Б . М . К і ф о р е н к о [1], С . І . К і ф о р е н к о [2]

ІНВАРІАНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНО КЕРОВАНИХ СИСТЕМ

[1]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
вул. П. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна; e-mail: bkifor@ukr.net
[2]Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій
і систем НАН України та МОН України,
пр. Глушкова, 40, Київ, 03680, Україна; e-mail: skifor@ukr.net

Abstract. A new concept of cost-target invariance of optimal controls for the dynamical systems is introduced. A few types of optimization problems are considered, for which in the process of analyzing the necessary optimality conditions a relationship between the control functions is obtained which do not depend on the initial and final conditions of the maneuver and the control quality criterion. There is reason to believe that these relations violate Leibniz's principle of sufficient reason. The relevance of determining the nature of these relationships is due to the need to solve the problem of the possibility of their practical use since this greatly simplifies the structure of the object control system and increases the efficiency of management. The results of the study of invariant relations of both regular and singular controls of the motion of dynamical systems are presented. The latter appeared to be especially effective in controlling the movement of aircraft and rockets in the atmosphere. For the controlled objects, the motion of which is described by the systems of linear differential equations with constant coefficients, the shown by Feldbaum invariant relationships between the moments of switching of control functions are analyzed. An analysis of these relationships showed that the oscillatory systems have an energy time constant in addition to the known time constant. The nature of this invariance is examined. The examples of its application both in the analysis of optimal motion control of technical objects and for describing the processes in living nature.

Key words: dynamical system, optimal control, regular and singular control, invariant relationships, the principle of minimum energy dissipation.

Вступ.

У формулюванні будь-якої варіаційної проблеми міститься інформація про функціонування керованого об’єкта, якого представлено рівняннями руху. Якщо мета конкретного маневру досяжна, функції керування, що забезпечують її досягнення найкращим чином, залежать від заданих граничних умов і умов трансверсальності. У той же час існує декілька класів варіаційних задач, необхідні умови оптимальності яких містять співвідношення між керуючими функціями, інваріантні щодо зміни умов, зазначених в постановці задач. При аналізі оптимального керування в деяких практично цікавих задачах Майєра автори отримали співвідношення, при записі яких приєднані функції не використовуються [7, 8]. Більше того, зазначені співвідношення можна записати взагалі без постановки будь-якої варіаційної задачі, необхідно знати тільки рівняння руху об’єкта. Отже, вони висловлюють якусь особливу властивість самого об’єкта, незалежну від суб’єктивної складової формулювання варіаційної задачі. Ця незалежність представляється такою, що порушує універсальний принцип причинної обумовленості результатів розв’язку кожної конкретної проблеми від причин, що її викликали, формалізованих у постановці задачі. Вказане протиріччя вимагає аналізу властивостей керованого об'єкта, які спричиняють цю інваріантність. Відсутність надійних відповідей на ці питання викликає природну недовіру до одержаних розв'язків будь якої конкретної задачі, яка виправдана принципом sive lex rationis enoughis Лейбніца, який стверджував, що жодне явище не може бути істинним або дійсним, жодне твердження не є істинним без достатніх підстав, чому це так, а не інакше.

Нижче розглянемо три типи таких варіаційних задач, які дозволяють отримати інваріантні співвідношення як для регулярних, так і для сингулярних оптимальних траєкторій. У розділі 1 аналізується природа інваріантних співвідношень. У розділі 2 аналізуються проблеми використання сингулярних керувань в механіці польоту ракет і космічних апаратів (КА). Інваріантні співвідношення між функціями керування в цьому випадку істотно підвищують ефективність управління рухом, проте розрахунок відповідних траєкторій ускладняється, оскільки проблема їх побудови виявилася некоректною за Тихоновим. Автор статті запропонував метод подолання цих труднощів, удосконалений разом із В.Т.Злацьким [4], який дозволив отримати розв'язки практично цікавих задач динаміки ракет (огляд розв'язків в [5, 20]). Що ж до подальшого розвитку теорії сингулярного оптимального керування, доречно вказати, що умова сингулярності не є ознакою винятковості ситуації, а скоріше, сигнал про те, що задача досить складна і її не можна до кінця дослідити лише з використанням принципу максимума Понтрягіна (необхідної умови першого порядку). А перехід до умов більш високого порядку диктується загальним рівнем розвитку науки, оскільки робота з першими наближеннями визнається вже недостатньою.

У розділі 3 представлено результати дослідження інваріантності при моделюванні функціонування в живій природі методами теорії динамічних систем. Досліджуються проблеми інваріантності динамічних систем з надлишковим керуванням, типовим для процесів керування біологічних об'єктів. Отримана інформація дозволила сформулювати варіаційний принцип мінімуму дисипації енергії керування, викликаної можливою неузгодженістю надлишкових керувань. Встановлюється зв'язок цього принципу з формулами, що описують множину Парето в теорії аналітичних ігор. Аналіз необхідних умов оптимальності в варіаційній задачі про керований рух біологічних об'єктів, проведений в цій роботі, підтвердив гіпотезу П.К.Анохіна про конкретний результат діяльності як системоутворюючий фактор, що забезпечує доцільне функціонування об'єктів. Запропоновано принцип Анохіна – Парето як форму універсального принципу мінімуму дисипації енергії, специфічну для опису процесів в живій природі.

1. Проблеми інваріантності відносно ціни і цілі в теорії оптимального керування.

У цій частині статті ми досліджуємо природу інваріантних співвідношень між керуючими функціями в теорії динамічних систем. Розглянемо варіаційні задачі, анонсовані у Вступі, які дозволяють отримувати інваріанти відносно ціни і цілі керування як для регулярних, так і для сингулярних оптимальних траєкторій. Актуальність визначення характеру цих взаємозв'язків обумовлена необхідністю вирішення проблеми можливості їх практичного використання, оскільки саме їх застосування значно збільшує ефективність системи керування об'єктом.

Нижче під терміном «рух» розуміються будь-які процеси, які супроводжують зміну стану досліджуваного об'єкта. Оскільки мова йде про математичне моделювання, інформація про стан об'єкта вважається заданою набором n його фазових координат. Фізичний зміст і кількість координат в кожному конкретному випадку визначаються природою об'єкта, що моделюється, формалізованою рівняннями його руху. Вимоги до математичної структури модельного формалізму, що застосовується для описання функціонування об'єкта, природно визначити класичною максимою Ньютона: пояснити якомога більшу кількість фактів якомога меншим числом вихідних положень.

