega r_0) + \frac{2n-1}{4n-3} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n-2}(\eta\omega r_0) \right] \cos^2 \omega t + \quad (3.15) \\
&\quad + \pi(\omega r_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} D_n(\eta\omega r_0) D_{n+1}(\eta\omega r_0) \sin^2 \omega t + \\
&\quad + \pi(\omega r_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} S_n(\eta\omega r_0) S_{n+1}(\eta\omega r_0) \cos^2 \omega t.
\end{aligned}$$

У (3.15) не приведено доданки, які при осередненні (3.15) в часі дорівнюють нулю. Після осереднення (3.15) в часі одержуємо внесок гідродинамічної сили $F_z^{(2)}$ у величину радіаційної сили

$$\begin{aligned}
\langle F_z^{(2)} \rangle &= -2\pi(\omega r_0)^2 \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)} \left[\frac{2n+1}{4n+3} K_{2n}(\eta\omega r_0) D_{2n+1}(\eta\omega r_0) + \frac{2n}{4n-1} K_{2n}(\eta\omega r_0) D_{2n-1}(\eta\omega r_0) \right] - \\
&-2\pi(\omega r_0)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-1} \left[\frac{2n}{4n+1} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n}(\eta\omega r_0) + \frac{2n-1}{4n-3} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n-2}(\eta\omega r_0) \right] + \quad (3.16) \\
&\quad +2\pi(\omega r_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} D_n(\eta\omega r_0) D_{n+1}(\eta\omega r_0) + \\
&\quad +2\pi(\omega r_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} S_n(\eta\omega r_0) S_{n+1}(\eta\omega r_0).
\end{aligned}$$

Після додавання (3.11) і (3.16) одержуємо формулу для визначення радіаційної сили, яка діє на тверду сферичну частинку в податливій (еластичній) циліндричній трубці

$$\langle F_z \rangle = \langle F_z^{(1)} \rangle + \langle F_z^{(2)} \rangle. \quad (3.17)$$

§4. Числове дослідження радіаційної сили. Аналіз результатів.

В даній роботі основну увагу приділено визначенню акустичної радіаційної сили, що діє на тверду сферичну частинку, розташовану у вузькій циліндричній податливій трубці, заповненій ідеальною стисливою рідиною. При цьому вважаємо, що у трубці реалізується стояча акустична хвиля.

Для випадку стоячої хвилі в усіх наведених вище рівняннях (зокрема у виразі для потенціалу Φ_0 первинної плоскої хвилі (2.7) та у системі лінійних алгебраїчних рівнянь (2.21) для визначення невідомих коефіцієнтів розвинення A_n потенціалів акустичних хвиль) слід конкретизувати вираз для амплітудної функції $F(\omega)$ у вигляді

$$F(\omega) = -\frac{i}{\omega} (e^{i\omega h} + (-1)^n e^{-i\omega h}),$$

де h – відстань від центру сфери до найближчого вузла стоячої хвилі.

Метою розрахунків було визначення характеристик акустичної радіаційної сили в залежності від властивостей податливості матеріалу стінки вузької трубки та запов-

нюючої її рідини, зважаючи на особливості потенціального застосування як у біомедичних, так і у машинобудівних технологіях. Використані в розрахунках властивості матеріалів для стінки трубки наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Матеріал	Модуль Юнга, Па	Коефіцієнт Пуассона
Оргскло	$3,3 \cdot 10^9$	0,40
Алюміній	$70 \cdot 10^9$	0,34
Сталь	$210 \cdot 10^9$	0,30

Властивості заповнюючих рідин вибирались із міркувань охоплення широкого спектру значень густин та швидкостей поширення звуку в них. За базові обрано відповідні властивості води, отже, інші рідини повинні мати густини і швидкості звуку в них, що менші або більші за дані характеристики для води. Обрані у такий спосіб рідини та їх властивості наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Рідина	Густина, кг/м ³	Швидкість звуку, м/с
Бензин	870	1298
Вода	1000	1500
Карбон тетрахлорид	1594	926

Для проведення деталізованого дослідження характеристик акустичної радіаційної сили і впливу на них жорсткості трубки, рідини і геометричних параметрів системи виконано велику кількість числових розрахунків. Найбільш ілюстративні результати представлено на рис. 2 – 7. Проведені розрахунки для вибраних інтервалів зміни параметрів задачі показали, що максимальне значення радіаційної сили досягається у випадку розташування центру сферичної частинки на відстані $h = 0,125$ довжини стоячої хвилі від її вузла. Тому далі наведено результати саме для цього випадку.

