

Б. П. Маслов

## НЕЛІНІЙНА СПАДКОВА ПОВЗУЧІСТЬ ІЗОТРОПНИХ КОМПОЗИТІВ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,  
вул. Гесстєрова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: maslov@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A nonlinear hereditary creep problem of the composites of random structure is solved within the framework of a second-order nonlinear theory. The hereditary functionals are used to construct the general constitutive relations of the complex stress state. Shapery's correspondence principle is generalized for the quasi-linear viscoelastic media as applied to the hereditary creep problems. A solution to the stochastic boundary problem on determining the stress concentration and stress relaxation in the metal matrix composite (MMC) is obtained. To obtain the full system of the viscoelastic equations of the second order, the method of successive approximation is used. The creep functions which are averaged locally in the case of the viscoelastic matrix and elastic inclusions are found. Also, the stress concentration parameters are determined. The examples are given showing the importance of the mutual influence of nonlinear elastic and viscous properties of the composite components on the stress redistribution near the inclusions in the MMC. As a practical result, a possibility to predict the long-term strength, when the field of viscoelastic stresses is known after the computer modeling in the neighborhood of inclusions.

**Key words:** hereditary creep, integral transform, isotropic materials, fractional hereditary kernel, overall properties, computer modeling.

### Вступ.

Важливим класом інженерних матеріалів є ізотропні композити з алюмінієвою матрицею, армованою хаотично орієнтованими пружними сфероїдальними включеннями. Такі матеріали широко використовуються в авіаційній і космічній техніці, в суднобудівній промисловості, нафтопереробних установках та ін. [5, 8, 14, 15]. Моделюючи процес тривалої дії навантажень на композити з металевою матрицею, необхідно враховувати ефекти повзучості, яка розвивається вже при досить низьких температурах. Це призводить до необхідності використання таких основних характеристик деформативності і міцності композитів: деформація повзучості, швидкість деформації повзучості, час релаксації, співвідношення границь повзучості і тривалої міцності.

Однією з актуальних задач механіки спадкової повзучості композитних матеріалів вважається задача прогнозування осереднених властивостей повзучості композиту за властивостями, способом армування та об'ємним вмістом його компонентів. Дослідженню різних аспектів процесу повзучості ізотропних композитних матеріалів присвячено велике число теоретичних і експериментальних робіт. Огляд отриманих результатів представлений в [5, 8, 10, 14]. Тут необхідно зазначити, що переважна більшість виконаних досліджень відноситься до лінійної області тривалого в'язкопружного деформування. Всі розв'язки будуються на основі лінійної теорії в'язкопружності Больцмана – Вольтерра [1, 7, 8, 11, 12, 19].

Відомо, що для більшості металокомпозитів область лінійності є відносно малою і задовільні результати отримуються при не дуже високому напруженні і малих тривалостях дії навантаження [3, 5, 9]. Нелінійні рівняння в'язкопружності в загальному

вигляді наведені в [8, 20]. Однак представлення нескінченним рядом кратних інтегралів не дає можливості ідентифікувати ядра і визначати їх параметри в типових експериментах. Більш перспективним для побудови нелінійних моделей спадкової повзучості представляється підхід, оснований на подібності ізохронних діаграм повзучості [9, 10, 20].

В роботі [9] цей алгоритм отримав подальший розвиток за рахунок розширення початкової умови подібності, в яке включена діаграма миттєвого деформування як ізохрона для нульового моменту часу. Розширення умови подібності дозволило побудувати нелінійну модель повзучості з інваріантним в часі характером нелінійності, який визначається діаграмою миттєвого деформування. В рамках моделі розв'язано задачі розрахунку деформацій нелінійної повзучості полімерних сполучних і армуючих волокон [10]. Проведено розрахунки і прогнозування деформацій нелінійної повзучості волокнистих односпрямованих композитів при розтягуванні вздовж напрямку армування.

Теорія спадкової пружності Вольєрра, що застосовувалася в роботах [1, 11, 12, 19] для розв'язання задач механіки повзучості, описує істотно зворотні процеси і передбачає лінійну залежність між напруженнями і деформаціями. Тому вона не завжди може бути застосована для опису повзучості металів навіть у першому наближенні. Однак можливі різні узагальнення теорії лінійної спадковості.

### §1. Постановка задачі.

Розглядається нелінійна повзучість ізотропних багатокомпонентних композитів. Матеріал піддається тривалому впливу одновісного розтягуючого навантаження  $P$ , прикладеного вздовж осі композитного зразка. Вважаємо, що між арматурою і матрицею існує повне зчеплення. Зовнішнє навантаження  $P$  з часом  $t$  не змінюється, так

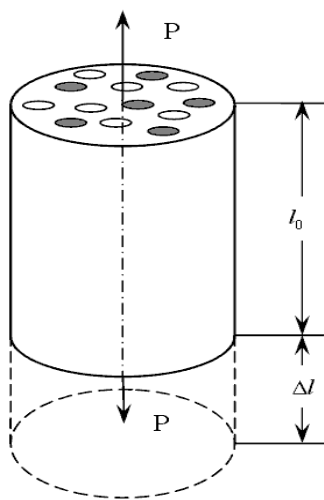


Рис. 1

що розтягуюче напруження  $\sigma(t)$  задається умовою  $\sigma(t) = \sigma_k h(t)$ ;  $(k = \overline{1, n})$ , де  $\sigma_k = \text{const}$  – номінальне значення напруження;  $h(t)$  – одинична функція Хевісайда ( $h = 0$  при  $t < 0$  та  $h = 1$  при  $t \geq 0$ );  $t$  – час. Початковий напружений стан ( $t = 0$ ) композиту та його компонентів є пружним ( $\sigma_k < \sigma_y$ ). Тут  $\sigma_y$  – границя текучості композиту [9].

