

О.І.Беспалова, Н.П.Борейко

СТІЙКІСТЬ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ЗНАКОЗМІННОЇ ГАУССОВОЇ КРИВИЗНИ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, e-mail: metod@inmech.kiev.ua*

Abstract. The dependence of the critical values of external pressure which is applied to the corrugated cylinder a shell with alternating-sign curvature on the corrugation depth and density of their arrangement over the length. The ranges of variation of these corrugation parameters that are most favorable to the shell stability are established.

Key words: shell of revolution, alternating curvature, external load, stability, analysis.

Вступ.

Дослідження стійкості тонкостінних конструкцій зі змінною за знаком кривизною охоплює широкий клас гофрованих оболонок, який, незважаючи на велику кількість публікацій за цією тематикою [3 – 20, 22 – 27], і досі привертає увагу науковців. Зумовлено це не тільки застосуванням таких елементів в різних галузях техніки та будівництва (силові споруди, балони високого тиску, підземні резервуари, захисні поверхні апаратів підводного занурення, тунельні конструкції, каналізаційні і дренажні системи тощо), але й власними потребами механіки щодо виявлення та узагальнення закономірностей деформування оболонок знакозмінної кривизни.

Теоретичне дослідження стійкості гофрованих оболонок висуває цілу низку питань щодо вибору механіко-математичної моделі деформування, опису їх геометричної форми, розробки методик розв'язання відповідних задач, реалізації побудованих розрахункових схем з врахуванням особливостей обчислювального процесу.

Огляд публікацій цього напрямку механіки деформівного тіла зроблено в [9] з детальною характеристикою областей застосування пружних елементів з хвилеподібною поверхнею, починаючи від традиційних інженерних конструкцій, таких як гофровані сталеві балки, до конструкцій змінних крил літаків.

Наукові розробки базуються, зазвичай, на застосуванні різних оболонкових моделей: Донелла [11], класичної [18], уточненої з врахуванням поперечних зсувів [6, 14, 20] та просторової постановки в поєднанні з методом скінчених елементів (МСЕ) [12, 22, 23].

Особливої уваги заслуговують підходи до опису геометрії гофрованих оболонок і врахуванні її особливостей при подальшому розв'язанні відповідних задач статичного деформування. Починаючи з 30-их років минулого сторіччя, основним методом розрахунку гофрованих оболонок був метод заміни її на анізотропну з еквівалентними властивостями жорсткості [21]. Методи такого типу – методи гомогенізації за різними критеріями – і досі використовуються в обчислювальній практиці оболонок складної геометрії для спрощення відповідних розрахунків за наявними методами [3, 4, 11, 14, 22, 24, 26].

Щодо повноти і глибини аналізу стійкості гофрованих оболонок, то тут, окрім пластин і пологих панелей [14, 24, 26], треба виділити циліндричні оболонки. Переважна більшість досліджень для цих оболонок присвячена циліндрам з гофруванням за коловою координатою [5, 6, 12, 16, 20, 22, 27] і дещо менше – за твірною-меридіаном [3, 15, 18, 23, 24].

Так, стійкість елементів силосних споруд у вигляді гофрованих в коловому напрямку сталевих панелей представлена в [12, 22]. Використовується моделювання гофрованих стінок еквівалентними за жорсткістю ортотропними оболонками та відповідними розрахунками за МСЕ. В [27] досліджується випинання циліндричних оболонок з трикутною, напівкруглою та синусоподібною формою гофрування в залежності від амплітуди гофра. Відзначена перевага синусоїдальної форми перед іншими щодо величини критичного тиску та задовільне узгодження з експериментальними результатами. При комбінованому навантаженні зовнішнім (внутрішнім) тиском, осьовим стискувачим зусиллям та крученням в [6] розглядається стійкість шарнірно опертих шаруватих гофрованих за коловою координатою циліндрів на основі методу Гальоркіна та уточненою оболонковою моделлю, що враховує поперечні зсуви.

Поглиблений аналіз стійкості анізотропних циліндричних оболонок як гладких, так і з хвилястою поверхнею в коловому напрямку, що мають складну шарувату структуру за товщиною та перебувають під різного виду навантаженнями, проведено в роботах [5, 16 – 20].

Визначення критичних значень зовнішнього тиску для спіральні гофрованих шаруватих циліндрів з функціонально градієнтного матеріалу на основі гомогенізації та методу Гальоркіна в трьох членах апроксимації подано в [11].

Аналізу стійкості циліндричних оболонок з гофруванням за твірною присвячено, як уже відмічалось, значно менше публікацій [3, 15, 18, 23, 24].

В статті [24] розглянуто стійкість теплообмінника, що моделюється гофрованим циліндром з ділянками нульової та додатної гауссової кривизни, при внутрішньому тиску та зовнішньому навантаженні. Для розрахунку критичних значень навантаження використано МСЕ.

Аналіз критичних значень гідростатичного навантаження для гофрованої за твірною циліндричної оболонки з функціонально-градієнтного матеріалу проводиться в [3]. Тип навантаження та граничні умови виражаються законом зміни амплітуди гофрування. Для розрахунку оптимальних параметрів гофрування зі змінною амплітудою використовується метод гомогенізації.

Стійкість елементів корпусів підводних човнів у формі гофрованих циліндрів у порівнянні з традиційними схемами з кільцевими підкріпленнями аналізується в [15]. Відзначено, що конструкція з гофрованими циліндрами більш ефективна, ніж традиційна.

Дослідження стійкості поздовжньо гофрованих циліндрів при зовнішньому тиску проводиться в [18] для різних профілів хвилеутворення в межах припущень класичної моделі та умов стаціонарності змішаного функціоналу при активних переміщеннях, зусиллях та моментах. Початкова задача визначення критичних навантажень в результаті низки аналітичних перетворень зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь, для розв'язання якої використовується чисельний метод ортогональної прогонки С.К. Годунова. Визначено оптимальний за стійкістю варіант хвилеутворення, коли твірна оболонка містить елементи додатної і нульової кривизни.