На рис. 2 представлено графіки залежності акустичної радіаційної сили від нормованої частоти $\eta\omega r_0$ для різних матеріалів стінки трубки із товщиною $\delta = 0,02$ і радіусу сферичної частинки $r_0 = 0,1$. Аналіз рис. 2 показує, що залежність акустичної радіаційної сили від частоти має немонотонний характер з яскраво вираженими максимумами, які відповідають частотам резонансоподібних явищ для досліджуваної механічної системи. При переході через ці частоти спостерігається зміна напрямку дії акустичної радіаційної сили для всіх матеріалів стінки. При цьому для більш податливих матеріалів трубок ця зміна напрямку відбувається для вищих значень частот.

На рис. 3 представлено результати аналогічних розрахунків для нормованого радіусу $r_0 = 0,25$, тобто у випадку більшого радіусу сферичної частинки. Загалом пікоподібний характер зміни акустичної радіаційної сили від частоти зберігається. Проте, в інтервалі між першою і другою резонансоподібними частотами має місце перетин кривими горизонтальної осі, що відповідає зміні напрямку дії сили для всіх досліджених матеріалів.

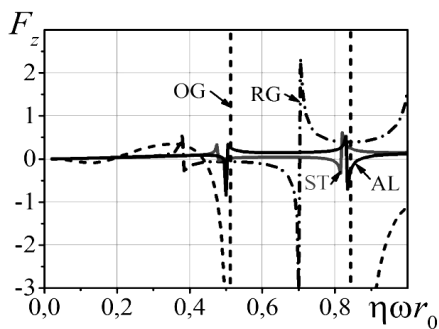


Рис. 2

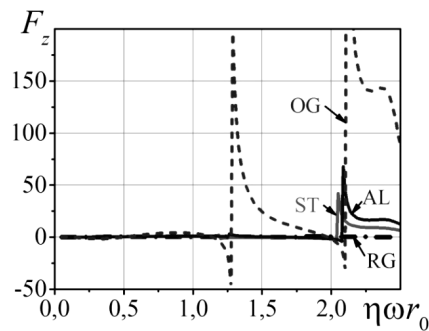


Рис. 3

Графіки залежностей радіаційної сили від нормованої частоти для нормованого радіусу сферичної частинки $r_0 = 0,5$ представлені на рис. 4.

На рис. 4 показано криві для абсолютно твердої, сталевій та алюмінієвій трубки. Немонотонна поведінка залежностей зберігається, отже акустична радіаційна сила змінює напрямок дії. Як і у випадку радіусу $r_0 = 0,25$ (рис. 3), у міжрезонансному інтервалі частот також спостерігається така зміна. Проте, при цій зміні знаку величина сили є малою, оскільки крива переходить через нуль на відміну від околу резонансоподібної частоти, коли зміна знаку відбувається внаслідок переходу через нескінченність.

Акустична радіаційна сила суттєво залежить від радіусу твердої сферичної частинки, що знаходиться в трубці. Характер цієї залежності було досліджено в широкому інтервалі частот, менших критичної, для відносного радіусу частинки до $r_0 = 0,5$, розташованої на осі алюмінієвої трубки, товщина стінки якої є $\delta = 0,02$. Заповнюючою рідиною є вода. Типові результати для радіусів $r_0 = 0,1; 0,25$ і $0,5$ представлено на рис. 5. Значення радіусу вказано біля відповідних кривих. Зауважимо, що графіки побудовано в осях $F_z \sim \eta\omega$, щоб охарактеризувати залежність від частоти при зміні радіусу як параметра цієї залежності.

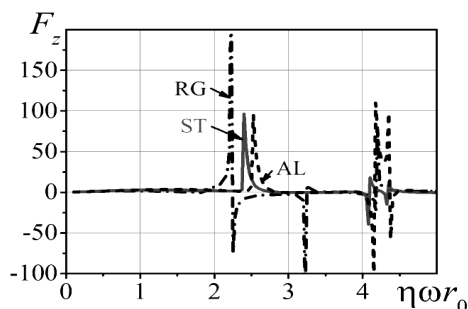


Рис. 4

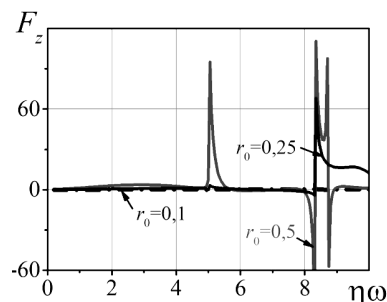


Рис. 5

Аналіз результатів розрахунку показує, що при збільшенні радіусу сфери акустична радіаційна сила, що на неї діє, зростає за величиною. При цьому напрямок дії сили залишається незмінним в інтервалі значень частот менших другої резонансоподібної частоти. Більше того, величина радіусу частинки не впливає на значення першої та другої резонансоподібної частоти. Картина поведінки акустичної радіаційної сили для частот, вищих за $\omega_2 \approx 8,32$, ускладнюється, оскільки в такій ситуації виникають ще й неплоскі акустичні хвилі.