Реакція композиту на тривалий ( $t \gg 0$ ) вплив зовнішнього навантаження (1.1) характеризується залежною від часу величиною повної деформації  $e(t)$

$$e(t) = e^e + e^c(t) = e^e + p(t),$$

що включає пружну компоненту  $e^e$  і компоненту повзучості  $e^c(t) = p(t)$ . Деформація повзучості  $p(t)$  визначається за величиною зміни  $\Delta l(t)$  початкової довжини  $l_0$  композитного зразка (рис. 1).

Для опису процесу повзучості композиту скористаємося нелінійною моделлю повзучості спадкового типу, побудованою на основі гіпотези подібності ізохронних діаграм повзучості та діаграми миттєвого деформування [9, 20]

$$\frac{de(t)}{dt} = [H(t)]^{-1} \frac{d}{dt} \left[ \sigma(t) + \int_0^t K_\alpha(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] = [H(t)]^{-1} \frac{d}{dt} (\sigma * \dot{g})(t). \quad (1.1)$$

Тут  $K_\alpha(t-\tau)$  – дробово-експоненціальне ядро спадковості Работнова, що характеризує вплив напружень в момент  $\tau$  на величину деформації повзучості в момент  $t$ ; крапка над символом означає похідну за часом. Величина  $H(t) = \frac{d\sigma^e(t)}{de(t)}$ , де  $\sigma^e(e)$  –

рівняння діаграми миттєвого деформування, фактично являє собою дотичний модуль повзучості матеріалу [20]. Задача полягає в прогнозуванні параметрів повзучості композиту в залежності від способу армування, властивостей і об'ємного вмісту його компонентів.

Деформації в спадковому матеріалі визначаються історією напружень  $\boldsymbol{\sigma}(s)$ ,  $s \in [0, t]$ , а також початковими умовами  $\mathbf{e}(t=0) = \mathbf{0}$ . Тоді для лінійного середовища в загальній тензорній формі після інтегрування (1.1) можна записати [7, 20]

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{J}(t-s) \frac{d}{ds} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, s) ds, \quad (1.2)$$

де  $\mathbf{J}(t)$  – тензор податливості (функція ретардації). Або в короткій символічній формі [7]

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{J} * \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}, t) = (\boldsymbol{\sigma} * \dot{\mathbf{J}})(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

де знаком  $*$  позначена операція інтегральної згортки. Таким чином, вираз  $(\boldsymbol{\sigma} * \dot{\mathbf{J}})(t) = (\boldsymbol{\sigma} * d\mathbf{J})(t)$  являє собою згортку Стільт'єса [5, 7]. Тут і далі прийнято наступні правила символічного позначення операцій із тензорами другого і четвертого рангів. Діадні і внутрішні добутки позначаються як:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})_{ij} = a_{im} b_{mj}; (\mathbf{A}\mathbf{b})_{ij} = A_{ikl} b_{lk}; (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ijkl} = a_{ij} b_{kl},$$

де передбачається сумування за індексами, які повторюються; тензорні величини позначено жирними символами. Сферичний  $\mathbf{I}_m$  і девіаторний  $\mathbf{I}_d$  оператори задані

$$\mathbf{I}_m = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}; \mathbf{I}_d = \mathbf{I} - \mathbf{I}_m; (\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij},$$

$\mathbf{I}$  – одиничний симетричний тензор четвертого рангу. Якщо  $f(t)$  – деяка неперервна функція на інтервалі  $0 \leq t < \infty$  та при  $t \rightarrow \infty$  вона поводить себе як експонента, то перетворення Лапласа – Карсона (LC) функції  $f(t)$  визначається наступним чином [7]:

$$LC\{f(t)\} = f(s) = f_s = s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (1.4)$$

Застосувавши перетворення LC до співвідношень (1.2), (1.3), знайдемо

$$\boldsymbol{\sigma}^e(s) = (\mathbf{C}\mathbf{e})(s) = (\mathbf{g}\boldsymbol{\sigma})(s).$$

Тут вважається, що миттєва пружна реакція матеріалу є фізично лінійною, тобто  $\mathbf{C}(s)$  є перетворення LC від функції релаксації  $\mathbf{C}(t)$ . В подальшому застосовуємо також закон миттєвого деформування другого порядку малості за величиною деформацій [4, 6]

$$\boldsymbol{\sigma}(s) = \mathbf{C}(s)\mathbf{e}(s) + \mathbf{e}(s)\underline{\mathbf{C}}(s)\mathbf{e}(s).$$

У лінійній теорії в'язкопружності розв'язок задач може отримуватись використанням принципу відповідності [8, 20, 21]. Природним є узагальнення цього принципу на задачі спадкової повзучості. Тут застосовуємо варіант визначальних рівнянь спадкової повзучості типу Работнова [20], де використовується концепція так званих модифікованих напружень  $\boldsymbol{\sigma}^e(t) = \partial W / \partial \mathbf{e}(t)$  і модифікованих (відновлених пружних) деформацій  $\mathbf{e}^e(t) = \partial U / \partial \boldsymbol{\sigma}(t)$ . Функція  $W(\mathbf{e})$  являє собою пружну енергію, функція  $U(\boldsymbol{\sigma})$  – додаткову пружну енергію.