1.1. Вихідні положення. *Перше вихідне положення – скінченність* n. Вибір кількості змінних, які задають стан об'єкта, визначається мірою адекватності математичної моделі, що формулюється, конкретному об'єкта. Оскільки повна адекватність принципово недосяжна, єдиною раціональною мірою представляється адекватність моделі тій проблемі, для дослідження якої вона формулюється. Йдеться про угоду про n суттєвих характеристик об'єкта і про всі інші, впливом яких на процеси, що моделюються, вважається можливим в рамках конкретного дослідження знехтувати.

Друге вихідне положення – передбачуваність зміни стану об'єкта. Вважається, що знання n фазових координат об'єкта в момент часу $t = t_0$: $x(t_0) = \{x_1(t_0),$ $x_2(t_0),\ldots, x_n(t_0)\}$ дозволяє з використанням обраної математичної структури моделі простежити за зміною стану цього об'єкта протягом деякого інтервалу часу, тобто при $t > t_0$. Формально процес зазначеної зміни в статті представлено в термінах теорії керованих динамічних систем:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u). \tag{1}$$

Тут $u = \{u_1, u_2, ..., u_r\} \in U$ – вектор керування; U – множина допустимих керувань.

Третє вихідне положення, яке використовується при проведенні подальшого аналізу – *надлишкова керованість динамічної системи* (1), формально представлена нерівністю $r \geq n$. Надалі передбачається, що в процесі нормального функціонування компоненти системи впорядковано взаємодіють в умовах зазначеної надлишковості.

1.2. Варіаційна задача Майєра. Для дослідження динаміки об'єктів, рух яких описується системою диференціальних рівнянь (1) з надлишковим керуванням, сформулюємо варіаційну задачу Майєра про перехід з деякого початкового положення в кінцевий стан з мінімальним значенням функціоналу:

$$J[u(t)] = \Phi(x(t_f)). \tag{2}$$

*1.2.1. Розв'язання варіаційної задачі***.** Якщо рішення будь-якої варіаційної проблеми існує, воно задовольняє необхідні умови оптимальності як регулярних, так і сингулярних керувань. Ці умови вибирають *оптимально керовані* рухи динамічної системи з *безлічі допустимих* рухів (безлічі розв'язків системи диференціальних рівнянь (1) при *будь-якому керуванні* $u(t) \in U$). Нехай функції $f(x, u) = f_i(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r)$, $\Phi(x(t_f))$, початковий $x(t_0)$ і кінцевий стан $x(t_f)$ керованого об'єкта визначені таким чином, що аналіз оптимального керування може бути виконаний з використанням принципу максимуму Понтрягіна. Важливою особливістю цього методу аналізу є збереження структури одержуваних формул при вивченні динаміки як детермінованих, так і стохастичних систем. Необхідно лише замінити в формулах всі детерміновані параметри їх математичними очікуваннями. Ця особливість отриманих співвідношень особливо важлива при вивченні управління в живій природі, оскільки ці процеси завжди є стохастичними.

Відповідно до процедури принципу формується функція Гамільтона – Понтрягіна

$$H = \psi_1 f_1(x,u) + \psi_2 f_2(x,u) + \ldots + \psi_n f_n(x,u), \tag{3}$$

де ψ_i, $i = \overline{1, n}$ – спряжені змінні, що задовольняють системі диференціальних рівнянь

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H(x,u)}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Необхідна умова оптимальності: якщо розв'язок задачі існує, то існує нетривіальний розв'язок спряженої системи (4). Оптимальне керування визначається в кожний момент часу з умови:

$$u(t) = \arg\max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u). \tag{5}$$

Побудова оптимального розв'язку даної задачі Майєра звелася до розв'язання двоточкової крайової задачі для системи диференціальних рівнянь (1), (4) при виборі керуючих функцій з умови (5). Необхідні умови для визначення постійних інтегрування системи (1), (4) складаються з початкових і кінцевих умов: $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, а також умов трансверсальності $\psi_i(t_f) = -\partial\Phi(x(t_f))/\partial x_i$. Таким чином забезпечується залежність вектор-функції $\psi(t)$ від кінцевих умов і функціоналу задачі. Керування, визначене з умови (5), залежить як від поточного стану системи $x(t)$ в момент t, так і від спряженого вектора $\psi(t)$. Так здійснюється управління для досягнення конкретної мети з урахуванням обраної оцінки якості. Тому природно $\psi(t)$ називати вектором наведення.

1.3. Особливості доцільного функціонування об'єктів з надмірним керуванням. Представлені вище результати отримано без урахування третього вихідного положення, прийнятого при формулюванні варіаційної проблеми в термінах теорії керованих динамічних систем. Врахування нерівності $r \geq n$ при аналізі необхідних умов оптимальності призводить до несподіваного результату – зниження числа ступенів свободи керування об'єктом при доцільному функціонуванні. У сформульованій вище варіаційній задачі кількість ступенів свободи дорівнює числу керуючих функцій. При доцільному функціонуванні в точці максимуму функції H по управлінням u_k повинні виконуватися додатково $(r-n+1)$ умов сумісності керувань. Припустимо також, що функції керування при нормальному функціонуванні не досягають своїх граничних значень.

Тоді в точці максимуму функції H по u_k повинні виконуватись умови $\partial H / \partial u_k = 0$ $\forall k = \overline{1, r}$:

$$
\begin{aligned}
&\psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_1} + \ldots + \psi_n \frac{\partial f_n}{\partial u_1} = 0; \\
&\psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + \ldots + \psi_n \frac{\partial f_n}{\partial u_2} = 0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_r} + \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_r} + \ldots + \psi_n \frac{\partial f_n}{\partial u_r} = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Уздовж регулярних дуг оптимальної траєкторії спряжені функції одночасно не дорівнюють нулю в зв'язку з нетривіальністю розв'язку спряженої системи, постульованою як принципом максимуму Понтрягіна, так і динамічним програмуванням Беллмана. Отже, повинні виконуватися умови існування нетривіального розв'язку системи (6) як системи лінійних однорідних рівнянь відносно $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, тобто повинні дорівнювати нулю всі $r-n+1$ мінори розміру $n \times n$ матриці системи (6):

$$\det A_j = 0 \qquad j = \overline{n, r},$$

де

$$
A_j = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\frac{\partial f_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial u_{n-1}} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_n}{\partial u_{n-1}} \\
\frac{\partial f_1}{\partial u_j} & \frac{\partial f_2}{\partial u_j} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_n}{\partial u_j}
\end{pmatrix}. \tag{7}
$$

Принциповою особливістю цих умов є їх незалежність від координат вектора наведення. Тому вони є *інваріантними* щодо телеологічних аспектів будь-якої варіаційної задачі Майєра для досліджуваного об'єкта. Більш того, ці умови можуть бути виписані навіть до формулювання будь-якої варіаційної задачі. Необхідно лише мати інформацію про природу об’єкта в формі системи (1).