Дослідження впливу властивостей рідини на характер поведінки акустичної радіаційної сили проілюстровано на рис. 6, де показано типові результати розрахунку для алюмінієвої трубки із товщиною стінки $\delta = 0,02$, заповненої рідинами, вказаними в табл. 2, при радіусі сферичної частинки $r_0 = 0,25$.

На рисунку криві для бензину, води та карбону тетрахлориду позначено відповідно літерами P, W і C. При значеннях частот менших за $\eta\omega_1 r_0 \approx 1,25$ спостерігається поступове зростання радіаційної сили при збільшенні частоти, причому величина сили приблизно однакова для всіх трьох рідин. При $\eta\omega_1 r_0 \approx 1,25$ спостерігається резонансоподібне явище і амплітуда сили зростає. Причому значення цієї резонансоподібної частоти виявляється незалежним від рідини. При подальшому зростанні частоти в інтервалі між першою і другою резонансоподібними частотами для всіх трьох рідин існують частоти, на яких радіаційна сила дорівнює нулю, отже, відбувається зміна напрямку її дії. В околі другої резонансоподібної частоти значення радіаційної сили різко збільшуються, залишаючись приблизно рівними в дорезонансній області. В зарезонансній області значень частот величини акустичної радіаційної сили відрізня-

ються між собою. Для води вона виявляється найбільшою, а для карбон тетрахлориду найменшою. Очевидно, така поведінка зумовлена тим, що акустична радіаційна сила залежить від зміни середнього в часі імпульсу хвилі, тобто на неї впливають як густина рідини, так і швидкість звуку в ній. Проте за даних умов величина радіаційної сили поводить себе так само, як і швидкість звуку у відповідній рідині, тобто, для карбон-тетрахлориду вона є найменшою, для води – найбільшою, а для бензину має проміжне значення.

Ще одним параметром системи, що впливає на характеристики акустичної радіаційної сили, є товщина стінки податливої трубки, в якій розташовано сферичну частинку. На рис. 7 показано типові залежності радіаційної сили від частоти при трьох різних товщинах стінки: $\delta = 0,01$; $0,02$ і $0,03$. Матеріал трубки – алюміній; рідина, яка заповнює трубку – вода; радіус сферичної частинки $r_0 = 0,25$.

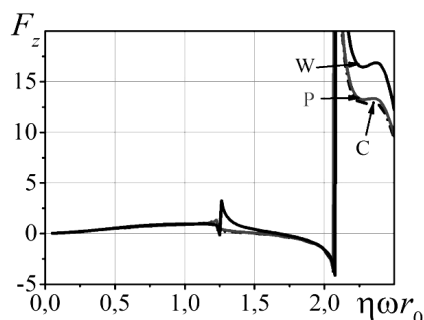


Рис. 6

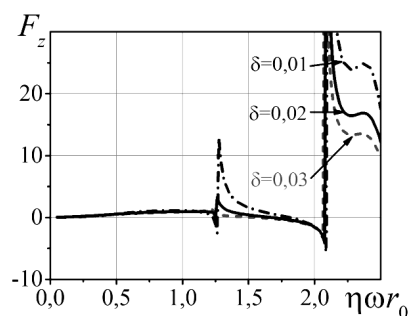


Рис. 7

Загалом характер поведінки кривих для всіх трьох товщин є однаковим. Значення резонансоподібних частот не залежать від товщини стінки. Величина акустичної радіаційної сили суттєво залежить від товщини стінки: при її зменшенні сила зростає. Тобто величина радіаційної сили збільшується при зростанні податливості трубки. Цей факт підтверджується і результатами, наведеними на рис. 6 для різних матеріалів. Більша деформативність трубки призводить до вищих значень акустичної радіаційної сили.

Висновок.