Для аналізу задач прогнозу деформацій в рамках моделі спадкової повзучості (1.1) використовуємо узагальнений принцип відповідності Шепері [21], а також позначен-

ня, прийняті в [15, 17]. Позначимо  $\mathbf{x}$  – положення матеріальної точки в просторі;  $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$  – поточні деформації;  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  – поточні напруження;  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  – поточні переміщення. Припускаємо, відповідно до прийнятої гіпотези, що матеріал виявляє миттєву пружну реакцію та позначимо  $\mathbf{e}^e(\mathbf{x}, t)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t)$  – миттєві пружні деформації, напруження і переміщення, відповідно. Матеріал із пружними властивостями визначається [7, 8, 20] як середовище, поведінка якого відповідає першому і другому законам термодинаміки. З цього випливає існування функції накопиченої енергії  $W(\mathbf{e})$  і додаткової енергії  $U(\boldsymbol{\sigma})$ , які дають можливість знайти миттєві деформації (при повзучості) або миттєві напруження (процес релаксації)

$$U = U(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}, t); \mathbf{e}^e(t) = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}, t); \quad (1.5)$$

$$W = W(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t); \boldsymbol{\sigma}^e(t) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

Тут напруження і деформації віднесені до ортогональної декартової системи координат  $x_i$ . Наявність в списку аргументів функції координат  $\mathbf{x}$  і часу  $t$  говорить про можливість її використання для аналізу неоднорідних середовищ, композитних матеріалів в задачах, де істотним є фактор часу. Визначальні рівняння записуємо у формі спадкових співвідношень повзучості відносно модифікованих (відновлених) напружень  $\sigma_{ij}^e(t)$  та модифікованих (відновлених) переміщень  $u_i^e(t)$ .

$$\mathbf{u}^e(t) = (h * \dot{\mathbf{u}})(t); h(t) = E(t) / E^e. \quad (1.7)$$

Ці змінні пов'язані із фізичними переміщеннями  $u_i = u_i(x_j, \tau)$  у спадковому середовищі та напруженнями  $\sigma_{ij}(x_j, \tau)$  через спадкові інтеграли типу (1.3). Отже,  $u_i = u_i(x_j, \tau)$  – це фізичні переміщення, визначені в момент часу інтегрування  $\tau$ . Просторова координата  $x_j$  вважається віднесеною до початково ( $t = 0$ ) недеформованого тіла. Величина  $E(t - \tau)$  являє собою модуль релаксації, який є суттєвою характеристикою спадковості, що впливає на поведінку матеріалу у часі. Таким чином,  $h(t - \tau)$  можна трактувати як нормований, безрозмірний модуль спадкової релаксації. Обернене до (1.7) співвідношення запишемо

$$\mathbf{u}(t) = (g * \dot{\mathbf{u}}^e)(t); g(t) = E^e J(t). \quad (1.8)$$

Тут  $J(t - \tau)$  являє собою податливість повзучості. При цьому відомо, що  $E(t)$  та  $J(t)$  задовольняють рівнянню [1, 7, 13]

$$\int_{t_0}^t J(t - \tau) \dot{E}(\tau - t_0) d\tau = H(t - t_0),$$

де  $H(t)$  – ступінчаста функція Хевісайда.

**1.1. Узагальнений принцип відповідності Шепері щодо задач спадкової повзучості.** Принципи відповідності в лінійній теорії в'язкопружності зазвичай використовують на базі пружно-в'язкопружних співвідношень, що включають перетворені за Лапласом напруження і переміщення. Тут ми застосуємо узагальнений принцип відповідності для залежних від часу квазістатичних розв'язків нелінійних пружних і в'язкопружних крайових задач. Це дозволяє аналізувати спадкову задачу повзучості,

виходячи з відомого нелінійно пружного розв'язку. Рівняння рівноваги запишемо у вигляді

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (1.9)$$

Співвідношення між напруженнями Коші і модифікованими (відновленими) деформаціями  $\mathbf{e}^e(t)$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \left[ h * d \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}} \right)^e \right](t); \quad h(t) = g^{-1}(t). \quad (1.10)$$

Це призводить до трьох інтегродиференціальних рівнянь для трьох переміщень  $u_i(\mathbf{x})$  при підстановці в (1.9).

Розв'язок задачі спадкової повзучості (тобто напруження і зміщення в тілі при повзучості, які задовольняють (1.9) – (1.10)), має вигляд

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (h * d\boldsymbol{\sigma}^e)(t); \quad \mathbf{u}(t) = (g * d\mathbf{u}^e)(t); \quad h = g^{-1}; \quad g = h^{-1}; \quad (1.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e(t) = (g * d\boldsymbol{\sigma})(t); \quad \mathbf{u}^e(t) = (h * d\mathbf{u})(t); \quad \mathbf{e}^e(t) = (h * d\mathbf{e})(t), \quad (1.12)$$

де  $\boldsymbol{\sigma}^e$  і  $\mathbf{u}^e$  задовольняють рівнянням базової задачі нелінійної пружності (1.9), (1.5), (1.6) разом з граничними умовами  $\mathbf{t}^e = \mathbf{t}$  і початковою умовою  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^e(0) = \mathbf{0}$ . Співвідношення (1.11) визначають залежність поточних напружень  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  в задачах спадкової повзучості від відновлених пружних (модифікованих) деформацій  $\mathbf{e}^e(t)$ .

$$\mathbf{e}(t) = (\mathbf{e}^e * d\mathbf{g})(t) = \left( \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\sigma}} * d\mathbf{g} \right)(t), \quad \mathbf{g} = \mathbf{h}^{-1};$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (\boldsymbol{\sigma}^e * d\mathbf{h}) = \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}} * d\mathbf{h} \right)(t), \quad \mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}.$$

Якщо спадкове тіло спочатку знаходиться в незбуреному стані, в ньому задано масові сили  $\mathbf{b}$  і на поверхні задано граничну умову, то розв'язок нелінійної задачі спадкової повзучості (рівняння (1.9), (1.11), (1.12) і (1.6)) є наступним:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}^e(t); \quad \mathbf{e}(t) = (g * d\mathbf{e}^e)(t); \quad \mathbf{u}(t) = (g * d\mathbf{u}^e)(t), \quad (1.13)$$

де згортка Стільб'єса визначається формулою (1.2) і  $\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{e}^e(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$  задовольняють рівнянням відповідної задачі нелінійної теорії пружності разом з тими ж граничними умовами. Таким чином,  $\mathbf{u}^e$  задовольняють рівнянням відповідної нелінійної пружної задачі разом з тими ж масовими силами  $\mathbf{b}^e = \mathbf{b}$  в тілі і граничними умовами  $\mathbf{t}^e = \mathbf{P}$  на границі.