Поняття «інваріантність» в якості наукового терміну введено в теорію автоматичного керування Г.І.Щипановим в 1939 році [14] як умови незалежності однієї або декількох регульованих величин від зовнішніх збурень. У нашій роботі вводиться в розгляд нове поняття – інваріантність як спосіб узгодження надлишкових керувань, який не залежить від мети і оцінки якості керування в кожному конкретному випадку. Зрозуміти причину виникнення інваріантності і її природу вдалося в процесі аналізу руху оптимально керованих динамічних систем. Виявилося, що ці співвідношення випливають з необхідних умов оптимальності, будучи умовами сумісності надлишкових керувань на оптимальному режимі. Оцінюючи інваріантність цих співвідношень для варіаційних задач Майєра, академік М.М.Моїсеєв стверджував, що цей факт має самостійний загальнонауковий інтерес [10].

Нижче представлено новий метод дослідження природи інваріантного керування динамічними системами. Досліджено можливість використання гідродинамічної аналогії для модифікації алгоритмів регулярного та сингулярного керування динамічними системами. Проілюструємо цей метод на прикладі типової для механіки польоту задачі термінального управління зі скалярним керуванням $u \in [0,1]$:

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + uf_1(x);\ x = \{x_1, ..., x_n\}';\ J(u) = \varphi(x(t_f)) \to \min_u . \tag{8}$$

Тут x – n-вимірний фазовий вектор; u – скалярне керування; '(штрих) – операція транспонування. Для системи (8) представимо гамільтоніан у вигляді:

$$H(x,\psi,u) = H_0(x,\psi) + uH_1(x,\psi);\ H_0(x,\psi) = \psi' f_0(x);\ H_1(x,\psi) = \psi' f_1(x). \tag{9}$$

Спряжена система (4) записується у вигляді:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial f_0'}{\partial x}\psi - u\frac{\partial f_1'}{\partial x}\psi. \tag{10}$$

Керування на регулярних дугах оптимальної траєкторії приймає граничні значення: $u \in [0,1]$ при $H_1(x,\psi) > 0$; $u(t) = 0$ при $H_1(x,\psi) < 0$. Вважається, що сингулярне керування $u(t)$ належить відкритому ядру множини допустимих керувань, тому необхідна умова його оптимальності зводиться до виду:

$$\frac{\partial H(x,\psi,u)}{\partial u} = H_1(x(t),\psi(t)) = 0. \tag{11}$$

Якщо умова (11) виконується тотожно на інтервалі $t \in [\tau, \vartheta]$ ненульової тривалості, відповідна ділянка оптимальної траєкторії сингулярна і безпосередньо з умови (11) обчислити особливе керування неможливо. Ліва частина цього співвідношення є новим першим інтегралом системи рівнянь (8), (10). Для його обчислення сингулярного керування виконується співвідношення (11) за часом. Результат диференціювання зручно представити у формі

$$\frac{d}{dt}H_1(x(t),\psi(t)) = -\{H_0, H_1\} + u(t)\{H_1, H_1\} \equiv 0 , \tag{12}$$

де через $\{v(t), w(t)\}$ позначено дужку Пуассона. Оскільки дужка Пуассона від однакових функцій тотожно дорівнює нулю, співвідношення (12) являє собою не рівняння для визначення керування, що забезпечує рух по траєкторії, вздовж якої виконується перший інтеграл (11) системи диференціальних рівнянь (1), (3), а новий перший інтеграл, що має вигляд $\{H_0, H_1\} = 0$. Обчислюючи другу похідну за часом від перемикаючої функції $H_1(x(t),\psi(t))$ і прирівнюючи її нулю, отримуємо рівняння для обчислення сингулярного керування

$$\frac{d^2}{dt^2}H_1 = \{H_0,\{H_0,H_1\}\} + u(t)\{H_1,\{H_0,H_1\}\} = 0. \tag{13}$$

Дослідимо гідродинамічне трактування системи диференціальних рівнянь руху (8), (10). Швидкість руху об'єкта складається з двох складових. Поле швидкостей $f_0(x)$ переносить об'єкт незалежно від бажання керуючого суб'єкта. Змінити свою швидкість руху керуючий може додаючи до $f_0(x)$ частину $u \in [0,1]$ швидкості $f_1(x)$ другого поля. Умови оптимальності сингулярного керування при незаданій тривалості перехідного процесу зводяться до системи:

$$H_0(x,\psi) = \psi' f_0(x) = 0;\;\; H_1(x,\psi) = \psi' f_1(x) = 0;\;\;\; \{H_0,H_1\} = 0\,. \tag{14}$$

Перші два рівняння системи (14) в сукупності свідчать про ортогональність вектора ψ площині, в якій лежать вектори $f_0(x)$ і $f_1(x)$. Таким чином, $\psi = \lambda[f_0(x)\times f_1(x)]$. Зрозуміло, що в цій же площині буде розташований і обраний в цей момент часу $t \in [t_0,\, t_1]$ результуючий вектор dx/dt при будь-якому значенні керування $u(t)$.

Третє рівняння системи (7), що має вигляд $\psi((f_0 \mathrm{grad}\, f_1) - (f_1 \mathrm{grad}\, f_0)) = 0$, може бути, з урахуванням $\psi = \lambda[f_0(x)\times f_1(x)]$, представлено у формі $\psi \times \mathrm{rot}\,\psi = 0$, але в чому сенс цього представлення – не ясно.

1.3.1. Доповнення до теореми Фельдбаума про кількість перемикань. Звернемося до частинного випадку динамічних систем, що описуються диференціальними рівняннями, праві частини яких лінійно залежать від керувань. Розглянемо лінійні системи з постійними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \tag{15}$$

Тут A і B – матриці розмірів $n\times n$ і $r\times n$, відповідно; x – n – мірний фазовий вектор; u – r – мірний вектор керування. Матриці A і B – постійні, множина допустимих керувань U – r – мірний паралелепіпед.

