

О.Я. Григоренко¹, М.Ю. Борисенко¹, О.В. Бойчук²

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ГОФРОВАНОЇ ЗАМКНУТОЇ
ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ,

вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com; mechanics530@gmail.com;

²Миколаївський національний аграрний університет,

вул. Георгія Гонгадзе, 9, 54020, Миколаїв, Україна; e-mail: boychuklena27@gmail.com

Abstract. The finite element method is used to determine the frequencies and modes of free vibrations of a thin closed corrugated circular cylindrical shell with different variants of the rigid fastening and free ends at different physical and mechanical parameters. The test problem is solved for the opened non-circular cylindrical shell with an elliptical corrugated transverse cut, which showed a good convergence, which does not exceed 2.5%, of the calculated frequencies of free vibrations with the frequencies calculated by another author using the spline-collocation and discrete orthogonalization methods. A comparison is carried out of the corrugated shell frequencies with the frequencies of the circular shell of the equivalent mass at the corresponding boundary conditions. Dependence of the frequency of free corrugated shells on the boundary values and the physical-mechanical characteristics of the material is established. For all studied corrugated shells, the symmetric and anti-symmetric modes are found.

Key words: free vibrations, corrugated circular cylindrical shell, different boundary conditions, finite element method.

Вступ.

При проектуванні та виготовленні деталей машин, корпусів різних літальних, підводних та наземних апаратів, елементів споруд важливим є врахування частот і форм вільних коливань конструкції, оскільки при співпадінні частоти зовнішньої сили з частотою вільних коливань спостерігається руйнівне явище резонансу. Циліндричні оболонки широко використовуються у різних галузях промисловості, оскільки мають високу міцність та стійкість при відносно невеликій масі. Підвищення характеристик міцності при збереженні маси можна здійснювати за рахунок зміни такого геометричного параметру, як товщина стінки оболонки. При цьому можна змінювати товщину як вздовж твірної, так і по контуру оболонки, або змінювати характеристики міцності за рахунок зміни форми поперечного перерізу. Одним із способів зміни поперечного перерізу є гофрування, яке можна здійснювати як за гармонічним законом, так і перегинами. У зв'язку з цим є необхідним поширити чисельні методи на дослідження частот і форм вільних коливань гофрованих циліндричних оболонок.

Розв'язок задачі на визначення частот вільних коливань в рамках теорії тонких оболонок відомий для об'єктів простої геометричної форми [4, 5, 9, 13 – 15].

Розглянемо деякі публікації, присвячені тематиці даної роботи. В [3] проведено дослідження методом сплайн-колокації в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації резонансних частот некругових циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом, проаналізовано вплив кількості гофрів на розподіл резонансних частот коливань. В [16] представлено напіваналітичний підхід до нелінійної вільної та вимушеної асиметричної вібрації гофрованих сендвіч-функціонально гра-

дуйованих циліндричних оболонок, що містять рідину, під гармонічним радіальним навантаженням. Гофр розглядається двох типів: трапецієвидний і круглий. В [17] запропоновано метод визначення власних частот і форм коливань гофрованих некруглих циліндричних оболонок, досліджено вплив довжини та амплітуди гофра на основну частоту ненавантажених та стиснених вздовж осі оболонок. В [18] за допомогою класичної теорії оболонки вивчені зв'язані поздовжні та згинні коливання п'єзоелектричного перетворювача у вигляді гофрованої циліндричної оболонки. В [19] досліджено вібраційні характеристики композитних гофрованих сендвічних циліндричних оболонок із вільними граничними умовами. В [20] на основі рівнянь динаміки великих прогинів осесиметричних пологих оболонки обертання досліджено нелінійну вимушену вібрацію гофрованої пологої оболонки при рівномірному навантаженні.

У випадку оболонки складної геометричної форми, наприклад, некругового поперечного перерізу змінної [6] або сталої [7] товщини, відкритої контуру [10, 12] або товстостінності [11] доцільно використовувати метод скінченних елементів (МСЕ), який є основою роботи багатьох сучасних програм для інженерного розрахунку, наприклад, програми Femap з розв'язувачем NX Nastran. Перевагою даного методу є економія часу та фінансів в порівнянні зі складними експериментальними методами [1, 8].

Метою даної роботи є визначення методом скінченних елементів частот та форм вільних коливань ізотропної тонкої замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з різними варіантами жорсткого закріплення і вільних торців при різних фізико-механічних параметрах.

§1. Основні співвідношення.