Найбільш загальною роботою щодо широти охоплення різних видів гофрування є робота [23]. Тут на основі МСЕ розглядається стійкість опуклих і ввігнутих оболонок обертання з гофруванням як за твірною, так і в коловому напрямку, а також за обома координатними напрямками разом. Модифікація геометрії серединної поверхні базується на синусоїдальному представленні вздовж основних напрямків. Відзначено, що найбільше відносне критичне значення зовнішнього тиску має місце для циліндра з гофруванням за меридіональною координатою.

Результати експериментального дослідження стійкості гофрованих елементів конструкцій обговорюються в [10, 13].

В даній статті представлені результати досліджень щодо визначення критичних граничних і біфуркаційних значень статичного навантаження оболонок обертання знакозмінної кривизни. Методика розрахунку базується на нелінійній постановці задачі з використанням динамічного критерію стійкості та чисельно-аналітичного підходу до розв'язання відповідних нелінійних крайових задач та задач на власні значення. Особливістю підходу є раціональне зведення початкової задачі до послідовності одновимірних задач та практично точне чисельне розв'язання останніх. Це дає змогу врахувати змінні за меридіаном геометричні та жорсткісні характеристики оболонки в континуальній формі, що особливо важливо для оболонок гофрованого типу. Одержані результати доповнюють дослідження цього класу задач і можуть бути корисними при виявленні загальних закономірностей стійкості оболонок знакозмінної кривизни.

1. Постановка задачі і загальна характеристика методики її розв'язання.

В роботах авторів зі стійкості тонкостінних конструкцій [1, 7, 8] розглядався загальний клас пружних систем з оболонкою обертання різної геометрії і структури. В даній роботі основна увага приділяється оболонкам знакозмінної кривизни як окремому випадку цього класу оболонки. Також вивчається вплив кривизни на критичні значення діючого навантаження.

Розглядається оболонка, середина поверхня якої утворена обертанням деякої плоскої неперервної кривої навколо прямолінійної осі Oz . Утворена поверхня описується в самоспряженій ортогональній системі координат α, θ , де $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ змінюється за твірною-меридіаном, а $\theta \in [0, 2\pi]$ є центральним кутом в перерізі $z = \text{const}$. Лінії $\alpha = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ є лініями головних кривизн цієї поверхні, а її гауссова кривизна $K = k_\alpha k_\theta$ (k_α, k_θ – головні кривизни) може бути додатною, від'ємною або знакозмінною вздовж твірної. Щодо граничних умов на торцях оболонки $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$ та її структури за товщиною (змінна γ) ніяких особливих обмежень не накладається.

Оболонка може перебувати в полі консервативних осесиметричних статичних навантажень різного виду, зокрема, нормального тиску, контурних зусиль-моментів або їх комбінації, як в [7].

Знаходження критичних граничних і біфуркаційних значень заданого навантаження, як характерних точок діаграми рівноважних станів оболонки, реалізується, як і в [1, 7, 8], при таких припущеннях:

- основний докритичний напружено-деформований стан (НДС) визначається лінійно-пружною стадією деформування в усьому діапазоні значень діючого навантаження аж до його граничних величин;

- біфуркаційні критичні навантаження визначаються на основі динамічного критерію стійкості, коли за їх критичні значення приймаються такі, при яких мінімальна частота власних коливань попередньо навантаженої оболонки дорівнює нулеві;

- коливання розглядаються як малі незатухаючі збурення відносно основного докритичного напруженого стану;

- математична модель стійкості будується на основі геометрично нелінійної теорії середнього згину в рамках гіпотез класичної моделі оболонки Кірхгофа – Лява.

Таким чином, математична постановка нелінійної двовимірної задачі стійкості окремої оболонки може бути умовно представлена такими матрично-векторними рівняннями [1, 2]

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial \alpha} = L\bar{N} + \bar{G} + \bar{q}^0 + C \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial t^2}, \quad \alpha \in (\alpha_0, \alpha_1), \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (1)$$

$$B_0 \bar{N} = \bar{b}_0; \quad \alpha = \alpha_0; \quad (2)$$

$$B_1 \bar{N} = \bar{b}_1; \quad \alpha = \alpha_1; \quad (3)$$

$$\bar{N}(\alpha, \theta + 2\pi) = \bar{N}(\alpha, \theta) \quad (4)$$

$$\left(\bar{N} = \{N_i(\alpha, \theta, t)\} = \{N_\alpha, \hat{S}_\alpha, \hat{Q}_\alpha, M_\alpha, u, v, w, \vartheta_\alpha\}^T \right).$$

Позначення і їх фізичний зміст відповідають прийнятим в [1, 2].

Методика розв'язання задачі (1) – (4), що в узагальненому вигляді представлена в [2], базується на прийнятому припущенні щодо малості коливань (біфуркаційна форма втрати стійкості \bar{N}^{bif}) відносно основного докритичного НДС \bar{N}^0 . Це дає змогу провести фізично зрозумілу декомпозицію шуканого розв'язку \bar{N} задачі (1) – (4) на дві складові

$$\bar{N} = \bar{N}^0 + \bar{N}^{bif}; \quad \bar{N}^{bif} \ll \bar{N}^0$$

і, відповідно, наближено розділити початкову задачу (1) – (4) на дві взаємопов'язані:

– задачу про основний докритичний стан оболонок при заданих осесиметричних навантаженнях, яка є одновимірною нелінійною крайовою задачею і формулюється відносно вектор-функції $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha)\}$

$$\frac{d\bar{N}^0}{Ad\alpha} = L^0\bar{N}^0 + \bar{G}(\alpha, \bar{N}^0, \dots) + \bar{q}^0, \quad \alpha \in (\alpha_0, \alpha_1); \quad (5)$$

$$B_0\bar{N} = \bar{b}_0; \quad \alpha = \alpha_0; \quad (6)$$

$$B_1\bar{N} = \bar{b}_1; \quad \alpha = \alpha_1 \quad (7)$$

(L^0 – матричний диференціальний оператор нульового порядку);

– задачу про малі коливання оболонки відносно основного стану, яку отримуємо в результаті лінеаризації початкової задачі (1) – (4) по вектор-функції $\bar{N}^{bif} = \{N_n^{bif}(\alpha, \theta, t)\}$ і яка є двовимірною однорідною крайовою задачею:

$$\frac{\partial \bar{N}^{bif}}{A\partial\alpha} = \tilde{L}\bar{N}^{bif} + C \frac{\partial^2 \bar{N}^{bif}}{\partial t^2}; \quad \alpha \in (\alpha_0, \alpha_1), \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (8)$$

$$B_0\bar{N}^{bif} = 0; \quad \alpha = \alpha_0; \quad (9)$$

$$B_1\bar{N}^{bif} = 0, \quad \alpha = \alpha_1; \quad (10)$$

$$\bar{N}^{bif}(\alpha, \theta + 2\pi, t) = \bar{N}^{bif}(\alpha, \theta, t) \quad (11)$$

(тут $\tilde{L} = L + (\partial\bar{G}/\partial\bar{N}^0)$ – матричний диференціальний оператор, що, як параметричні члени, містить компоненти вектор-функції $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha, \lambda)\}$ основного стану, які, в свою чергу, пропорційні параметру навантаження λ).

Методика розв’язання одержаних задач (5) – (7) та (8) – (11) базується на використанні таких методів: методу лінеаризації в формі Ньютона – Канторовича – Рафсона, розвинення в тригонометричні ряди Фур’є за коловою координатою, методу послідовних наближень в варіанті оберненої ітерації з побудовою відношення Релея, методу ортогональної прогонки розв’язання лінійних одновимірних крайових задач.

Приклади практичного обґрунтування методики представлені в статтях [1, 7, 8].

2. Аналіз стійкості оболонок обертання знакозмінної гауссової кривизни.

Як приклад оболонки знакозмінної кривизни обрано тонкостінний циліндр довжиною L , радіусом R з гофруванням у вигляді синусоїди (рис. 1, а, б). Твірна гофрованого циліндра в системі координат (r, O, z) задається в параметричному виді відносно параметра z – довжини осі обертання

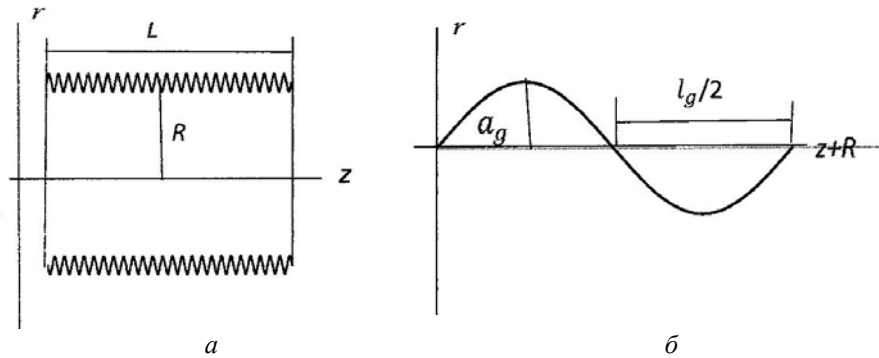


Рис. 1

$$r(z) = R + a_g \sin\left(\frac{2\pi}{l_g} z\right), \quad z \in [0, L]$$

(a_g, l_g – амплітуда та довжина періоду синусоїди).

Оболонка жорстко закріплена на торцях $z = 0, z = L$, має сталу товщину h , виготовлена з ізотропного матеріалу з модулем Юнга E , коефіцієнтом Пуассона μ , густиною ρ та знаходиться під дією зовнішнього навантаження інтенсивності q , нормального до твірної гофра (наприклад, занурена у рідину захисна оболонка з хвилястою поверхнею).

Визначаються критичні значення діючого навантаження – граничні q^{lim} , що відповідають втраті стійкості за осесиметричною формою $k = 0$, та біфуркаційні q^{bif} , що відповідають втраті стійкості з випинанням в коловому напрямку $k \neq 0$ (k – параметр хвилеутворення в коловому напрямку).

Геометрію оболонки будемо характеризувати двома параметрами: параметром амплітуди $\alpha = a_g / R$, що є відносною висотою (глибиною) гофра, та параметром щільності (частоти) гофрування n_g , який є цілим числом і дорівнює кількості півперіодів синусоїди, що повністю вкладається в довжину циліндра, тобто кількості змін знаку кривизни з додатної на від'ємну і навпаки ($n_g = L / (0,5l_g)$).

Розрахунки наведені для таких початкових даних: $R = 100l_0$; $L / R = 2$; $h / R = 0,01$; $E = E_0$; $\mu = 0,3$; $\rho = \rho_0$; $\alpha = 0,1; 0,08; 0,05$; $n_g \in [0; 40]$ (l_0 – характерний лінійний розмір).

В першій серії розрахунків розглядається вплив параметра амплітуди гофрування $\alpha = a_g / R$ на стійкість гофрованого циліндра.

Досліджується залежність граничних критичних значень зовнішнього тиску $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(\alpha)$ для одного окремого елемента гофра $n_g = 1$ додатної ($K > 0$), від'ємної ($K < 0$) та нульової ($K = 0$) гауссової кривизни $K = k_s k_\theta$ в діапазоні зміни параметра $\alpha \in [0; 0,1]$.