Нехай корені характеристичного рівняння спряженої системи дійсні. В цьому випадку по теоремі Фельдбаума про кількість перемикань будь-яке з r керувань приймає лише свої граничні значення і має не більше $(n-1)$ перемикань. При цьому інтервал керування розбивається точками τ і ϑ на три підінтервали, довжина Ω відрізка $[\tau,\, \vartheta]$ не залежить не тільки від граничних умов і функціонала задачі, але і від граничних значень керуючих функцій u_1, u_2, v_1 і v_2, тобто від розмірів множини допустимих керувань. При розгляді в якості прикладу задачі керування коливаннями маятника в середовищі з опором інтервал Ω – це час, за яке вся потенціальна енергія некерованого маятника при максимальному відхиленні від положення рівноваги переходить в кінетичну – при проходженні положення рівноваги. Таким чином, мова йде про нове поняття – ***енергетична стала часу*** динамічної системи [18].

У загальному випадку зі всієї множини перемикань, допустимих теоремою Фельдбаума, моменти тільки $(n-1)$ перемикань підбираються, виходячи з необхідності задоволення граничних умов і умов трансверсальності варіаційної задачі Майєра.

2. Проблема оптимального керування рухом ракети в атмосфері.

Основна відмінність механіки космічного польоту від класичної астродинаміки – необхідність врахування сил тяги двигунів КА. Необхідність досягнення космічних швидкостей, багаторазово переважаючих звичні для наземних і повітряних транспортних засобів, в умовах неможливості енергетичного підживлення із Землі, робить проблему раціональності управління безпрецедентно гострою. У зв'язку з цим проблеми механіки польоту ракет з найперших робіт наукового етапу дослідження розглядаються як варіаційні. Нижче проведено аналіз проблематики інваріантних керувань в механіці польоту ракет в атмосфері при виведенні космічних апаратів на орбіту супутників планети і на відлітні траєкторії до планет сонячної системи і за її межі, оскільки використання інваріантних співвідношень між керуючими функціями в цьому випадку істотно підвищує ефективність управління рухом. Аналіз отриманих розв'язків класичних задач ракетодинаміки дозволив сформулювати принцип конструктивного вдосконалення ракет, який встановлює не очевидний з точки зору здорового глузду вибір раціонального типу ракетного двигуна в процесі поліпшення питомих показників.

2.1. Математична модель двигуна ракети, що рухається в атмосфері.

Абсолютну більшість результатів досліджень оптимального керування тягою ракет отримано при використанні спрощеного формулювання залежності величини тяги T від секундної масової витрати робочого тіла q і швидкості реактивного струменя V_e: $T = qV_e$. Ця формула справедлива для ракетних двигунів, що працюють у вакуумі. При русі в атмосфері зазначена залежність ускладнюється:

$$T = qV + (p_\sigma - p_h)\sigma. \tag{16}$$

Тут V – швидкість реактивного струменя на зрізі сопла двигуна; p_σ – тиск газів у струмені на зрізі; σ – площа зрізу сопла; p_h – тиск в атмосфері. Запропоновано величину протитиску $p_h\sigma$ об'єднувати з аеродинамічним опором ракети F. При цьому вираз суми сил тяги та опору буде мати вигляд:

$$T\vec{e} + \vec{F} = T_v\vec{e} + \vec{\Phi}, \tag{17}$$

де $\vec{e}$ – одиничний вектор напрямку тяги; T_v – величина тяги у вакуумі. Перший член тут містить добуток основних керуючих функцій T_v і $\vec{e}$. На величину другого

$$\vec{\Phi} = \vec{F} - p_h\sigma\vec{e} \tag{18}$$

керування $\vec{e}$ впливає несуттєво, тому що при швидкостях польоту, характерних для ракет, величина F значно перевищує $p_h\sigma$ на більшій частині траєкторії. Це дозволяє в першому наближенні вважати величину $\vec{\Phi}$ незалежною від керування і замінити витратну характеристику двигуна (16) спрощеною $T_v = qV_e$, де q – масова витрата робочого тіла; V_e – коефіцієнт, який має розмірність швидкості і не залежить, по одновимірній теорії сопла Лаваля, від q. Таким чином, в класичній формулі (1), яка в більшості робіт використовується при аналізі руху ракет в атмосфері, величина ефективної швидкості витікання V_e приймається постійною:

$$V_e = V + \frac{(p_\sigma - p_h)\sigma}{q}. \tag{19}$$

При цьому задача виконання заданого маневру з максимальним корисним навантаженням при фіксованій початковій масі зводиться до визначення умов виконання маневру з мінімальними паливними витратами. Отримане таким чином істотне спрощення задачі дозволило вирішити, хоча і в першому наближенні, ряд найважливіших задач механіки. Обчислення траєкторій руху ракет з вимкненим двигуном виконується методами астродинаміки. Найбільш складним є обчислення траєкторій руху ракет в атмосфері на ділянках сингулярного керування.

2.2. Проблема дроселювання тяги при русі в атмосфері. Ключова проблема обчислення траєкторій руху літаючих апаратів в середовищі з опором полягає в тому, що ці траєкторії включають в себе, крім пасивних дуг та ділянок максимальної тяги, ділянки сингулярного керування, на яких величина тяги істотно дроселюється, при цьому витрата робочого тіла двигуна і тиск газів в струмені зменшуються пропорційно зміні величини тяги. Це призводить до того, що гіпотеза про постійність ефективної швидкості витікання V_e стає тим менш обґрунтованою, чим глибше ступінь дроселювання тяги. Зазначена особливість призвела до необхідності розробки більш точного математичного опису ракетного двигуна як об'єкта керування. Відповідна математична модель, яка запропонована автором в 1982 році, нелінійна на відміну від спрощеної моделі і представляє залежність величини тяги двигуна від витрати палива в усьому діапазоні зміни витрати: від нуля до максимального значення.

Перехід від спрощеної формули $T = qV_e$ до більш точного співвідношення (16) привів до несподіваного результату: до заміни дуг проміжної плавно змінної тяги ділянками ковзного режиму роботи двигуна. Відмінність між цими режимами принципова: якщо сингулярний режим пов'язаний з плавною, за винятком скінченного числа точок розриву, зміною керування, то ковзний режим – це нескінченне число перемикань керування на кінцевому проміжку часу. Оптимальні траєкторії з ділянками ковзного режиму обчислюються методом Гамкрелідзе. При цьому формально задача обчислення оптимальної траєкторії співпадає з класичною задачею оптимізації з сингулярним керуванням. Зауважимо, що отримання ковзного режиму при аналізі будь-якої оптимізаційної задачі має насторожити дослідника, оскільки навіть сама можливість включення відповідної дуги до складу траєкторії заперечується основною гіпотезою сучасної теорії керування – гіпотезою про безінерційність керування. І лише в тому випадку, коли керування реального об'єкта дійсно малоінерційне, інформація про оптимальність ковзних режимів має не тільки теоретичний інтерес. В задачах механіки космічного польоту величина тяги може вважатися безінерційним керуванням лише при кінцевому числі перемикань на оптимальній траєкторії зі скінченною тривалістю польоту. Це підтверджується, зокрема, діаграмами тяги для реальних ракетних двигунів, що наведено в монографіях по ракетодинаміці (наприклад, [1]).