Рівняння руху механічної системи зі скінченною кількістю степенів свободи за відсутності зовнішніх сил описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1.1)$$

де $L = T - U$. Використовуючи дискретну форму функціоналів кінетичної енергії та енергії деформації відповідно

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{\Phi}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\bar{\Phi}}_i; \quad U = \frac{1}{2} \bar{\Phi}_i^T \mathbf{K}_i \bar{\Phi}_i,$$

де \mathbf{K}_i – матриця жорсткості, \mathbf{M}_i – матриця мас, $\bar{\Phi}_i$ – вектор вузлових переміщень i -го скінченного елемента, з рівняння Лагранжа (1.1) отримаємо наступні рівняння руху за відсутності демпфування

$$\mathbf{K} \bar{\Phi}_j + \mathbf{M} \ddot{\bar{\Phi}}_j = 0, \quad (1.2)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – відповідно, матриця жорсткості та матриця мас механічної системи; $\bar{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -ій степені свободи і відтворює j -у форму коливань.

При вільних коливаннях оболонки усі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу

$$\bar{\Phi}_j(t) = \bar{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (1.3)$$

Після підстановки функцій (1.3) в рівняння руху (1.2) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \bar{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M} \bar{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1.4)$$

де ω_j – частота гармонічних коливань.

Програма NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша, що вимагає менших ресурсів у порівнянні з іншими методами. Метод Ланцоша дозволяє визначити n -ну кількість необхідних власних значень і форм, при цьому результати можна вважати практично точними для даної дискретної моделі, оскільки похибка складає $\|\bar{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \bar{\Phi}_j\| / \|\bar{\Phi}_j\| \leq 10^{-7}$.

Метод Ланцоша використовує зведення до трьохдіагонального вигляду матриці \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_k, \quad (1.5)$$

де $\mathbf{Q}_k = \{\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_k\}$ – прямокутна матриця з елементами $N_{eq} \times k$; N_{eq} – кількість рівнянь; k – номер кроку за методом Ланцоша; \bar{q}_k – k -й вектор Ланцоша.

Вираз

$$\beta_{k+1} \bar{q}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \bar{q}_k - \alpha_k \bar{q}_k - \beta_k \bar{q}_k \quad (1.6)$$

генерує наступний вектор Ланцоша q_{k+1} і визначає поточний рядок матриці \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \beta_k & \alpha_k \end{vmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо задачу на власні значення:

$$\mathbf{T} \bar{s}_h^k - \lambda_h^k \bar{s}_h^k = 0, \quad h = 1, 2, \dots, k, \quad (\omega_h^k)^2 = 1 / \lambda_h^k, \quad (1.7)$$

де ω_h^k – k -та апроксимація кругової частоти ω_h , $h = 1, 2, \dots, n$; n – необхідне число власних пар.

Алгоритм продовжує обчислення (при збільшенні k – номера кроку процедури Ланцоша) до тих пір, поки не буде досягнута задана точність за всіма необхідними власними значеннями.

Процедура вибіркової ортогоналізації підтримує необхідний рівень ортогоналізації векторів Ланцоша q_k , що забезпечує надійність і стійкість числового процесу розрахунку. При цьому застосовуються економічні методи для реалізації процедури вибіркової ортогоналізації й для визначення власних значень (1.7) шляхом використання подвійних QR-ітерацій зі зсувами. Вихідні власні вектори визначаються за формулою

$$\bar{\Phi}_h^k = Q_k \bar{s}_h^k, \quad h = 1, 2, \dots, n. \quad (1.8)$$

§2. Тестова задача.

За допомогою системи FEMAP побудовано геометрію гофрованої циліндричної оболонки (рис. 1) висотою $h = 0,12$ м, товщиною $d = 0,002$ м та з серединною поверхнею, що задається параметричними рівняннями

$$x(\theta) = [a + r \cos(k\theta)] \cos \theta; \quad y(\theta) = [b + r \cos(k\theta)] \sin \theta, \quad (2.1)$$

де $a = b = 0,044$ м – напівосі базового еліпса поперечного перерізу; $r = 0,002$ м – амплітуда гофра; $k = 8$ – густина гофрування.

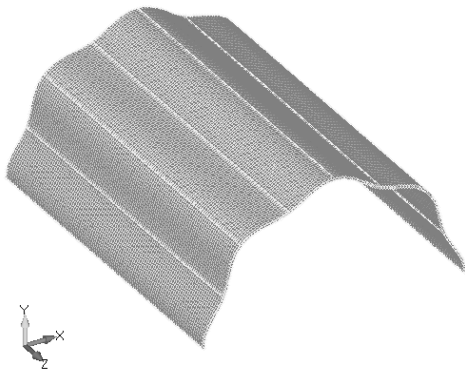


Рис. 1

Матеріалом оболонки задавалась сталь X40Cr14 з модулем Юнга $E = 210 \text{ ГПа}$, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,28$, густиною $\rho = 7740 \text{ кг/м}^3$. Оболонка жорстко закріплювалась за всіма контурами (СССС).