Слід підкреслити, що для того, щоб описати миттєву залежність  $\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathbf{e}(t)$ , необхідно визначити спочатку ізохрони повзучості [13]. З одного боку, це пов'язано з апроксимацією єдиного інтегрального визначального рівняння. З іншого боку, у залежних від часу співвідношеннях напруження-деформації  $\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathbf{e}(t)$  одна з величин є заданою, початковою, а її поточне значення дорівнює миттєвому значенню (з індексом  $e$ ). Інша – є величиною реакції матеріалу і її поточне значення включає спадковий ефект повзучості.

Наприклад, якщо в разі задач повзучості заданий тензор напружень  $\boldsymbol{\sigma}$ , то  $\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}^e(t)$ . Отже, з рівнянь (1.12), (1.13) ми бачимо, що в цьому випадку  $g(t) = H(t)$ . Тут  $H(t)$  – функція Хевісайда. Оскільки реакція матеріалу за деформаціями внаслід-

док повзучості характеризується нерівностями  $\mathbf{e}(t) \neq \mathbf{e}^e(t)$  і, таким чином,  $\mathbf{g}(t) \neq \mathbf{H}(t)$ ,  $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{H}(t)$  в рівняннях

$$\mathbf{e}(t) = (\mathbf{e}^e * d\mathbf{g})(t) = \left( \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\sigma}} * d\mathbf{g} \right)(t), \quad \mathbf{g} = 1 / \mathbf{h}. \quad (1.14)$$

## §2. Локальна задача механіки спадкової повзучості при складному напруженому стані.

Розглянемо далі композитні матеріали з металевою матрицею, армованою сфероїдальними включеннями. Матеріали цього класу помітно підвищують експлуатаційні характеристики деталей і вузлів, що працюють в екстремальних умовах [4, 6, 14]. Для виготовлення композитів системи алюміній – бор, алюміній – окис кремнію використовуються алюмінієві сплави декількох класів. Як базовий об'єкт для моделювання пошлемося на механічні властивості сплаву на алюмінієвій основі типу Al 2024S [4, 16].

Прогнозування параметрів спадкової повзучості композитів з металевою матрицею є одним з важливих чинників при розрахунку і конструюванні сучасних елементів конструкцій. Це стосується виробів, які призначені для довготривалої експлуатації в умовах складного навантаження. Пружні і в'язкопружні властивості арматури і матриці можна приймати фізично лінійними лише в першому наближенні. Якщо для арматури таке допущення в більшості випадків справедливе, то матеріал матриці стає явно нелінійним майже завжди вже при досить низьких рівнях напружень в порівнянні з відповідною міцністю. Фізична нелінійність в поєднанні зі спадковими властивостями матриці є одним із факторів, що забезпечують ряд необхідних механічних властивостей композиту. Таких, як низький рівень концентрації локальних напружень, високі динамічні характеристики, тріщиностійкість та ін. Можливість розрахунковим шляхом визначити деформативні властивості композиту в області фізичної нелінійності за заданими властивостями арматури і матриці дозволяє точніше встановити фактичний напружено-деформований стан елементів конструкцій [3, 5], а також повною мірою використовувати всі ресурси композиту при аналізі задач тривалої міцності та оптимізації конструкцій із них.

Задача полягає у визначенні областей лінійності та нелінійності процесу повзучості досліджуваних композитних матеріалів та у прогнозуванні повзучості за властивостями та за об'ємним вмістом їх компонентів. Розглядаємо матеріал в умовах усталеної повзучості. Загальні визначальні рівняння спадкової повзучості запишемо у формі

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\sigma}^e(t) = (\mathbf{g} * \dot{\boldsymbol{\sigma}})(t) = \int_{-\infty}^t (t-s)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(s)ds; \quad \mathbf{g}(t) = \mathbf{J}(t) / \mathbf{J}(0) \mathbf{g}, \quad (2.1)$$

де  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напружень Коші;  $\mathbf{e}$  – тензор деформацій, причому верхній індекс  $e$  відноситься до миттєвих, пружних значень напружень і деформацій, а  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ ,  $\mathbf{e}(t)$  – фізичні напруження і деформації (в момент спостереження). Застосування такої форми зв'язку є наслідком вивчення ізохронних кривих повзучості [11, 20]. В оригінальній роботі Работнова напруження  $\sigma^e(t)$  називаються модифікованими напруженнями, відновленими за відомими значеннями напружень  $\sigma(t)$ ; для їх позначення використаний символ  $\varphi(t)$  [20].

Співвідношення (1.5) і (1.6) є визначальними рівняннями нелінійно пружного тіла. Щоб скористатися далі принципом в'язкопружної відповідності, запишемо співвідношення між поточними деформаціями і поточними напруженнями у формі визначальних рівнянь спадкової повзучості, розвиненої в роботах [1, 9, 11]

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}^e(t) = (\mathbf{g} * \dot{\boldsymbol{\sigma}})(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t-s)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(s)ds, \quad \mathbf{g}(t) = \mathbf{J}(t) / \mathbf{J}(0). \quad (2.2)$$

Спадкові інтеграли, що використовуються тут, є лінійними функціоналами із нормованими функціями повзучості  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  і релаксації  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ , залежними від просторової координати  $\mathbf{x}$ . Це дозволяє вважати диференціювання за координатою  $\mathbf{x}$  і спадкове

інтегрування за часом  $t$  перестановочними операціями. Миттєва пружна податливість і миттєвий модуль пружності пов'язані співвідношенням  $\mathbf{J}(0) = \mathbf{E}^{-1}(0)$ , при цьому  $g(0) = h(0) = 1$ . Таким чином, цим визначається залежність поточних напружень спадкової повзучості  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  від відповідних їм відновлених пружних (модифікованих) напружень  $\boldsymbol{\sigma}^e(t)$ . Аналогічно, (1.14) є співвідношенням між поточною деформацією  $\mathbf{e}(t)$  і відновленою (recovered) пружною деформацією  $\mathbf{e}^e(t)$ .