Проведемо оцінку ефективності включення сингулярних дуг до складу траєкторії руху ракет у середовищі з опором. Чи виправдане воно? Справа в тому, що включення до складу оптимальної траєкторії таких дуг (ділянок змінної тяги) пов'язане з суттєвим ускладненням конструкції рухомої системи: замість рушія, розрахованого на роботу в режимі максимальної тяги, який, можливо, допускає неодноразове включення, необхідний рушій, що допускає, крім того, ще й зміну величини тяги часто за досить складною програмою. Тому дуже важливим етапом дослідження побудови оптимальної траєкторії з ділянками сингулярного керування є оцінка ефективності цього керування. Для цього значення функціоналу на оптимальній траєкторії доцільно порівняти з тими значеннями, які можна отримати при інших, нехай і не оптимальних, але таких режимах керування, які можуть бути легко реалізовані. Важливо зрозуміти, чи можна отриманий квазіоптимальний розв'язок дійсно реалізувати, або це тільки побіжний результат оптимізації, який не має сенсу. Можливість отримання такого помилкового результату оптимізації закладена в апріорній неоднозначності самого процесу пошуку з використанням необхідних умов екстремуму. Кожен розрахунок закінчується зазвичай в ситуації, коли значення функціоналу практично стабілізується. Це може бути як наслідком досягнення мінімуму, так і наслідком неефективності методу мінімізації. Добре, коли є аналітичний розв'язок будь-якої тестової задачі, з яким можна порівняти отриманий результат, наприклад, класичної задачі Годдарда. Але впевненість авторів роботи [21] в правильності вибору математичної моделі ракети для задачі про управління підйомом ракети-носія «Аріан-5» базується лише на не більше ніж правдоподібному твердженні про практичну збіжність процесу мінімізації. У сучасній науці використання правдоподібних тверджень досить широко поширене, особливо при теоретичних дослідженнях прикладних проблем, проте використовувати такі міркування для підтвердження валідності обраної математичної моделі досліджуваного процесу неприпустимо.

2.2.1. Оцінку ефективності сингулярного керування проведемо на прикладі оптимізації руху в вертикальній площині. Рух центру мас літального апарату (ЛА) без підйомної сили з тангенціальним напрямком тяги описується системою:

$$\frac{dr}{dt} = v \sin \vartheta; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} \cos \vartheta;$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{a_0 (1 - p_h(r))\delta - F(r,v)}{m} - \frac{\sin \vartheta}{r^2}; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \left(v - \frac{1}{rv} \right) \frac{\cos \vartheta}{r}; \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{a_0}{V_0} \delta. \tag{20}$$

Тут r і φ – полярні координати центру мас ракети в обраній інерціальній системі координат, полюс якої розташований в центрі тяжіння; v – швидкість польоту: ϑ – кут нахилу вектора швидкості до місцевої трансверсалі. Гравітаційне поле планети вважаємо ньютонівським центральним. Рівняння (20) обезрозмірені стандартним чином. Розглянемо обчислення оптимальної траєкторії виведення ЛА на орбіту супутника планети, сформулювавши для цього варіаційну задачу про переміщення об'єкта, рух якого описується системою (20) з початкового стану ($r(0) = r_0$, $v(0) = v_0$, $m(0) = 1$, $\vartheta(0) = \vartheta_0$, $\varphi(0) = 0$) в кінцевий ($r(t_f) = r_1$, $\vartheta(t_f) = 0$, $m(t_f) = m_1$) з максимальним значенням швидкості $v(t_f)$. Кутова дальність точки виходу на орбіту і час виконання маневру не задані. Процедура обчислення оптимальної траєкторії представлена в роботі [12]. На рис. 1 – 3 наведені залежності від часу t керування δ, перемикаючої функції H_1 (рис. 1), фазових r, ϑ, v (рис. 2) і спряжених $\psi_r, \psi_v, \psi_\vartheta, \psi_m$ (рис. 3) змінних вздовж оптимальної траєкторії виведення ЛА на орбіту супутника Землі. Обчислення виконані при

$$F(r,v) = De^{-\alpha(r-1)} C_x(v) v^2;$$
$$C_x(v) = C_x^0 + b_1 v^4 (b_2 v^4 + b_3 v + b_4)^{-1}$$

при наступних числових значеннях параметрів: $C_x^0 = 0{,}05$; $b_1 = 0{,}15$; $b_2 = 1$; $b_3 = 3{,}23 \cdot 10^{-4}$; $b_4 = 1{,}63 \cdot 10^{-5}$; $D = 480$; $P_h^0 = 0{,}15$. За ділянкою розгону з максимальною тягою слідує приблизно такої ж тривалості сингулярна дуга і протяжна пасивна дуга. Коротка дуга максимальної тяги завершує розгін КА до орбітальної швидкості.