В результаті розв'язування тестової задачі отримані частоти вільних коливань, які представлені в табл. 1 та на рис. 2 разом із частотами, отриманими іншим автором [3], а також з наведеною розбіжністю розрахунків у відсотках. Отримані перші п'ять форм коливань представлені на рис. 3.

Таблиця 1

Форма	$f, \text{ Гц}$		$\varepsilon, \%$
	Сплайн-кол. [3]	МСЕ	
1	4792	4753	0,82%
2	5055	5006	0,98%
3	6388	6294	1,49%
4	6507	6433	1,15%
5	7151	7001	2,14%

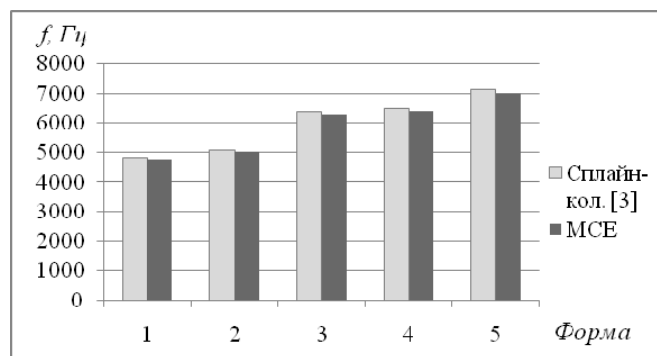


Рис. 2

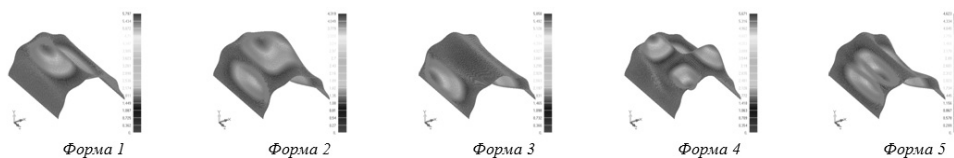


Рис. 3

Аналізуючи отримані результати тестової задачі, можна побачити добру відповідність між частотами вільних коливань, отриманими за допомогою FEMAP та частотами, розрахованими методом сплайн-колокації у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації, що свідчить про коректність використання розглянутих методик.

§3. Побудова розрахункової моделі.

За допомогою системи FEMAP побудовано геометрію замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки (рис. 4) висотою $h = 0,12$ м, товщиною $d = 0,002$ м, серединною поверхнею з параметричними рівняннями (2.1), де $a = b = 0,042064$ м, $r = 0,002$ м, $k = 8$. Фізико-механічні характеристики матеріалу оболонки задавались величинами з табл. 2. Оболонки досліджувались при різних варіантах жорстко закріплених (С) і вільних торців (F).

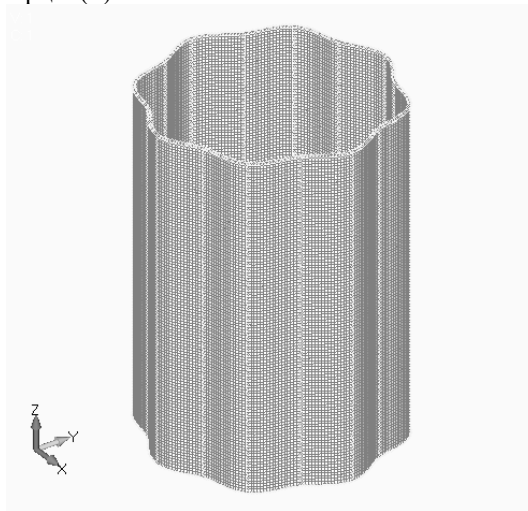


Рис. 4

Таблиця 2

	Алюміній	Сталь	Мідь	Латунь	Титан	Поліетилен	Гума
E , ГПа	71	214	110	95	112	2,56	0,003
ν	0,33	0,32	0,35	0,35	0,32	0,32	0,49
ρ , кг/м ³	2710	7820	8920	8730	4506	936	1200

Розрахунок проводився на визначення частот і форм вільних коливань.

§4. Результати числових розрахунків.

В результаті розрахунків отримано частоти і форми вільних коливань замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з різними граничними умовами та з різних матеріалів.

Частоти вільних коливань сталевих гофрованої оболонки та негофрованої кругової циліндричної оболонки з двома вільними торцями (FF) представлені в табл. 3 та гістограмі (рис. 5), де m – кількість вузлів вздовж твірної; n – кількість вузлів вздовж дугової координати оболонки.