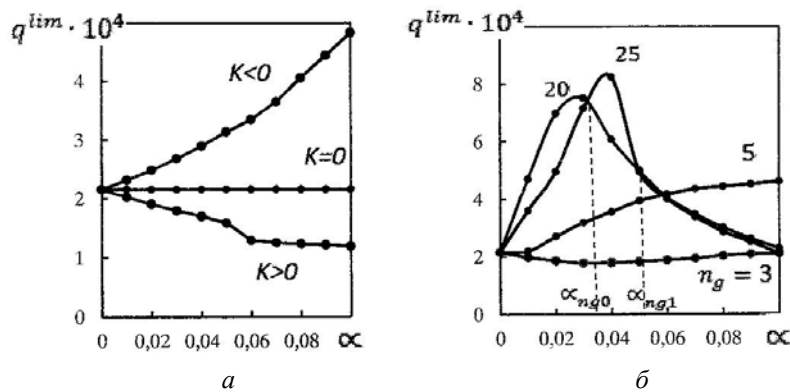


Рис. 2

Ці дані відображені на рис. 2, а для негофрованого циліндра з $K = 0$; півгофру з $K > 0$ («опукла» бочка); півгофру з $K < 0$ («ввігнута» бочка) і підтверджують фізично зрозумілий факт про протилежність тенденцій щодо стійкості оболонки: для «опуклого» півгофру граничні критичні значення зовнішнього тиску з ростом кривизни елемента зменшуються, для «ввігнутого» при тих же умовах – зростають.

При збільшенні елементів $n_g > 1$ зі змінною за знаком кривизною ($K > 0, K < 0$) якісно змінюється і характер залежності $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(\alpha)$, що ілюструється наведеними

на рис. 2, б кривими для різних значень параметра щільності $n_g = 3$; $n_g = 5$; $n_g = 20$; $n_g = 25$. Для малої кількості півгофрів $n_g = 3$; $n_g = 5$ ця залежність є монотонною, але при $n_g = 3$ мало впливає на стійкість оболонки, причому в сторону її зниження, а при $n_g = 5$, навпаки, сприяє збільшенню граничних критичних значень діючого тиску.

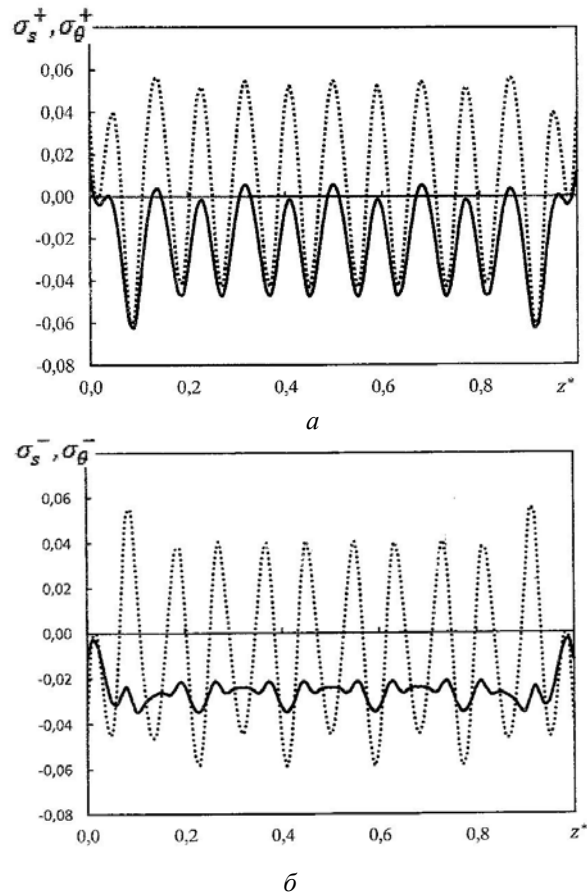
При збільшенні параметра щільності гофрування $n_g = 20$; $n_g = 25$ криві $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(\alpha)$, в протизначенні $n_g = 3$ і $n_g = 5$, змінюються немонотонно і для кожного значення n_g можна виділити діапазон амплітуд $\alpha \in [\alpha_{ng0}; \alpha_{ng1}]$, найбільш сприятливий для стійкості оболонки.

Проведений аналіз ілюструє якісно різні картини стійкості гофрованого циліндра для окремого елемента різної за знаком кривизни (рис. 2, а) та для сукупності таких елементів (рис. 2, б).

Подальші дослідження зв'язані з аналізом стійкості гофрованого циліндра в залежності від зміни параметра щільності n_g . Детальне дослідження проводиться для базового його варіанту з параметрами $\alpha = 0,1$ та $n_g \in [0; 40]$.

До аналізу залучено два розрахункові варіанти:

- 0,1; I – для непарних значень параметра щільності $n_g = 1, 3, \dots, 39$, коли розташування гофрів відносно середини циліндра $s = L/2$ є симетричним і оболонка має в цій точці ненульову кривизну (додатну або від'ємну);
- 0,1; II – для парних значень цього параметра $n_g = 2, 4, \dots, 40$, коли розташування гофрів відносно середини циліндра $s = L/2$ є антисиметричним і оболонка має в цій точці нульову кривизну.



б
Рис. 3

Дослідження стійкості оболонки в обох наведених варіантах доцільно починати з аналізу її НДС, що в даній задачі зумовлений виключно особливостями геометрії (параметрами гофрування) та діючим навантаженням. Типовий характер розподілу меридіональних та колових напружень на зовнішній σ_s^+ , σ_θ^+ та внутрішній σ_s^- , σ_θ^- поверхнях оболонки за координатою $z^* = z/L \in [0; 1]$ представлений, відповідно, на рис. 3, а і рис. 3, б для варіанту 0,1; I (значення σ_s на обох поверхнях нанесені штриховими лініями; значення σ_θ – суцільними). Колові напруження на обох поверхнях оболонки є стискуючими, що є основною причиною втрати її стійкості.