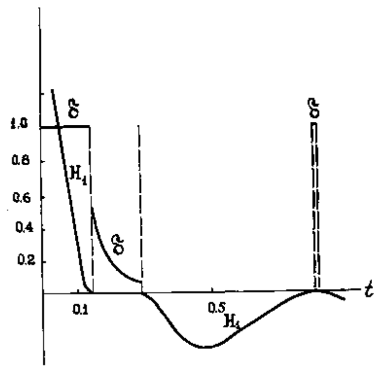

Рис. 1

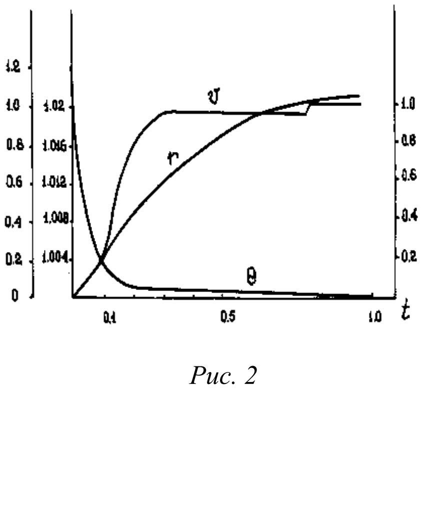

Рис. 2

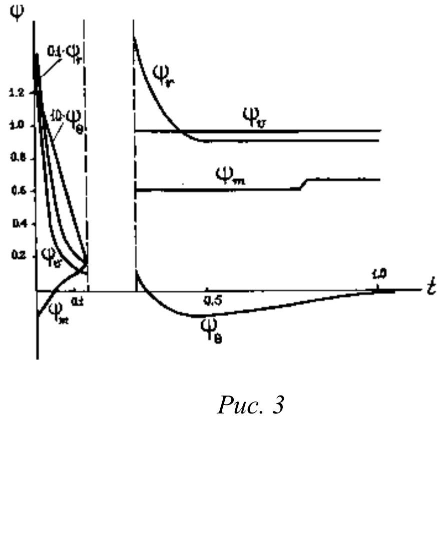

Рис. 3

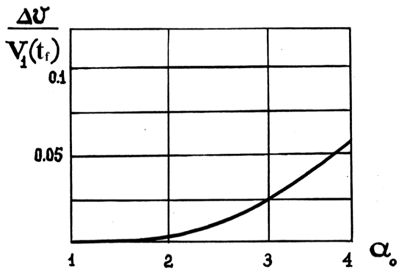

Рис. 4

Залежність ефективності оптимального керування при виконанні виведення ЛА на орбіту супутника планети проілюстрована на рис. 4. Кількісно оцінку ефективності визначаємо порівнянням швидкості ЛА при виведенні його на орбіту по схемі, проілюстрованій на рис. 1 – 3, і при виведенні на ту ж саму орбіту по простій схемі: дві активні дуги, які розділені пасивною дугою. Різницю значень цих швидкостей позначимо Δv, орбітальну швидкість – $V_1(t_f)$.

Через a_0 на рис. 4 позначено початкове реактивне прискорення (відношення максимальної тяги системи двигунів ЛА до його стартової маси). По осі ординат відкладено значення відношення Δv до $V_1(t_f)$.

Кількісну оцінку вказаної ефективності проілюструємо на прикладі перспективних ракет-носіїв. В таблиці наведено значення початкового реактивного прискорення a_0 відповідних носіїв в м/сек^2.

Орбіти \ Ракети-носії	SpaceX Starship	Falcon 9	CZ-5
Низька опорна	11,8349	15,3706	11,3505
Геоперехідна	11,9043	15,7646	11,8216
Відлітна до Марсу	11,9230	15,8731	11,9541
Відлітна до Плутону	11,9481	16,0213	12, 1367

Знання реактивного прискорення a_0 дає можливість встановити надлишок Δv швидкості руху носія, яку не має необхідності набирати, щоб задовольнити кінцеві умови варіаційної задачі. Таким чином, використовуючи формулу Ціолковського, встановимо економію ΔM маси палива при використанні сингулярного керування

$$\Delta M = M(t_f)\left(\exp\frac{\Delta v}{V_0} - 1\right).$$

Таким чином, проведений аналіз оптимального керування в механіці польоту ракет показав, що використання інваріантних співвідношень між керуючими функціями істотно підвищує ефективність управління рухом. Аналіз розв’язків класичних задач ракетодинаміки, результати якого узагальнені в монографії [9], дозволив сформулювати неочевидний з точки зору здорового глузду принцип конструктивного вдосконалення ракет при поліпшенні питомих показників двигуна і аеродинамічних характеристик корпусу ракети. Вперше формулювання цього принципу було запропоновано в статті [6] як наступну гіпотезу: 1) масова довершеність рушійної системи ракети повинна супроводжуватись (при досягненні деякого порогового значення питомої маси двигуна γ) переходом від нерегульованого двигуна до двигуна дросельованої тяги; 2) величина γ зменшується при удосконаленні аеродинамічних характеристик ракети.

Примітка. Цікаво, що практики давно оцінили ефективність регулювання тяги ракетних двигунів. Глибоке гнучке дроселювання тяги перших ступенів ракет дозволяє вирішити проблему забезпечення руху з обмеженням величини швидкісного напору. Крім того, для всіх ступенів стає можливим формування траєкторії польоту з обмеженим (комфортним) значенням перевантаження.

3. Дослідження інваріантності при моделюванні процесів функціонування в живій природі.

Застосування методів математичного моделювання в нашій роботі для вивчення проблем пошуку принципів, що визначають функціонування живої речовини, стимулюється тим, що лише взаємодія математики та біології допоможе здійснити одну з найбільших наукових революцій, а саме: здійснити математичну формалізацію біології [15]. У цій частині статті ми представляємо процес розробки нового принципу, що пояснює природу взаємодії різноманітних активних компонентів функціональних систем організму [8] при виконанні доцільних дій. Цю проблему було сформульовано у 1971 році творцем сучасної теорії функціональних систем П.К.Анохіним [3].

Для дослідження невичерпної багатоманітності властивостей біологічних об'єктів в статті застосовується системний підхід. З різних визначень поняття «система» використовується визначення, запропоноване засновником сучасної теорії функціональних систем П.К.Анохіним. В роботі [3] він зазначає, що термін «система» вживається там, де мова йде про щось зібране разом, організоване, але, як правило, зазвичай не згадується критерій, за яким компоненти зібрані, впорядковані, організовані. Нижче в своїй статті автор називає пошук і формулювання системоутворюючого фактору обов'язковим положенням для всіх видів і напрямків системного підходу. Він формулює основну гіпотезу про системоутворюючий фактор: упорядкованість у взаємодії безлічі компонентів системи встановлюється на основі ступеня їх сприяння отриманню системою наперед визначеного корисного результату. Важливо, що цей результат досягається шляхом упорядкування взаємодії компонентів системи в умовах їх надмірності, характерної для живої природи. Тому П.К.Анохін вважає основним при використанні системного підходу розкрити ті детермінуючі фактори, які звільняють компоненти системи від надлишкових ступенів вільності. Проблематика подолання надмірності керувань в живій природі докладно проаналізована в публікації [7]. Наш теоретичний аналіз варіаційної задачі, сформульованої у розділі 1.2, підтвердив припущення, висловлене П.К.Анохіним, що саме керування з метою досягнення визначеного корисного результату є визначальним фактором, що звільняє компоненти системи від зайвих ступенів вільності. Формальне доведення цього твердження базується на дослідженні особливості доцільного функціонування об'єктів з надмірним керуванням (див. розділ 1.3).

3.1. Аналіз результатів. В результаті будь-якого аналізу математичної моделі, як правило, виявляється розшифрованою ціла кількість фактів, які в цій моделі були зашифровані [10]. Зрештою, прикладна математика – це галузь науки, яка саме розробляє інструментарій для такого декодування. Основне питання тут полягає у тому, як декодовані факти співвідносяться з континуумом спостережуваних явищ, чи узгоджуються ці факти з фундаментальним припущенням, що майбутня теоретична біологія, мабуть, буде гібридною теорією судження та алгоритмічним поясненням [17].