Таблиця 3

Форма	m	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
	n	4	6	8	10	12	4	6	8	10	12
f , Гц,	$k = 0$	716	2022	3867	6231	9074	852	2222	4092	6465	9309
(FF)	$k = 8$	735	2061	3627	6248	8462	874	2259	3791	6391	8178

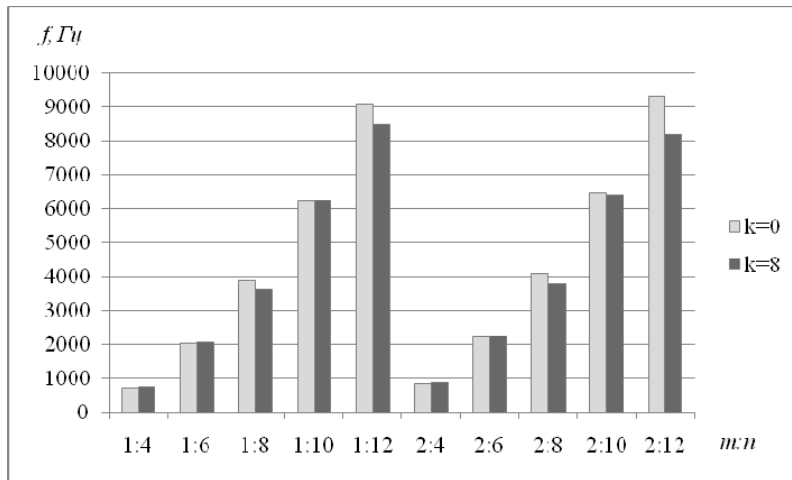


Рис. 5

Форми коливань замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з двома вільними торцями представлені на рис. 6.

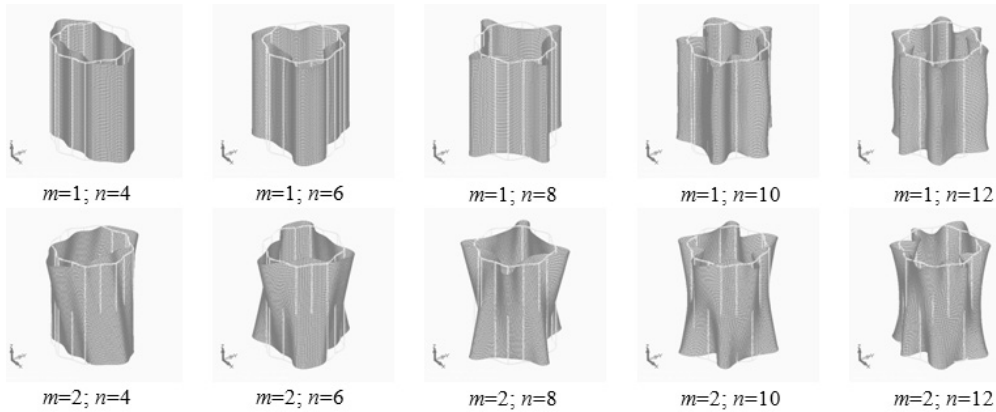


Рис. 6

Спостерігаються симетричні та антисиметричні форми коливань для всіх розглянутих форм коливань, наявність яких підтверджується експериментально для негофрованих циліндричних оболонок [1]. Особливістю для таких форм є розбіжність між частотами, яка не перевищує 2 Гц, окрім форм коливань $m = 1; n = 8$ та $m = 2; n = 8$ гофрованої оболонки (рис. 7), відхилення між частотами симетричної і антисиметричної форм яких складає до 20%.

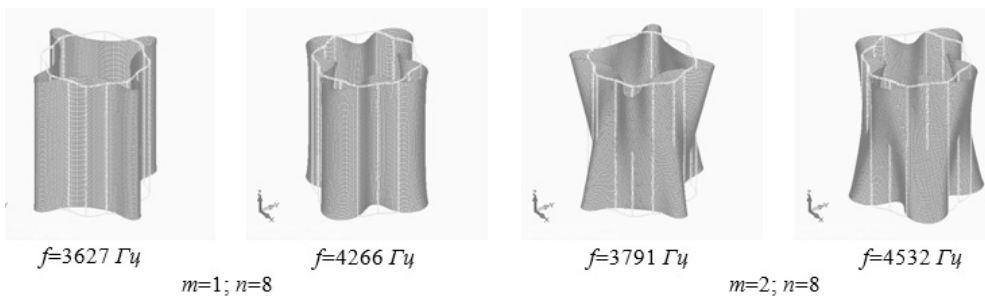


Рис. 7

Частоти вільних коливань сталевих гофрованої оболонки та негофрованої кругової циліндричної оболонки [2] з одним жорстко закріпленим та іншим вільним торцем (FC) представлені в табл. 4 та гістограмі (рис. 8).