Характерною особливістю розподілу меридіональних напружень є чергування зон розтягу та стиску, зумовлене зміною знаку кривизни оболонки. Сумарні величини розтягуючих та стискуючих напружень співмірні між собою з невеликим переважанням розтягуючих, що сприяє підвищенню стійкості гофрованого циліндра у порівнянні з негофрованим. Це підтверджується даними рис. 4, а, б, де наводяться критичні граничні (q^{lim} , рис. 4, а) та біфуркаційні (q^{bif} , рис. 4, б) значення зовнішнього тиску у вигляді умовних ламаних кривих $q^{lim} = q^{lim}(n_g)$, $q^{bif} = q^{bif}(n_g)$, як функцій дискретного параметра щільності $n_g \in [0; 40]$.

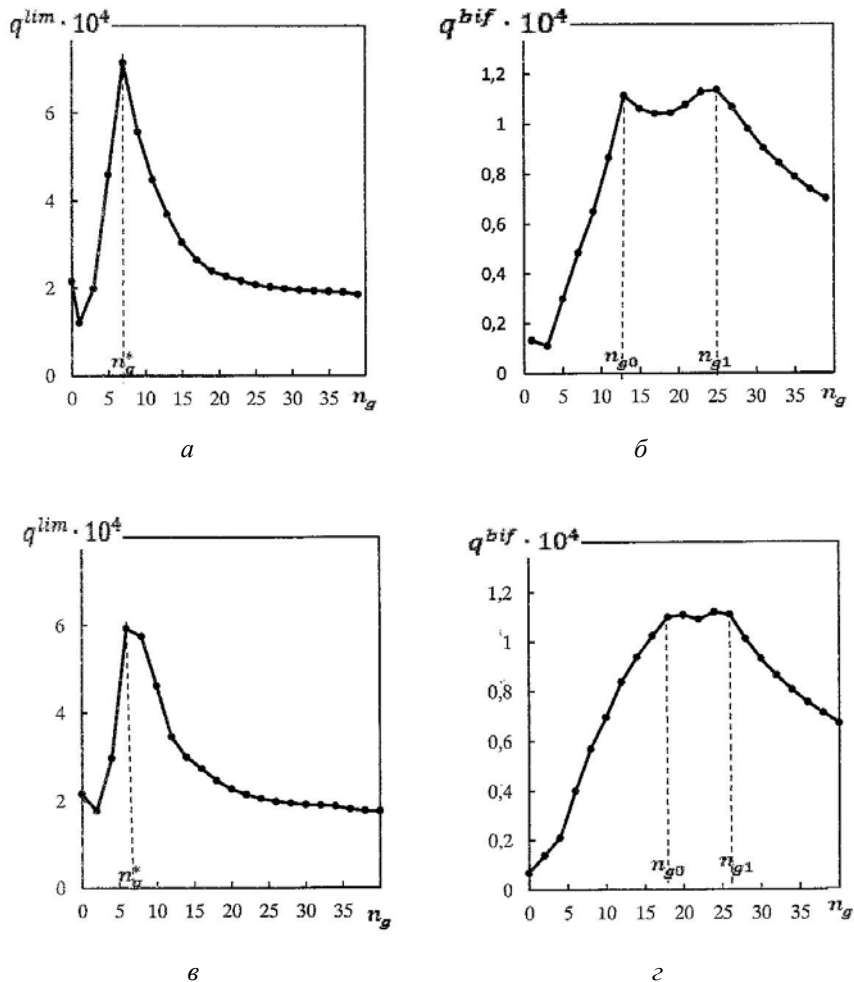


Рис. 4

Залежність $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(n_g)$ має чітко виділені дві гілки: монотонно зростаючу ($n_g \in [1; n_g^*]$) та монотонно спадаючу $n_g \in [n_g^*; 39]$. Найбільше критичне значення тиску при втраті стійкості за осесиметричною формою досягається в спільній точці цих гілок при $n_g = n_g^* = 7$. Подальше ущільнення гофрування $n_g > n_g^*$ знижує стійкість оболонки, а, починаючи з $n_g > 27$, несуттєво впливає на критичні граничні значення навантаження. Зі збільшенням параметру щільності n_g відповідно збільшується і хвилястість прогину, але випинання в бік діючого зовнішнього тиску не спостерігається.

Складніша картина залежності критичних значень тиску від параметра щільності має місце при біфуркаційній формі втрати стійкості гофрованого циліндра $q^{\text{bif}} = q^{\text{bif}}(n_g)$ (рис. 4, б). Форму втрати стійкості в цьому випадку будемо характеризувати двома параметрами k і m : k – кількість вузлових діаметрів в коловому напрямку, m – кількість змін знаку прогину в меридіональному.

На умовній кривій $q^{\text{bif}} = q^{\text{bif}}(n_g)$ можна виділити три характерні зони зміни параметра n_g : [A] – $n_g \in [3; n_{g0}]$; [B] – $n_g \in [n_{g0}; n_{g1}]$; [C] – $n_g \in [n_{g1}; 39]$ ($n_{g0} = 13, n_{g1} = 25$). Для параметра n_g в зонах [A] і [C] залежність $q^{\text{bif}} = q^{\text{bif}}(n_g)$ має монотонний характер і є, відповідно, зростаючою ([A]) та спадаючою ([C]). Для значень n_g з [A] форма випинання в коловому напрямку має від $k = 6$ до $k = 8$ вузлових діаметрів, а в меридіональному – від $m = 2$ до $m = 12$ півхвиль. Для кількості гофрів із зони [C] втрата стійкості циліндра реалізується зі зростанням кількості півхвиль за твірною відповідно до зростання n_g (від $m = 25$ до $m = 39$) та за антисиметричною формою в коловому напрямку ($k = 1$). При цьому тангенціальні переміщення переважають над нормальними.