Оцінюємо результати даного дослідження саме як гібрид здійсненої П.К.Анохіним спроби вивести системоутворюючий фактор з властивостей живого організму [3] та проведеного алгоритмічного оптимізаційного аналізу. Гібрид, на актуальності якого Леонард Ейлер наполегливо зосереджував увагу дослідників, стверджуючи, що кожен ефект у Всесвіті можна пояснити як із кінцевих причин за допомогою методу максимумів і мінімумів, так і з самих причин, але перш за все треба докладати зусиль, щоб відкрити доступ обома шляхами, бо тоді одне рішення підтверджується іншим [16].

Далі зупинимося на вивченні результатів використання математичного моделювання для дослідження інваріантності процесів у живій природі, узагальнених у шостому розділі колективної монографії [19]. Справа в тому, що математичне моделювання як інструмент для вивчення принципів теоретичної біології займає позицію між Сциллою та Харибдою двох висловлювань Н.М.Амосова [2]. З одного боку, сучасний рівень пізнання матеріального світу забезпечує науковий підхід до пояснення всіх речей, що існують. З іншого боку, використання імітаційного моделювання як методу пізнання жодним чином не наближує дослідника до розуміння законів живого мозку, хоча б через багатоваріантність можливих моделей розуму. Тому наведені нижче результати аналізу слід коментувати, дотримуючись класичної максими Ньютона: пояснити максимально можливу кількість фактів, використовуючи мінімально можливу кількість основних припущень.

Перше припущення, прийняте в цій роботі – скінченна кількість фазових координат об'єкта, що досліджується. Вибір кількості n змінних, які задають стан об'єкта, визначається мірою адекватності формульованої математичної моделі конкретного об'єкта. Йдеться про угоду про суттєві характеристики об'єкта і про всі інші, впливом яких на процеси, що моделюються, вважається можливим знехтувати в рамках дослідження, що проводиться. Друге припущення – передбачуваність зміни стану об'єкта. Передбачається, що в момент часу: $t = t_0$ знання n фазових координат об'єкта $x(t_0) = \{x_1(t_0),\ x_2(t_0), ..., x_n(t_0)\}$ дозволяє з використанням обраної математичної структури моделі простежити за зміною стану цього об'єкта протягом деякого інтервалу часу, тобто при $t > t_0$. Третє припущення, яке використовується при проведенні подальшого аналізу – це характерна для живої природи надлишкова керованість динамічної системи, яка формально представлена нерівністю $r > n$, де r – кількість функцій керування, що входять у рівняння руху об'єкта.

Які ж факти з максими Ньютона випливають з цих припущень? На нашу думку, мова йде про оцінку живих істот, які пройшли еволюційний відбір, як оптимальних і оптимально керованих, яка досить поширена в теоретичній біології (див. наприклад [8, 17]) починаючи ще за античних часів. Аристотель вважав оптимальність наріжним каменем в розумінні біологічних явищ. Разом з тим, досить переконлива критика концепції оптимальності в біології приведена в монографії В.Н.Новосельцева [11]. Важко не визнати справедливості судження автора про те, що поняття оптимальності біосистеми не відповідає постановці задач про оптимізацію керування динамічними системами в теорії керування. Пряме свідоцтво цього – досконаліcть біологічних систем, *a priori* недосяжна в системах технічних. Більш того, в недавній публікації [14] стверджується, що багато філософів і біологів вважають категорично неприйнятним саму можливість формулювання будь-яких законів в біології через варіабельність живих систем і непередбачуваність життєвих обставин.

Основний результат статті полягає в тому, що математичний аналіз проблеми П.К.Анохіна як задачі оптимізації дозволив визначити не очевидні *a priori* особливості доцільного раціонального функціонування надмірно керованих об'єктів. Аналіз цих особливостей дозволяє трактувати їх як форму універсального принципу мінімуму розсіювання енергії, специфічну для живої природи. Цей принцип називають експериментальним, оскільки він досі не був доведений логічно, хоча ми не знаємо жодних прикладів, які б йому суперечили [10]. Наведемо формулювання принципу[19]: «Розв'язання проблеми П.К.Анохіна щодо звільнення компонентів системи від зайвих ступенів вільності досягається відповідно до правила В.Парето, яке забезпечує максимально можливий рівень внутрішньої взаємодії керуючих впливів з метою мінімізувати втрати енергії керування при доцільному функціонуванні в живій природі».

У свій час академік Моїсеєв [10] писав про доречність принципу Парето для розуміння процесів, що відбуваються в живій природі. Він стверджував, що різноманітність форм життя певним чином пов'язана з безліччю можливих компромісів між забезпеченням власного гомеостазу та прагненням до досягнення узагальненого принципу мінімуму дисипації енергії. Значення ізоморфізму системоутворюючого фактора підкреслює П.К.Анохін у роботі [3], стверджуючи, що саме результат функціонування системи відповідно до запропонованого ним принципу є рушійним фактором прогресу всього живого на планеті. Емоційне забарвлення цього узагальнюючого висновку жодним чином не зменшує актуальність питання про те, як був встановлений цей ізоморфізм. Підтвердження гіпотетичного висновку П.К.Анохіна [3], отриманого із властивостей живого організму, одержаним нами теоретичним аналізом варіаційної проблеми (розділ 2) свідчить про ефективність теорії оптимального управління як методу пізнання матеріального світу. Інакше і не могло бути, оскільки, за Ейлером, у Всесвіті взагалі не відбувається нічого, в якому не з'являється якесь правило максимуму або мінімуму. Одному з авторів цієї роботи імпонує незатухаюча з часів Мопертьюї дискусія із зазначеної проблематики. Другому ж видається справедливим наступний вислів Геракліта, що нагадує сценарій пульсуючого Всесвіту. Він стверджував, що цей космос, один і той же для всіх, не створив ніхто з богів, ніхто з людей, але він завжди був, є і буде вічно живим вогнем, що мірно займається і мірно згасає.

Висновок.

У статті представлено огляд досліджень проблем керування рухом динамічних систем з акцентом на механіку космічного польоту. Основну увагу приділено удосконаленню методів розв'язання вироджених варіаційних задач про рух ракет в гравітаційних полях з урахуванням опору атмосфери. Ці задачі безпосередньо пов'язані з перманентно актуальною проблемою практичної космонавтики: збільшенням маси корисного навантаження, що виводиться ракетами-носіями на навколопланетні та відльотні орбіти. Обговорено сучасні підходи до розв'язання задач управління рухом ракет і космічних апаратів по траєкторіях з сингулярними дугами, оптимальними при русі тіла змінної маси в середовищі з опором. Представлені в роботі результати дають можливість оцінити виграш від використання оптимального керування, реалізація якого вимагає ускладнення конструкції та системи керування роботою ракетних двигунів в порівнянні з сучасними більш простими, хоча і не оптимальними законами керування.