Таблиця 4

Форма	m	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
	n	4	6	8	10	12	4	6	8	10	12
f , Гц, (FC)	$k=0$ [2]	1836	2266	3977	6318	9155	6476	4812	5302	7231	9935
	$k=8$	1797	2347	4361	6394	8668	4599	4962	5256	8958	11987

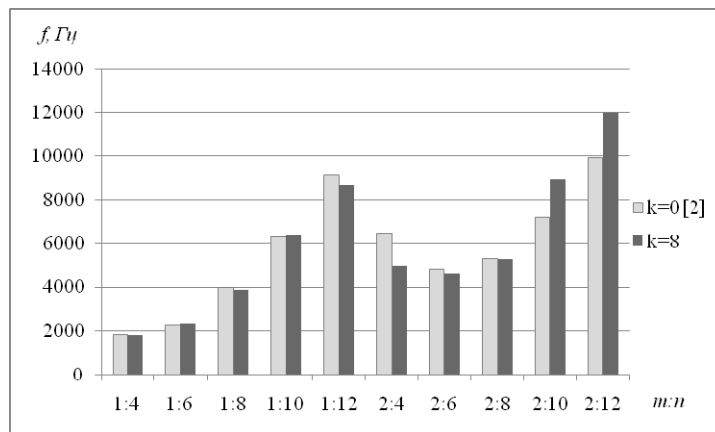


Рис. 8

Форми коливань замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з одним жорстко закріпленим та іншим вільним торцем представлені на рис. 9.

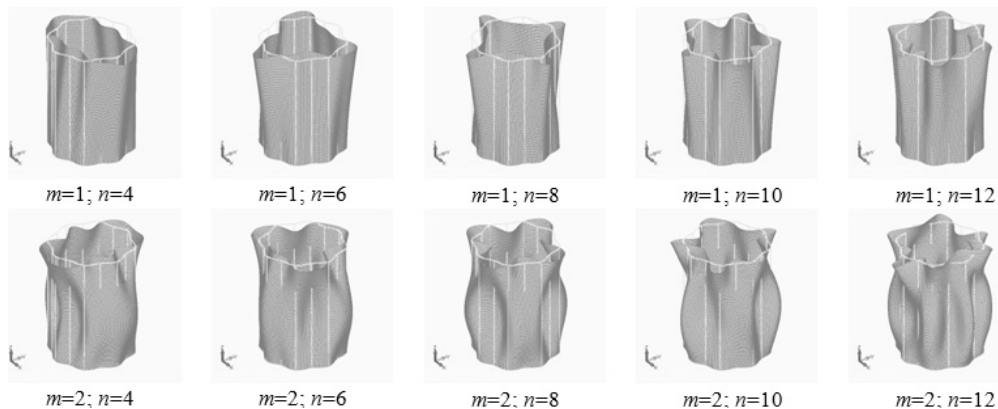


Рис. 9

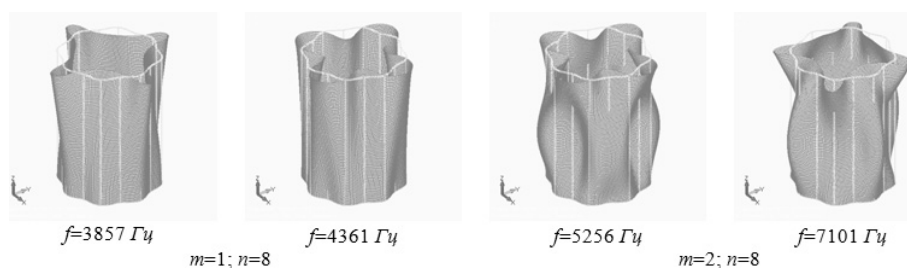


Рис. 10

Для оболонок з закріпленням (FC) спостерігаються симетричні і антисиметричні форми коливань, розбіжність між частотами яких не перевищує 1%, окрім форм коливань $m = 1; n = 8$ та $m = 2; n = 8$ гофрованої оболонки (рис. 10), відхилення між частотами яких складає до 36%.

Частоти вільних коливань сталевих гофрованої оболонки та негофрованої кругової циліндричної оболонки з двома жорстко закріпленими торцями (CC) представлені в табл. 5 та гістограмі (рис. 11).