Тензорна інтегральна тотожність

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{g}(t-s) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial s}(\mathbf{x}, s) ds \quad (2.3)$$

є узагальненням відомого одновимірного (1D) взаємозв'язку, запропонованого Работновим [6] і розвиненого в [9, 11]. Тут виражаємо напруження через миттєву похідну від енергії деформації  $W(\mathbf{e})$  згідно (1.6). Нормована податливість при повзучості  $\mathbf{g}(t)$  не залежить від напружень, а нормований модуль релаксації  $\mathbf{h}(t)$  не залежить від деформації. Таким чином, визначальні співвідношення спадкової повзучості [20] відрізняються від рівнянь лінійної в'язкопружності [8] за формою, але їх зміст по суті є схожим [21].

Наприклад, у випадку лінійної в'язкопружності, якщо відомі напруження  $\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}^e(t)$ , то після підстановки в рівняння  $\mathbf{e}^e(t) = \mathbf{g}(t)\boldsymbol{\sigma}^e(t) = \mathbf{g}(t)\boldsymbol{\sigma}(t)$  ми знаходимо

$$\mathbf{e}(t) = (\mathbf{J} / \mathbf{J}(0) * d[\mathbf{J}(0)\boldsymbol{\sigma}])(t) = (\boldsymbol{\sigma} * d\mathbf{J})(t) . \quad (2.4)$$

Очевидно, (2.4) є звичайним визначальним співвідношенням лінійної в'язкопружності [8, 12] для випадку складного напруженого стану при постійних напруженнях. Виходячи з інтегральної форми представлення визначальних рівнянь спадкової повзучості, принцип відповідності [17, 21] дозволяє перевести задачу з дробово-експоненціальними операторами в область символічних обчислень. У разі розв'язання тривимірних задач механіки композитів випадкової структури під дією постійного навантаження аналіз можна перевести в область змінних перетворення Лапласа – Карсона.

Отже, ізотропний композит з алюмінієвою матрицею моделюємо неоднорідним середовищем, що займає об'єм  $V$ , складеним із  $N$  однорідних фаз з характеристичною функцією  $\chi^{(r)}(\mathbf{x})$  об'єму  $V^{(r)}$ , ( $r \in [0, N]$ ). Крім того, приймається, що  $V^{(r)} \ll V$  і міжфазний контакт є ідеальним. Функція повзучості кожної фази  $r$  позначена  $\mathbf{J}^{(r)}(t)$ . Тоді функцію повзучості композиту можна представити як кусочно-однорідну

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^N \mathbf{J}^{(r)}(t) \chi^{(r)}(\mathbf{x}) . \quad (2.5)$$

Причому  $\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = 1$ ,  $\forall \mathbf{x} \in V^{(r)}$  та  $\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \notin V^{(r)}$  в іншому випадку. Об'ємне усереднення по  $V$  та  $V^{(r)}$  позначається надалі відповідно  $\langle \cdot \rangle$  та  $\langle \cdot \rangle^{(r)}$ . Об'ємне усереднення характеристичної функції по фазі  $r$  дає значення об'ємної концентрації  $c_r = \langle \chi \rangle^{(r)}$ . Об'ємне усереднення функції  $f$  по представницькому об'єму  $V$  та по фазі  $s$  позначено  $\bar{f} = \langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f dv$  та  $\bar{f}^{(s)} = \langle f \rangle^{(s)} = \frac{1}{V^{(s)}} \int_{V^{(s)}} f dv$ , відповідно.

Стохастичні рівняння рівноваги і граничні умови першого лінійного наближення, записані в області LC перетворень, можна представити у формі [4, 17, 20]

$$\mathbf{L}(\nabla) \mathbf{u}'_{(1)}(\mathbf{x}, s) = -\nabla \boldsymbol{\tau}_{(1)}(\mathbf{x}, s); \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, s) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, s);$$

$$\boldsymbol{\tau}_{(1)}(\mathbf{x}, s) = \delta \mathbf{C}(\mathbf{x}, s) \mathbf{e}_{(1)}(\mathbf{x}, s); \quad \delta \mathbf{C}(\mathbf{x}, s) = \mathbf{C}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{L}, \quad (2.6)$$

де рискою зверху позначено результати статистичного усереднення в зразку із випадковим тензором пружності  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, s)$ . Фур'є-образ  $\mathbf{L}(\mathbf{k})$  диференціального оператора визначається співвідношеннями [4]

$$[\mathbf{L}(\mathbf{k})]_{im} = L_{ijmn} k_j k_m; \quad \mathbf{L} = \mu_L (\alpha_L \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mathbf{I}), \quad \alpha = \lambda / \mu,$$

$\mathbf{L}$  – тензор модулів пружності однорідного тіла порівняння [4, 18], тобто параметри  $\mu_L, \alpha_L$  є постійними в границях представницького об'єму  $V$ ;  $\mathbf{I}$  – одиничний симетричний тензор четвертого рангу;  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, s)$  – тензор напружень поляризації [4, 18]. Функцію Гріна  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  системи рівнянь (2.6) знайдемо з умови

$$\mathbf{L}(\nabla) \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{I} \delta(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Тут  $\delta(\mathbf{x})$  – дельта функція Дірака, тоді

$$G_{im}(\mathbf{k}) = [\mathbf{L}(\mathbf{k})]_{im}^{-1}.$$

Використовуючи методику, викладену в роботах [4, 17, 18], розв'язок системи запишемо у формі інтеграла типу згортки по області  $V$

$$\mathbf{e}'_{(1)}(\mathbf{x}_1, s) = \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) * \boldsymbol{\tau}_{(1)}(\mathbf{x}_2, s), \quad (2.8)$$

де  $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  – оператор з ядром, що виражається через похідні від функції Гріна  $\mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .

Розглянемо спочатку двокомпонентний матеріал, матриця якого армована хаотично розорієнтованими в просторі включеннями сферіодальної форми. Пружні властивості включень визначаються потенціалом  $W_i(\mathbf{e})$ , а миттєві властивості матриці – потенціалом  $W_m(\mathbf{e})$ , тобто приймаємо  $i = 1, m = 2$ . Усереднимо рівняння (2.8) за умови, що координата – аргумент його лівої частини знаходиться в  $v_a$  об'ємі, зайнятому включеннями, орієнтованими в  $\mathbf{n}_a$  - напрямку,  $a \in [1, n]$ . В результаті матимемо

$$\mathbf{e}'_a(\mathbf{x}_1, s) = \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) * [\delta \mathbf{C}_i \sum_{b=1}^{n+1} \mathbf{e}_{ba}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, s) p_{b|a}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)]. \quad (2.9)$$

Тут прийнято наступні позначення для двоточкових умовних статистичних моментних функцій [4, 17]:

$$p_{b|a}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = p(\mathbf{x}_1 \in v_b | \mathbf{x}_2 \in v_a), \quad (2.10)$$

тобто кутовими дужками, що містять умову приналежності точки тієї чи іншої множини, відзначена операція умовного статистичного усереднення. Умовні щільності розподілу переходів зі станів  $\mathbf{x}_1 \in v_a$ , тобто із включення  $\mathbf{n}_a$  - напрямку, в стан  $\mathbf{x}_2 \in v_b$ , тобто у включення  $\mathbf{n}_b$  - напрямку, вибираємо у вигляді

$$p_{b|a}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \delta_{ba} + c_b p^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) (1 - \delta_{ba}); \quad (2.11)$$

$$p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = c_a + c_a^T \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2); \quad \varphi^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1 - \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

де  $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  – двоточкова кореляційна функція поля пружних властивостей,  $c_a^T = 1 - c_a$ ;  $c_a$  – об'ємна концентрація включень, орієнтованих в  $\mathbf{n}_a$  - напрямку. Інтег-



рування рівнянь (2.9) виконується відповідно до методики, викладеної в [4, 18], при цьому алгебраїчна матриця  $\mathbf{g}$  оператора, отриманого з інтегрального  $\mathbf{\Gamma}$ , має такі складові:

$$\begin{aligned} k_g &= g_1(j_1 + r_3)/2; \quad l_g = -g_1 r_3; \quad l_g^T = l_g; \quad n_g = 2g_1(j_1 + r_3); \\ m_g^T &= g_0 j_2 + k_g; \quad m_g = g_0(1 + j_1) + 2l_g; \quad g_0 = -\frac{1}{4\mu_0}; \quad g_1 = -\frac{1}{2n_0}; \quad r_3 = \frac{k_0}{\mu_0} j_3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тут використовуються загальноприйняті позначення [8, 14, 15] для комбінацій елементів алгебраїчної матриці  $\mathbf{g}$ :

$$k_g = (g_{11} + g_{12})/2; \quad l_g = g_{13}; \quad l_g^T = g_{31}; \quad n_g = g_{33}; \quad m_g^T = 2g_{66}; \quad m_g = 2g_{44}. \quad (2.13)$$

Параметри  $j_1, j_2, j_3$  визначаються формулами

$$j_1 = (jw/\sqrt{r} - 1)/r; \quad j_2 = 1 - j_1; \quad j_3 = [(1 + 2w^2)j_1 - 1]/(2r); \quad r = w^2 - 1; \quad j = \text{arch}(w);$$

$w$  – відношення поздовжнього і поперечного розмірів сфероїдального включення.

Статистичні флуктуації деформацій  $\mathbf{e}'_a$  включень  $\mathbf{n}_a$ -напрямку виражаємо через середні деформації матриці матеріалу  $\mathbf{e}_m$  в представницькому об'ємі композиту  $V$

$$\mathbf{e}'_a = c_m \mathbf{z}_a \mathbf{C}'_i \mathbf{e}_m = c_m \mathbf{z}_a \mathbf{h}_i \mathbf{e}_m, \quad (2.14)$$

де  $c_m$  – об'ємна концентрація матеріалу матриці,

$$\mathbf{C}'(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{C}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_i(\mathbf{x}),$$

трансверсально-ізотропний тензор  $\mathbf{z}_a$  заданий співвідношеннями

$$\mathbf{z}_a = (\mathbf{I} - g \delta \mathbf{C}_i)^{-1} \mathbf{g}; \quad \delta \mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i - \mathbf{L}.$$

Усереднимо рівняння (2.14) по множині  $\Omega$  можливих орієнтацій включень. Виразимо статистичні середні деформації включень  $\mathbf{e}_i$  і матеріалу матриці  $\mathbf{e}_m$  через макроскопічні деформації  $\bar{\mathbf{e}}$  представницького об'єму  $V$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{e}}; \quad \mathbf{e}_m = \mathbf{A}_m \bar{\mathbf{e}}; \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_m (\mathbf{I} + \mathbf{z} \mathbf{h}); \quad \mathbf{A}_m = (\mathbf{I} + c_i \mathbf{z} \mathbf{h})^{-1}; \quad \mathbf{z} = \langle \mathbf{z}_a \rangle_{\Omega}, \quad (2.15)$$

де кутовими дужками з індексом  $\Omega$  позначена операція статистичного усереднення по ансамблю можливих орієнтацій включень. З огляду на співвідношення (2.15), в області LC перетворення, вирази для ефективних модулів пружності Ламе  $\lambda(s)$  і  $\mu(s)$  двокомпонентного матеріалу випадкової структури запишемо у формі

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= 3 \sum_{r=1}^2 c_r \kappa_r \kappa_{Ar}(s) - 2\mu(s)/3; \quad \mu(s) = 2 \sum_{r=1}^2 c_r \mu_r \mu_{Ar}(s); \\ \mu_{A1}(s) &= \mu_{A2}(s) (1 + 4\mu_z(s) \mu_h(s)); \quad \mu_{A2}(s) = \frac{1}{2} (1 + 4c_1 \mu_z(s) \mu_h(s))^{-1}; \\ \kappa_{A1}(s) &= \kappa_{A2}(s) (1 + 9\kappa_z(s) \kappa_h(s)); \quad \kappa_{A2}(s) = \frac{1}{3} (1 + 9c_1 \kappa_z(s) \kappa_h(s))^{-1}; \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\mu_z = \frac{1}{15} (k + n - l + 3m + 3p)_{za}; \quad \kappa_r = (3\lambda_r + 2\mu_r)/3; \quad \kappa_z = \frac{1}{9} (4k + 2l + 2l^T + n)_{za}.$$

Тут позначено  $\mathbf{h}(s) = \mathbf{C}'(s)$ ,  $c_1 = c_i$ ;  $c_2 = c_m$ ; елементи алгебраїчної матриці  $\mathbf{z}_a(s)$  обчислюються за формулами (2.11).