Зону [B] можна розглядати як перехідну між зонами [A] і [C]. Тут значення критичних біфуркаційних навантажень є найбільшими і розподіленими досить рівномірно з незначним (в межах 10%) відхиленням від максимальних величин на її границях (при $n_g = n_{g0}$ і $n_g = n_{g1}$). Переважне число випинань в коловому напрямку відповідає двом вузловим діаметрам ($k = 2$), але є і інші форми втрати стійкості в цьому напрямку, наприклад $k = 8$ при $n_g = 15$. Інформативними при цьому є спектральні портрети нижчої ділянки спектру гофрованого циліндра. Вони представлені на рис. 5, а, б, в для фіксованих значень параметра щільності, відповідно, з зон [A] – $n_g = 7$, [B] – $n_g = 15$, [C] – $n_g = 33$ у вигляді залежності $f = f(k) \left(f \frac{1}{2\pi} 10^3 \omega l_0 \sqrt{\rho_0 / E_0} \right)$, де ω – мінімальна власна частота оболонки. Ця залежність в узагальненому виді містить повну інформацію про особливості геометричної форми оболонки, фізико-механічні параметри матеріалу, діючого навантаження тощо і є традиційною для оболонок обертання.

Слід звернути увагу на поведінку кривої $f = f(k)$ в області її нижчих значень $f < 0,2$, що є показовою при визначенні відповідного критичного навантаження за динамічним критерієм стійкості. В цій області для n_g із зон [A] і [C] (рис. 5, а, б) є тільки по одній частоті, що дорівнює (або прямує до) нулю при певному k ($k = 7$ [A], $k = 1$ [C]). Для зони [B] (рис. 5, в) в цій же частотній області ($f < 0,2$) знаходяться дві близькі за значенням частоти при $k = 2$ ($n_g = 13$) і $k = 8$ ($n_g = 15$), що з різною швидкістю прямують до нуля. Для різних n_g з [B] перевагу в наближенні до нуля може мати то одна, то друга частоти, що відповідає перехідному характеру цієї зони. Кількість випинань за твірною оболонки, як і в зонах [A] і [C], зростає з ростом її параметра щільності n_g .

Аналогічні дослідження стійкості гофрованого циліндра проведено для варіанту 0,1; II, коли кількість гофрів, що повністю вкладається за його довжиною, є парною ($n_g = 0, 2, 4, \dots, 40$) і розташовані вони антисиметрично відносно середини циліндра $s = L/2$. Результати розрахунку для критичних граничних та біфуркаційних значень діючого навантаження представлені, відповідно, на рис. 4, в і рис. 4, з для зручності порівняння з варіантом 0,1; I.

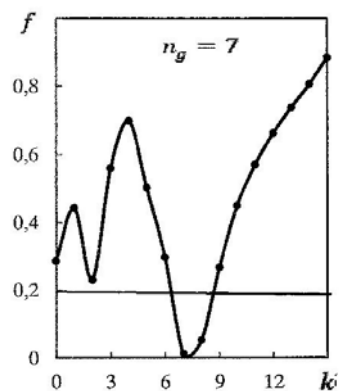
Залежність $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(n_g)$ для варіантів гофрування 0,1; I і 0,1; II ніяких якісних змін не зазнає. Максимальне значення критичного навантаження спостерігається при щільності гофрування $n_g = 6$ (в варіанті 0,1; I – $n_g = 7$). Подальше збільшення кількості гофрів ($n_g > 6$), як і при симетричному їх розташуванні в варіанті 0,1; I, призводить до зниження стійкості циліндра і при $n_g > 25$ суттєво на неї не впливає. Кількісна різниця між максимальними критичними значеннями навантаження в зрівнюваних варіантах знаходиться в околі 15% на користь симетричного розташування гофрів.

При неосесиметричній формі втрати стійкості (залежність $q^{\text{bif}} = q^{\text{bif}}(n_g)$, рис. 4, з) максимальні критичні значення тиску відповідають діапазону $n_g \in [n_{g0}; n_{g1}]$ ($n_{g0} = 18, n_{g1} = 26$), мало відрізняються між собою (порядку 5%) і від відповідних даних варіанту 0,1; I.

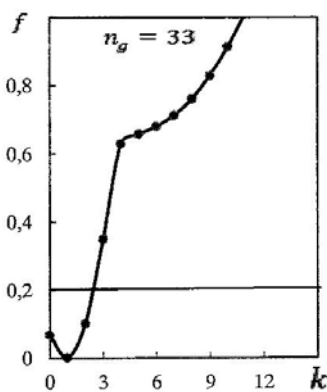
Збільшення щільності гофрування після певного його значення $n_g = n_g^*$ або $n_g = n_{g1}$ не є раціональним, оскільки призводить до ослаблення оболонки (варіант 0,1; I: $n_g^* = 7$ для q^{lim} , $n_{g1} = 25$ для q^{bif} ; варіант 0,1; II: $n_g^* = 6$ для q^{lim} , $n_{g1} = 26$ для q^{bif}).

Таким чином, спостерігається збереження якісної картини стійкості гофрованого циліндра при симетричному і антисиметричному розташуванні гофрів відносно його середини, а кількісні відмінності стосуються переважно максимальної величини граничних критичних навантажень (0,1; I: $q_{\text{max}}^{\text{lim}} = -7,16 \times 10^{-4}$; 0,1; II: $q_{\text{max}}^{\text{lim}} = -5,93 \times 10^{-4}$) і ширини перехідної зони параметра щільності n_g для біфуркаційних критичних значень тиску (0,1; I: $n_g \in [13; 25]$; 0,1; II: $n_g \in [18; 26]$).