Проведений в роботі аналіз необхідних умов оптимальності варіаційної задачі про керований рух біологічних об'єктів підтвердив гіпотезу П.К.Анохіна про конкретний результат діяльності як системоутворюючий фактор, що забезпечує доцільне функціонування об'єктів. Запропоновано пояснення особливостей функціонування біологічних систем, інваріантних щодо цілі та оцінки якості керування, що дозволило запропонувати універсальний принцип мінімуму розсіювання енергії в формі, характерній для живої природи.

Основний результат роботи – введення в розгляд нового поняття загальносистемної інваріантності як способу узгодження керуючих дій, що не залежить від мети і оцінки якості управління в кожному конкретному випадку і забезпечує мінімум вказаних втрат енергії. Зауважимо, що поняття «інваріантність» в якості наукового терміну введено в теорію автоматичного керування Г.І.Щіпановим [13] в 1939 р. Отримані і проаналізовані умови інваріантності, тобто незалежності однієї або декількох регульованих величин від зовнішніх збурень. У роботі вводиться в розгляд нове поняття – загальносистемна інваріантність як спосіб узгодження дій, що управляють, що не залежить від мети і оцінки якості управління в кожному конкретному випадку.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Введено нову концепцію інваріантності стосовно витрат і цілей оптимального керування для динамічних систем. Розглядаються кілька типів задач оптимізації, для яких в процесі аналізу необхідних умов оптимальності встановлено взаємозв'язок між функціями керування, які не залежать від початкових і кінцевих умов маневру та критерія якості управління. Ці співвідношення порушують принцип Лейбніца достатнього обгрунтування. Актуальність визначення характеру цих взаємозв'язків зумовлена необхідністю розв'язку проблеми можливості їх практичного використання, оскільки це значно спрощує структуру системи керування та підвищує ефективність керування. Представлено результати дослідження інваріантних співвідношень як регулярних, так і сингулярних керувань рухом динамічних систем. Останнє виявилося особливо ефективним у контролі руху літаків та ракет в атмосфері. Для керованих об'єктів, рух яких описується системами лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, аналізуються вказані Фельдбаумом інваріантні співвідношення між моментами перемикання функцій управління. Аналіз цих взаємозв'язків показав, що коливальні системи мають, крім відомої постійної часу, енергетичну постійну часу. У статті досліджено природу цієї інваріантності та наведено приклади її застосування як при аналізі оптимального керування рухом технічних об'єктів, так і для опису процесів у живій природі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динамічна система, оптимальне управління, регулярне та сингулярне управління, інваріантні співвідношення, принцип мінімального розсіювання енергії.

1. *Алемасов В.Е., Дрегалин А.Ф., Тишин А.П.* Теория ракетных двигателей. – Москва: Машиностроение, 1980. – 533 с.
2. *Амосов Н.М.* Разум. Сознание. Истина. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова, 1993. – 24 с.

3. *Анохін П.К.* Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. Принципы системной организации функций. – Москва: Наука, 1971. – 61 с.
4. *Злацкий В.Т., Кифоренко Б.Н.* О вычислении оптимальных траекторий с участками особого управления // Вычисл. и прикл. математика. – 1983. – Вып. 49. – С. 55 – 62.
5. *Кифоренко Б.Н.* Проблемы оптимального управления тягой ракет. – Киев: Наук. думка, 2018. – 193 с.
6. *Кифоренко Б.Н.* К вопросу об оптимальном управлении величиной тяги ракет в атмосфере // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1982. – № 3. – С. 21 – 27.
7. *Кифоренко Б.Н., Кифоренко С.И.* Принцип Анохина – Парето в теории оптимальных систем // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. – 1991. – № 5. – С. 187 – 191.
8. *Левич А.П., Фурсова П.В.* Задачи и теоремы вариационного моделирования в экологии сообществ // Фундаментальная и прикл. математика. – 2002. – **8**, № 4.– С. 1035 – 1045.
9. *Моисеев Н.Н.* Отзыв на работу Кифоренко Б.Н. «Проблемы оптимального управления тягой ракет и космических аппаратов». – Москва: ВЦ АН СССР, 1990. – 3 с.
10. *Моисеев Н.Н.* Человек, среда, общество. – Москва: Наука, 1982. –240 с.
11. *Новосельцев В.Н.* Теория управления и биосистемы: Анализ сохранительных свойств. – Москва: Наука, 1978. – 319 с.
12. *Хасенов Е.А.* Аппроксимация оптимального управления в вырожденных задачах механики полета. Диссертация. – Киев, 1985. – 122 с.
13. *Щипанов Г.В.* Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика. – 1939. – **4**, № 1. – С. 49 – 66.
14. *Banga J.R.* Optimization in computational systems biology // BMC Systems Biology. – 2008. – **2**, N 1. – P. 1 – 7.
15. *Coscia V., Fermo L., Bellomo N.* On the mathematical theory of living systems II: The interplay between mathematics and system biology // Computers and Mathematics with Applications. – 2011. – **62**. – P. 3902 – 3911.
16. *Euler L.* Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti. – Euler Archive. All Works. 65. 1774. – 331p.
17. *Green M.G., Piel J.A.* Theories of Human Development: A Comparative Approach. – New York: Psychology Press; 2015. – 462p.
18. *Kiforenko B.M.* Energy Time Constant of Dynamic System // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**. – N 2. – P. 237 – 286.
19. *Kiforenko B., Kiforenko S.* Invariant Relations in the Theory of Optimally Controlled Systems. In: *Kondratenko Y.P., Kuntsevich V.M., Chikrii A.A., Gubarev V.F.* (Eds) Advanced Control Systems: Theory and Applications. – Gistrup: River Publishers, 2021. – P. 167 – 201.
20. *Kiforenko B.N.* Singular Optimal Control of Rocket Motion (Survey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**. – N 3. – P. 237 – 286.
21. *Martinon P., Bonnans F., Laurent-Varin J., Trelat E.* Numerical study of optimal trajectories with singular arcs for an Ariane 5 launcher // J. of Guidance, Control, and Dynamics. – 2009. – **32**, N 1. – P. 51 – 55.

Надійшла 09.06.2021 Затверджена до друку 09.12.2021