### §3. Багатокомпонентні стисливі нелінійно спадкові матеріали.

У разі багатокомпонентних нелінійних матеріалів використовуємо методологію умовних статистичних моментних функцій [4, 18] і розрахункову схему Морі – Танака [14]. Для цього запишемо операторні співвідношення, що зв'язують поля деформацій компонентів і відповідні макроскопічні величини. Будемо припускати, що відомий точний розв'язок

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{e}_m, \quad (3.1)$$

тоді тензори  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{A}_m$ , де  $i$  – номер включень з потенціалом  $W_i(\mathbf{e})$ ,  $i \in [1, n]$ ;  $m$  – індекс матеріалу матриці з пружним потенціалом  $W_m(\mathbf{e})$  ( $m = n + 1$ ), визначаються виразами

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{A}_m; \quad \mathbf{A}_m = \left( c_m \mathbf{I} + \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{G}_i \right)^{-1}. \quad (3.2)$$

Наближений розв'язок може бути побудований шляхом заміни в загальному випадку невідомого оператора  $\mathbf{G}_i$  відомим, але наближеним,  $\mathbf{T}_i$  (оператором концентрації деформацій), який пов'язує середні деформації включень, позначених номером  $i$ ,  $i \in [1, n]$  і середні деформації представницького об'єму  $V$ , тобто

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{T}_i \bar{\mathbf{e}}. \quad (3.3)$$

Тоді для знаходження тензорів  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{A}_m$  отримуємо формули

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{A}_m; \quad \mathbf{A}_m = \left( c_m \mathbf{I} + \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{T}_i \right)^{-1}; \quad i \in [1, n]. \quad (3.4)$$

У даній роботі визначаємо оператор  $\mathbf{G}_i$  з розв'язку, отриманого на основі одноточкового наближення методу умовних статистичних моментних функцій для двокомпонентних середовищ [4], тобто

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{T}_i = \mathbf{1} + \mathbf{z}_i \mathbf{h}_i; \quad \mathbf{h}_i = \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m; \quad \mathbf{z}_i = \langle \mathbf{z}_{ia} \rangle_{\Omega}; \quad \mathbf{z}_{ia} = (\mathbf{1} - \mathbf{g}_i \mathbf{f}_i)^{-1} \mathbf{g}_i; \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{C}_i - \mathbf{L}. \quad (3.5)$$

Тут алгебраїчна матриця  $\mathbf{g}_i$  отримана в результаті аналізу напружено-деформованого стану у включеннях з номером  $i$ .

Таким чином, для визначення тензорів  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{A}_m$  можна записати наступні вирази:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_m (\mathbf{I} + \mathbf{z} \mathbf{h})_i, \quad i \in [1, n]; \quad \mathbf{A}_m = (\mathbf{I} + \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{z} \mathbf{h}_i)^{-1} = (\mathbf{I} + \langle \mathbf{z} \mathbf{h} \rangle^{(i)})^{-1}. \quad (3.6)$$

Як і в разі нестисливих матеріалів [18], безпосередньою перевіркою можна переконатися, що для двокомпонентного матеріалу представлення (3.6) ідентичні формулам (2.13). З цього можна зробити висновок, зокрема, що точність результатів (3.6) відповідає рівню розв'язків [4 – 6], отриманих методом умовних статистичних моментних функцій в одноточковому наближенні для двокомпонентних середовищ.

### §4. Нелінійний розв'язок спадкової повзучості другого порядку.

Рівняння рівноваги представницького об'єму  $V$ , записані щодо статистичних флуктуацій LC переміщень другого порядку малості  $\mathbf{u}'_{(2)}(\mathbf{x}, s)$ , в координатах відлікової, пружної конфігурації  $\kappa_e$  [4, 18] мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\nabla) \mathbf{u}'_{(2)}(\mathbf{x}, s) &= -\nabla \boldsymbol{\tau}_{(2)}(\mathbf{x}, s); \quad \mathbf{u}'_{(2)}(\mathbf{x}, s) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V; \\ \boldsymbol{\tau}_{(2)}(\mathbf{x}, s) &= \delta \mathbf{C}(\mathbf{x}, s) \mathbf{e}_{(2)}(\mathbf{x}, s) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, s); \quad \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, s) = \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})_{(1)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Диференціальний оператор системи (4.1) збігається за формою з відповідним оператором з (2.3). Це дає можливість використовувати функцію Гріна лінійного розв'язку і отримати інтегральне рівняння для визначення градієнтів переміщень другого наближення

$$\mathbf{e}_{(2)}(\mathbf{x}_1, s) = \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) * \boldsymbol{\tau}_{(2)}(\mathbf{x}_2, s) + \bar{\mathbf{e}}_{(2)}(s). \quad (4.2)$$

Виконаємо статистичне усереднення співвідношення (4.2) за умови, що координата – аргумент лівої частини знаходиться в об'ємі, зайнятому сфероїдальними вклученнями з  $W_i$ -властивостями, орієнтованими в  $\mathbf{n}_a$ -напрямку. Тоді для визначення середніх по цьому напрямку деформацій вклучень отримуємо рівняння

$$\mathbf{e}_{(2)}^{(a)}(\mathbf{x}_1, s) = \bar{\mathbf{e}}_{(2)}(s) + \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) * \left[ \sum_{b=1}^{n+1} \boldsymbol{\tau}_{ba}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, s) p_{b|a}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \right]_{(1)}. \quad (4.3)$$