Таблиця 5

Форма	m	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
	n	4	6	8	10	12	4	6	8	10	12
f , Гц, (CC)	$k = 0$	5587	4365	4970	7065	9876	10600	8172	7668	8939	11333
	$k = 8$	4529	4251	4906	8462	11530	6852	6501	6618	14093	17507

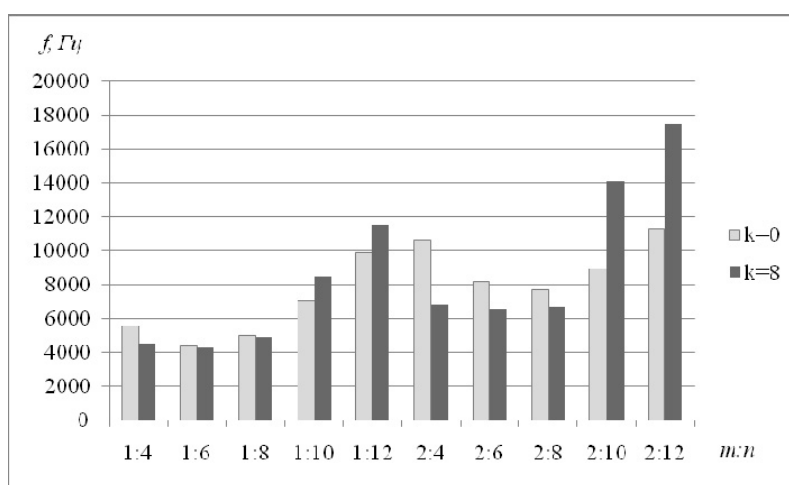


Рис. 11

Форми коливань замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з двома жорстко закріпленими торцями представлені на рис. 12.

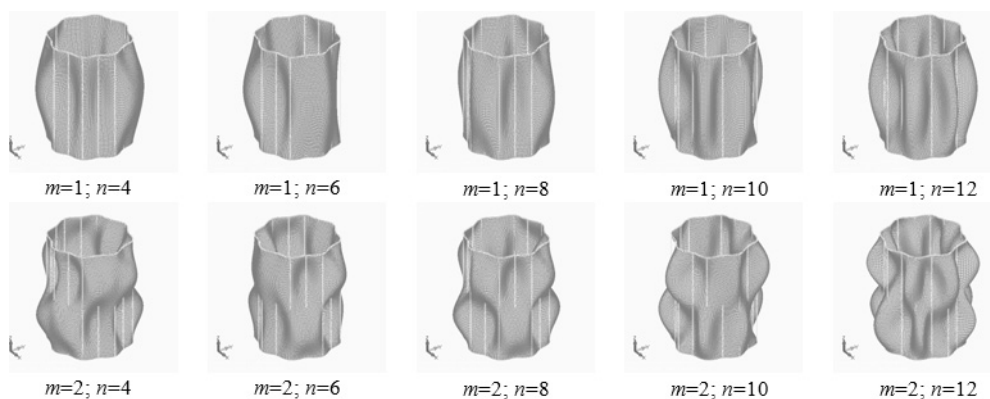


Рис. 12

Для оболонок із закріпленням (CC) спостерігаються симетричні і антисиметричні форми коливань, розбіжність між частотами не перевищує 3%, окрім форм коливань $m = 1; n = 8$ та $m = 2; n = 8$ гофрованої оболонки (рис. 13), відхилення між частотами яких складає до 91%.

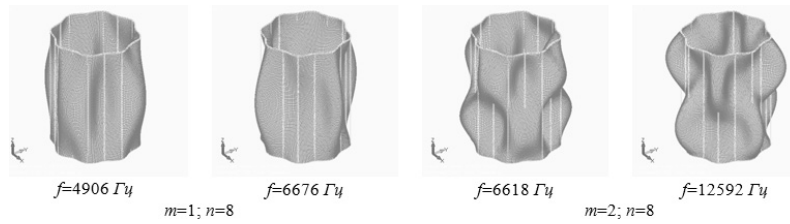


Рис. 13

Порівняння частот вільних коливань сталеві гофрованої оболонки при різних варіантах закріплення торців представлені в табл. 6 та гістограмі (рис. 14).

Таблиця 6

Форма	<i>m</i>	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
	<i>n</i>	4	6	8	10	12	4	6	8	10	12
<i>f</i> , Гц, (СС)	FF	735	2061	3627	6248	8462	874	2259	3791	6391	8178
	FC	1797	2347	3857	6394	8668	4962	4599	5256	8958	11987
	СС	4529	4251	4906	8462	11530	6852	6501	6618	14093	17507

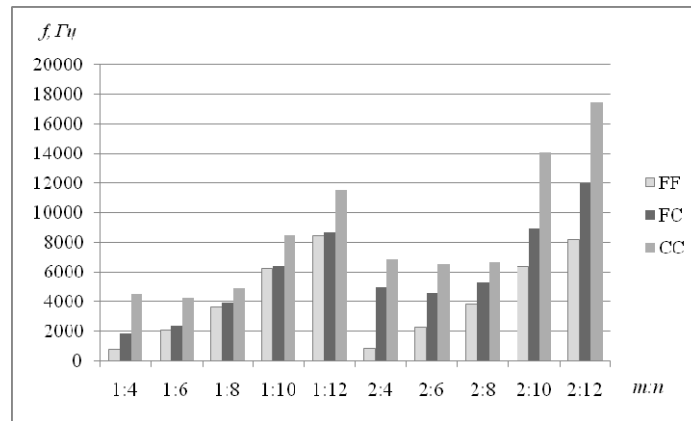


Рис. 14

Частоти вільних коливань гофрованої оболонки з граничними умовами (FC) з семи різних матеріалів представлені в табл. 7, де наведені коефіцієнти $\mu_{\text{мат.}}$, що є відношенням частоти оболонки з конкретного матеріалу до частоти оболонки зі сталі.