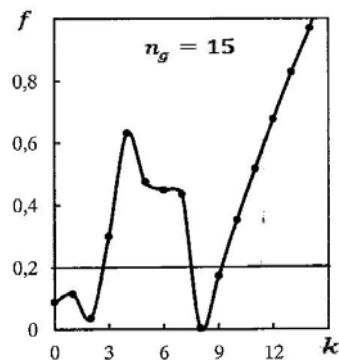
Для аналізу впливу амплітуди гофрування на одержані залежності поряд з базовим варіантом 0,1; I тут наводяться два додаткові: 0,05; I та 0,08; I відповідно з амплітудними параметрами $\alpha = 0,05$ та $\alpha = 0,08$ для непарних значень параметра щільності



a



б



в

Рис. 5

сті $n_g = 1, 3, \dots, 39$. Результати дослідження представлені на рис. 6 у вигляді умовної кривої $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(n_g)$ для критичних граничних значень зовнішнього тиску (рис. 6, а) та аналогічної кривої $q^{\text{bif}} = q^{\text{bif}}(n_g)$ для біфуркаційних (рис. 6, б).

Що стосується втрати стійкості циліндра за осесиметричною формою, то у порівнянні з базовим варіантом дослідження 0,1; I два додаткові варіанти – 0,05; I та 0,08; I – ніяких якісних змін не вносять. Криві $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(n_g)$ в усіх випадках мають зростаючу ($n_g \in [0; n_g^*]$) та спадаючу ($n_g \in [n_g^*; 39]$) гілки з найбільшим значенням граничного критичного навантаження при $n_g = n_g^*$. Значення n_g^* для розглянутих величин амплітудних параметрів або співпадають ($n_g^* = 7$, при $\alpha = 0,1$ і $\alpha = 0,08$) або близькі між собою ($n_g^* = 9$ для $\alpha = 0,05$).

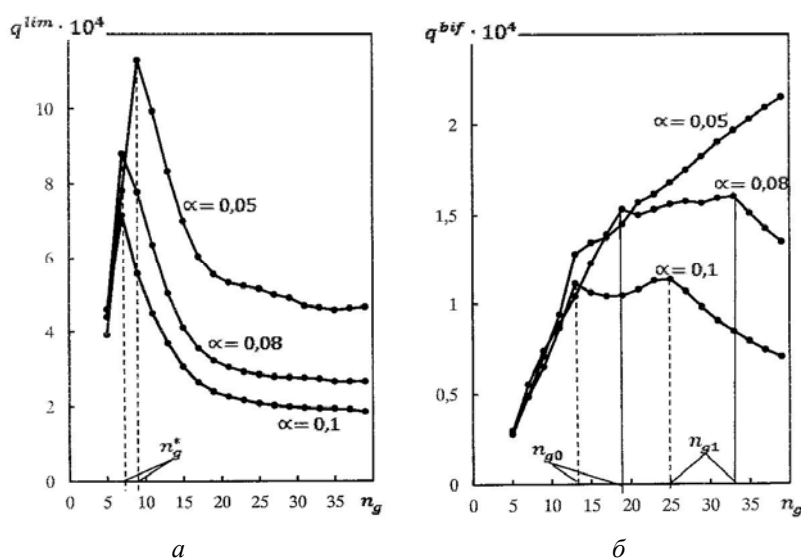


Рис. 6

Якщо залежність $q^{\text{lim}} = q^{\text{lim}}(n_g)$ зі зміною амплітуди гофрування змінюється лише кількісно, то для залежності $q^{\text{bif}} = q^{\text{bif}}(n_g)$ вплив цього параметра призводить до суттєвих якісних змін (рис. 6 б). Так, зі зменшенням параметра α від $\alpha = 0,1$ до $\alpha = 0,08$ перехідна зона [В] ($n_g \in [n_{g0}; n_{g1}]$), відмічена раніше для базового варіанту 0,1; I, збільшується, зсувається до більших значень параметра щільності n_g , а в подальшому ($\alpha = 0,05$) взагалі виположується і крива $q^{\text{bif}} = q^{\text{bif}}(n_g)$ практично монотонно зростає. Таким чином, при цій амплітуді гофрування критичні значення тиску q^{bif} зі збільшенням щільності гофрування n_g тільки збільшуються.

Висновки.

На прикладі гофрованого циліндра, як оболонки знаковмінної кривизни, досліджено його стійкість при зовнішньому рівномірному тиску.

Побудовано залежності критичних граничних і біфуркаційних значень від зміни двох геометричних параметрів гофрування: відносної амплітуди гофра α та щільності його розташування n_g по довжині циліндра. Відмічено складну картину їх взаємного впливу на стійкість оболонки при заданому навантаженні.

Показано, що за винятком малої кількості гофрів ($n_g \leq 3$) при будь-якому їх розташуванні – симетричному чи несиметричному відносно середини довжини циліндра – критичні граничні і біфуркаційні значення тиску вищі, ніж у кругового.

Визначено діапазони зміни параметрів гофрування $\alpha \in [\alpha_{ng0}; \alpha_{ng1}]$ і $n_g \in [n_{g0}; n_{g1}]$, в межах яких оболонка буде найбільш стійкою.

Показано, що при відносно малих значеннях амплітуди гофрування $\alpha \leq 0,05$ підвищення стійкості циліндра можна досягти зі збільшенням кількості гофрів на одиницю його довжини з врахуванням, звичайно, економічних та технологічних обмежень.

Відмічено, що при достатньо великих значеннях амплітуди гофрування $\alpha > 0,08$ збільшення щільності гофрів вище деякої величини $n_g > n_g^*$, $n_g > n_{g1}$ не має сенсу, оскільки призводить до зниження критичних значень діючого навантаження у порівнянні з найбільш сприятливими.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено залежність критичних значень зовнішнього тиску гофрованого циліндра, як оболонки знакозмінної кривизни, від глибини гофрів та щільності їх розташування по довжині. Виявлено діапазони зміни цих параметрів гофрування, що найбільш сприятливі для стійкості оболонки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: оболонка обертання, змінна кривизна, зовнішнє навантаження, стійкість, аналіз.

1. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Бореїко Н.П. Стійкість систем, складених із оболонок обертання змінної кривизни // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 1. – С. 127 – 142.
2. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Кутайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
3. Andrianov I.I., Awrejcewicz J., Diskovsky A.A. Optimal design of a functionally graded corrugated cylindrical shell subjected to axisymmetric loading // *Arch. Appl. Mech.* – 2018. – **88**. – P. 1027 – 1039.
4. Andrianov I.I., Andrianov I.V., Diskovsky A.A., Ryzhkov E.V. Buckling of Corrugated Ring under Uniform External Pressure // *Symmetry.* – 2020. – **12**, N 8. – P. 1 – 15.
5. Babich I.Y., Zhukova N.B., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of Circumferentially Corrugated Cylindrical Shells under External Pressure // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 8. – P. 919 – 928.
6. Baker E.H. Stability of circumferentially corrugated sandwich cylinder under combined loads // *AIAA J.* – 2012. – **2**, N 12. – P. 2142 – 2149.
7. Беспалова О.И., Бореїко Н.П. Stability of Shells of Revolution with Different Gaussian Curvature in the Field of Combined Static Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 4. – P. 405 – 414.
8. Беспалова Е.И., Яремченко Н.П. Stability of Systems Composed of Shells of Revolution // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 5. – P. 545 – 555.
9. Dayyani I., Shaw A.D., Flores S., Friswell M.I. The mechanics of composite corrugated structures: A review with applications in morphing aircraft // *Composite Struct.* – 2015. – **133**, N 12. – P. 358 – 380.
10. Ghazijahani T.G., Dizaji H.S., Nozohor J., Zirakian T. Experiments on corrugated thin cylindrical shells under uniform external pressure // *Ocean Engng.* – 2015. – **106**. – P. 68 – 76.
11. Hung V.T., Dong D.T., Phuong N.T., Ly L.N., Minh T.Q., Trung N.T., Nam V.H. Nonlinear Buckling Behavior of Spiral Corrugated Sandwich FGM Cylindrical Shells Surrounded by an Elastic Medium // *Materials.* – 2020. – **13**, N 8. – P. 1 – 16.
12. Iwicki P., Rejowski K., Tejchman J. Stability of cylindrical steel silos composed of corrugated sheets and columns based on FE analyses versus Eurocode 3 approach // *Engng. Failure Analysis.* – 2015. – **57**, N 11. – P. 444 – 469.
13. Mandal N.K. Experimental studies of quasi-longitudinal waves power flow in corrugated plates // *J. Sound and Vibration.* – 2006. – **297**, N 12. – P. 227 – 242.

14. *Minh N.N., Van N.T., Xuan T.B., Thoi T.N.* Static analysis of corrugated panels using homogenization models and a cell-based smoothed Mindlin plate element (CS- MIN3) // *Frontiers of Struct. and Civil Engng.* – 2019. – 13. – P. 251 – 272.
15. *Ross C.T.F.* Collapse of corrugated circular cylinders under uniform external pressure // *Int. J. of Struct. Stability and Dynamics.* – 2005. – 5, N 2. – P. 241 – 257.
16. *Semenyuk N.P., Babich I.Y.* Stability of Circumferentially Corrugated Cylindrical Shells under Uniform Surface Pressure // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – 43, N 11. – P. 1236 – 1247.
17. *Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B.* Stability and Initial Post-Buckling Behavior of Orthotropic Cylindrical Sandwich Shells with Unidirectional Elastic Filler // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – 55, N 6. – P. 636 – 647.
18. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Stability of Compound Toroidal Shells under External Pressure // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – 47, N 5. – P. 545 – 553.
19. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – 56, N 1. – P. 40 – 53.
20. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B., Ostapchuk V.V.* Stability of Corrugated Composite Noncircular Cylindrical Shells under External Pressure // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – 43, N 12. – P. 1380 – 1389.
21. *Seydel E.B.* Schubknickversuche mit Wellblechtafeln // *Jahrbuch Deutsch. Versuchsanstalt für Luftfahrt.* – 1931. – 4. – P. 233 – 235.
22. *Sondej M., Iwicki P., Tejchman J., Wójcik M.* Critical assessment of Eurocode approach to stability of metal cylindrical silos with corrugated walls and vertical stiffeners // *Thin-Walled Struct.* – 2015. – 95, N 10. – P. 335 – 346.
23. *Sowiński K.* Buckling of shells with special shapes with corrugated middle surfaces – FEM study // *Engng. Struct.* – 2019. – N 179. – P. 310 – 320.
24. *Wang X., Wang Z., Wang N.* Finite Element Analysis for the Stiffness and the Buckling of Corrugated Tubes in Heat Exchanger // *Adv. Mater. Res.* – 2012. – N 468 – 471. – P. 1675 – 1680.
25. *Wennberg D., Wennhage P., Stichel S.* Orthotropic Models of Corrugated Sheets in Finite Element Analysis // *Int. Scholarly Research Notices, Mechanical Engng.* – 2011. – 3, Article ID 979532. – 9 p.
26. *Xia Y., Friswell M.I., Flores E.I.S.* Equivalent models of corrugated panels // *Int. J. Solids and Struct.* – 2012. – 49, N 13. – P. 1453 – 1462.
27. *Zhang J., Zhang S., Cui W., Zhao X., Tang W., Wang F.* Buckling of circumferentially corrugated cylindrical shells under uniform external pressure // *Ships and Offshore Struct.* – 2019. – 14, N 8. – P. 879 – 889.

Надійшла 02.03.2021

Затверджена до друку 19.12.2021