В рамках прийнятих в даній роботі припущень і наближень з'ясовано, що акустична радіаційна сила, яка діє на тверду сферичну частинку, розташовану у заповненій рідиною вузькій податливій трубці, не є монотонною функцією частоти первинної хвилі. Існують частоти первинної хвилі, при яких в системі трубка – рідина – сфера спостерігаються резонансоподібні явища, що зумовлюють значне зростання величини радіаційної сили. Також встановлено, що сила може змінювати не тільки величину, а і напрямок дії. Характеристики акустичної радіаційної сили в досліджених випадках залежать від багатьох факторів: частоти первинної хвилі, радіусу твердої сферичної частинки, радіусу циліндричної податливої трубки, властивостей заповнюючої рідини, товщини стінки та пружних властивостей матеріалу трубки. Досліджені закономірності поведінки акустичної радіаційної сили можуть бути базисом при розробці технологічних процесів, що використовують акустичні хвилі.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за підтримки Національного фонду досліджень України (конкурс «Підтримка досліджень провідних та молодих учених», проєкт 2020.02/0112 «Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах»).

РЕЗЮМЕ. Сформульовано постановку задачі про визначення акустичної радіаційної сили, яка діє на тверду сферичну частинку, розташовану у заповненій рідиною вузькій податливій трубці. Задачу розв'язано із застосуванням методу розділення змінних, трансляційних теорем додавання для

сферичних хвильових функцій і співвідношень взаємного представлення сферичних хвильових функцій через циліндричні і навпаки. Задачу визначення потенціалів хвильового поля зведено до розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, що виникає внаслідок задоволення граничних умов. Досліджено характеристики акустичної радіаційної сили, яка діє на тверду сферичну частинку, в залежності від частоти первинної хвилі, радіусу твердої сферичної частинки, радіусу циліндричної податливої трубки, властивостей заповнюючої рідини, товщини стінки та пружних властивостей матеріалу трубки. Встановлено, що поведінка радіаційної сили має немонотонний характер, сила може змінювати не тільки величину, а й напрям дії.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: податлива вузька трубка, ідеальна стислива рідина, тверда сферична частинка, акустична радіаційна сила.

1. Гузь А.Н., Жук А.П. О силах, действующих на сферическую частицу в звуковом поле в вязкой жидкости // Докл. АН СССР. – 1984. – **214**, № 6. – С. 1313 – 1316.
2. Ерофеенко В.Т. Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах уравнений Гельмгольца и Лапласа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1972. – № 4. – С. 42 – 46.
3. Жук А.П. Взаимодействие твердой частицы со звуковой волной в вязкой жидкости // Прикл. механика. – 1983. – **19**, № 11. – С. 91 – 99.
4. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 520 с.
5. Исакович М.А. Общая акустика. – Москва: Наука, 1973. – 496 с.
6. Кубенко В.Д. Задача дифракции стационарных волн на совокупности цилиндрических и сферических тел в жидкости // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 6. – С. 111 – 117.
7. Медников Е.П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 263 с.
8. Guz A.N., Zhuk A.P. Motion of Solid Particles in a Liquid under the Action of an Acoustic Field: the Mechanism of Radiation Pressure // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 3. – P. 245 – 265.
9. Guz A.N., Zhuk A.P. Dynamics of a rigid cylinder near a plane boundary in the radiation field of an acoustic wave // J. of Fluids and Struct. – 2009. – **25**. – P. 1206 – 1212.
10. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Proc. Roy. Soc. Ser.A. – 1934. – **147**, N 861. – P. 212 – 240.
11. Lighthill J. Waves in Fluids. – Cambridge: Cambridge University Press, 1978. – 598 p.
12. Marston P.L. Radiation force of a helicoidal Bessel beam on a sphere // J. Acoust. Soc. Am. – 2009. – **125**. – P. 3539 – 3547.
13. Rayleigh F.R.S. On the pressure of vibrations // Phil. Mag. 1902. – **3**, N 15. – P. 338 – 346.
14. Silva G.T. An expression for radiation force exerted by an acoustic beam with arbitrary wave front (L) // J. Acoust. Soc. Am. – 2011. – **130**, N 6. – P. 3541 – 3544.
15. Zhuk A.P. Effekt of Acoustic Radiation on a Spherical Drop of Liquid // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 7. – P. 726 – 733.
16. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Ya.A. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid – field cavity // J. Acoust. Soc. Am. – 2012. – **132**, N 4. – P. 2189 – 2197.
17. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Ya.A. Acoustic Radiation Acting on a Liquid on a Liquid Sphere in a Circular cylinder Filled with a Fluid // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 501 – 511.
18. Zhuk A.P., Zhuk Ya.A. On the Acoustic Radiation Force Acting upon a Rigid Spherical Particle Near the Free Liquid Surface // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 544 – 551.
19. Zhuk A.P., Zhuk Ya.A. Effect of Radiation Force on a Flexible Spherical Particle at the Free Liquid Surface // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 6. – P. 690 – 699.

Надійшла 08.12.2020

Затверджена до друку 09.12.2021