$$\mu_{\text{мат.}} = f_{\text{мат.}} / f_{\text{ст.}} \quad (4.1)$$

Таблиця 7

<i>m</i>	<i>n</i>	<i>f</i> , Гц, (FC)							$\mu_{\text{мат.}} = f_{\text{мат.}} / f_{\text{ст.}}$					
		Алюміній	Сталь	Мідь	Латунь	Титан	Поліетилен	Гума	μ_a	μ_m	μ_z	μ_n	μ_c	
1	4	1758	1797	1206	1133	1712	568	17	0,98	0,67	0,63	0,95	0,32	0,01
1	6	2301	2347	1586	1490	2237	742	24	0,98	0,68	0,63	0,95	0,32	0,01
1	8	3783	3857	2610	2452	3676	1219	39	0,98	0,68	0,64	0,95	0,32	0,01
1	10	6272	6394	4326	4063	6093	2021	65	0,98	0,68	0,64	0,95	0,32	0,01
1	12	8503	8668	5867	5511	8261	2740	88	0,98	0,68	0,64	0,95	0,32	0,01
2	4	4861	4962	3343	3140	4729	1569	49	0,98	0,67	0,63	0,95	0,32	0,01
2	6	4507	4599	3102	2914	4383	1454	46	0,98	0,67	0,63	0,95	0,32	0,01
2	8	5156	5256	3555	3340	5009	1662	53	0,98	0,68	0,64	0,95	0,32	0,01
2	10	8773	8958	6031	5665	8537	2832	88	0,98	0,67	0,63	0,95	0,32	0,01
2	12	11734	11987	8058	7570	11424	3790	117	0,98	0,67	0,63	0,95	0,32	0,01

В табл. 8 наведені коефіцієнти $\mu_{\text{мат.}}^*$, що є коренем квадратним відношення фізико-механічних характеристик конкретного матеріалу до фізико-механічних характеристик сталі

$$\mu_{\text{мат.}}^* = \sqrt{\frac{E_{\text{мат.}} \cdot \rho_{\text{ст.}} \cdot (1 - \nu_{\text{ст.}}^2)}{E_{\text{ст.}} \cdot \rho_{\text{мат.}} \cdot (1 - \nu_{\text{мат.}}^2)}} \quad (4.2)$$

Таблиця 8

$\mu_{a.}^*$	$\mu_{m.}^*$	$\mu_{z.}^*$	$\mu_{m.}^*$	$\mu_{n.}^*$	$\mu_{z.}^*$
0,98	0,68	0,64	0,95	0,32	0,01

Висновки.

У роботі методом скінченних елементів визначено частоти і форми вільних коливань тонкої замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з різними варіантами жорсткого закріплення і вільних торців при різних фізико-механічних параметрах. Проведено порівняння частот гофрованої оболонки з частотами кругової оболонки еквівалентної маси при відповідних граничних умовах.

Розв'язано тестову задачу для відкритої некругової циліндричної оболонки з еліптичним гофрованим поперечним перерізом, яка показала добру збіжність, що не перевищує 2,5%, розрахованих частот вільних коливань з частотами, розрахованими іншим автором методом сплайн-колокації у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації.

При збільшенні кількості жорсткого закріплення торців гофрованої оболонки частоти значно зростають, особливо це спостерігається при $m = 1$. При вільних торцях гофрованої оболонки частоти при нижчих частотах відрізняються незначно в порівнянні з негофрованою оболонкою і менші при вищих частотах. При жорстко закріпленому одному торці і вільному іншому торці гофрованої оболонки частоти при нижчих частотах відрізняються незначно в порівнянні з негофрованою оболонкою і більші при вищих частотах. При жорстко закріплених обох торцях гофрованої оболонки частоти при нижчих частотах значно менші в порівнянні з негофрованою оболонкою і значно більші при вищих частотах.

Порівнюючи частоти вільних коливань гофрованої оболонки з різних матеріалів отримані коефіцієнти $\mu_{\text{мат.}}$, а також розраховані коефіцієнти $\mu_{\text{мат.}}^*$, які співпали, що свідчить про правильність розрахунків, а також встановлюють залежність частоти вільних коливань від фізико-механічних характеристик матеріалу.

Для всіх розглянутих гофрованих оболонок встановлені симетричні і антисиметричні форми коливань, розбіжність між частотами яких не перевищує $\max = 3\%$, окрім форм коливань $m = 1; n = 8$ та $m = 2; n = 8$ гофрованої оболонки, відхилення між частотами яких складає $\max = 91\%$. При цьому із збільшенням кількості жорстко закріплених торців розбіжність між частотами зростає.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Методом скінченних елементів визначено частоти і форми вільних коливань тонкої замкнутої гофрованої кругової циліндричної оболонки з різними варіантами жорсткого закріплення і вільних торців при різних фізико-механічних параметрах. Розв'язано тестову задачу для відкритої некругової циліндричної оболонки з еліптичним гофрованим поперечним перерізом, яка показала добру збіжність, що не перевищує 2,5%, розрахованих частот вільних коливань з частотами розрахованими іншим автором методом сплайн-колокації у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації. Проведено порівняння частот гофрованої оболонки з частотами кругової оболонки еквівалентної маси при відповідних граничних умовах. Встановлено залежність частоти вільних коливань гофрованої оболонки від граничних умов та фізико-механічних характеристик матеріалу. Для всіх розглянутих гофрованих оболонок встановлені симетричні і антисиметричні форми коливань.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: вільні коливання, гофрована циліндрична оболонка, різні граничні умови, метод скінченних елементів.

1. Будак В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Пригода О.П., Бойчук О.В. Визначення власних частот тонкостінної оболонки некругового поперечного перерізу методом стробогологафічної інтерферометрії // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2015. – № 24. – С. 18 – 25.
2. Будак В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик // Вісн. Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка, серія «Фізико-математичні науки». – 2015. – № 1. – С. 23 – 28.
3. Пузырев С.В. О свободных колебаниях некруговых цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим сечением // Збірник наукових праць НУК. – 2013. – № 1. – С. 47 – 53.
4. Arnold R.N., Warburton G.B. The flexural vibration of thin cylinders // Proc. Inst. Mech. Engrs. – 1953. – 167 A, N 1. – P. 62 – 80.
5. Baron M.L., Bleich H.H. Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells // J. Appl. Mech. – 1954. – 21, N 2. – P. 178 – 188.
6. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Natural Frequencies and Modes of Noncircular Cylindrical Shells with Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 2. – P. 167 – 172.
7. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V. Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method // J. of Math. Sci. – 2016. – 212, N 2. – P. 182 – 192.
8. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Khorishko V.V., Borisenko M.Yu. Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 1. – P. 68 – 74.
9. Greenspon J.F. Vibration of thick cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Amer. – 1959. – 31, N 12. – P. 1682 – 1683.
10. Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Free Vibrations of an Open Elliptical Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 4. – P. 389 – 401.
11. Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Prigoda A.P. Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 1. – P. 75 – 84.
12. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Y. Free Vibrations of an Open Non-Circular Cylindrical Shell of Variable Thickness. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W. (eds) Analysis of Shells, Plates and Beams. Advanced Structured Materials. – 2020. – 134. – P. 141 – 154.
13. Grigorenko A.Ya., Parkhomenko O.Yu., Vasil'eva L.Ya., Borisenko M.Yu. Solution of the Problem of Free Vibrations of a Nonthin Orthotropic Shallow Shell of Variable Thickness in the Refined Statement // J. of Math. Sci. – 2017. – 229, N 3. – P. 253 – 268.
14. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Using Spline-Approximation to Solve Problems of Axisymmetric Free Vibration of Thick-Walled Orthotropic Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 10. – P. 1137 – 1147.
15. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Solving the Stress Problem for Hollow Cylinders with Corrugated Elliptical Cross Section // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 2. – P. 169 – 175.
16. Nguyen T.P. et al. Nonlinear vibration of full-filled fluid corrugated sandwich functionally graded cylindrical shells // J. of Vibration and Control. – 2020. – C. 1077546320936537.
17. Semenyuk N.P., Babich I.Y., Zhukova N.B. Natural Vibrations of Corrugated Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 5. – P. 512 – 519.
18. Xu L. et al. Vibration characteristics of a corrugated cylindrical shell piezoelectric transducer // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2008. – 55, N 11. – P. 2502 – 2508.
19. Yang J.S. et al. Modal response of all-composite corrugated sandwich cylindrical shells // Composites Sci. and Technology. – 2015. – 115. – P. 9 – 20.
20. Yuan H., Liu Rh. Nonlinear vibration of corrugated shallow shells under uniform load // Appl. Math. Mech. – 2007. – 28. – P. 573 – 580.

Надійшла 23.12.2020

Затверджена до друку 09.12.2021