Відповідно з запропонованою розрахунковою схемою знаходимо розв'язок цього рівняння, виконавши інтегрування за допомогою умовних щільностей розподілу ймовірностей типу (2.11). При цьому нелінійні члени в правій частині виражаємо через уже відомі в першому наближенні макроскопічні деформації  $\bar{\mathbf{e}}_{(1)}$  представницького об'єму композитного матеріалу

$$\mathbf{e}_{(1)}^{(r)} = \mathbf{A}^{(r)} \bar{\mathbf{e}}_{(1)}, \quad r \in [1, n+1]; \quad n+1 = m. \quad (4.4)$$

Тут і далі верхні індекси в дужках означають результат операції умовного статистичного усереднення, нижні індекси – порядок наближення. Реалізуючи обчислювальну процедуру, визначену співвідношеннями (3.6), отримуємо

$$\mathbf{e}_{(2)}^{(r)}(s) = \mathbf{A}^{(r)}(s) \bar{\mathbf{e}}_{(2)}(s) + \mathbf{B}^{(r)}(s) (\bar{\mathbf{e}}_{(1)}(s)); \quad r \in [i \cup m], \quad i \in [1, n];$$

$$\mathbf{A}_m(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{R}(s))^{-1}; \quad \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{R}_i; \quad \mathbf{A}_i(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{R}_i(s)) \mathbf{A}_m(s); \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{z}_i \mathbf{C}_i';$$

$$\mathbf{B}_m(s) = -\mathbf{A}_m(s) \left( \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{z}_i \boldsymbol{\gamma}'_i \right) = -\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{q}_i(s) \boldsymbol{\gamma}'_i(s); \quad (4.5)$$

$$\mathbf{q}_i(s) = \mathbf{A}_m(s) \mathbf{z}_i(s); \quad \mathbf{B}_i(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{R}_i(s)) \mathbf{B}_m(s) + \mathbf{z}(s) \boldsymbol{\gamma}'_i(s).$$

При цьому виконано умови нормування операторів  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$ , тобто

$$\sum_{r=1}^{n+1} c_r \mathbf{A}_r = \mathbf{I}; \quad \sum_{r=1}^{n+1} c_r \mathbf{B}_r = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

Підставляючи розв'язок (4.5) в усереднені фізичні співвідношення другого порядку з (1.8), знаходимо закон зв'язку тензора макроскопічних напружень Коші  $\boldsymbol{\sigma}$  і деформацій повзучості  $\mathbf{e}$  для багатокомпонентного стисливого ізотропного композитного матеріалу, що армований розорієнтованими у просторі сфероїдальними вклученнями

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{e}}, s) = \mu(s) \left[ \alpha_1 I_1 \mathbf{1} + 2\bar{\mathbf{e}} + (3\beta_1 I_1^2 + \beta_2 I_2) \mathbf{1} + \beta_2 I_1 (I_1 \mathbf{1} - \bar{\mathbf{e}}) + \beta_3 (I_2 \mathbf{1} - I_1 \bar{\mathbf{e}}) + \bar{\mathbf{e}}^2 \right]_s; \quad (4.7)$$

$$\alpha_1 = \lambda / \mu; \quad \beta_1 = (\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3) / (6\mu); \quad \beta_2 = -2(\nu_2 + 2\nu_3) / \mu; \quad \beta_3 = 4\nu_3 / \mu.$$

Тут  $I_k$  – головні інваріанти тензору деформацій [6, 20], наведені постійні Ламе другого  $\lambda(s)$ ,  $\mu(s)$  і третього  $\nu_1(s)$ ,  $\nu_2(s)$ ,  $\nu_3(s)$  порядків визначаються формулами

$$\lambda(s) = 3 \sum_{r=1}^{n+1} c_r \kappa_r(s) \kappa_{Ar}(s) - 2\mu(s) / 3; \quad \mu(s) = 2 \sum_{r=1}^{n+1} c_r \mu_r(s) \mu_{Ar}(s);$$

$$\begin{aligned}
v_1(s) &= \sum_{r=1}^{n+1} 3c_r \left[ l_A \left[ 2\lambda\kappa_A (3\kappa + \mu)_A + n_A f_A \right] + 9v_1\kappa_A^3 + \right. \\
&\quad \left. + 6v_2 l_A \kappa_A (3\kappa + 2\mu)_A + 8v_3 l_A^2 n_A \right]_s^{(r)} ; \\
v_2(s) &= \sum_{r=1}^{n+1} c_r \left[ 4\mu_A^2 (3v_2\kappa_A + 4v_3 l_A) - \frac{1}{2} (3\lambda\kappa_A + 2\mu l_A) \right]_s^{(r)} ; \\
v_3(s) &= \sum_{r=1}^{n+1} c_r \left[ \frac{3}{2} \mu\mu_A (4\mu_A^2 - 1) + 8v_3 \mu_A^3 \right]_s^{(r)} .
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Коефіцієнти  $\kappa_{Ar}$ ,  $\mu_{Ar}$  визначені формулами (3.6);  $\mu_r$ ,  $\kappa_r$ ,  $v_{1r}$ ,  $v_{2r}$ ,  $v_{3r}$  – постійні пружності другого і третього порядків  $r$ -компоненту;  $c_r$  – об'ємна концентрація  $r$ -компоненту,  $r \in [1, n+1]$ .

Обмежившись членами другого порядку малості, співвідношення (4.7) запишемо у формі

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}(s) &= \mu(s) \left[ \alpha_1 I_1 \mathbf{1} + 2\bar{\mathbf{e}} + (\alpha_3 I_1^2 + \alpha_4 I_2) \mathbf{1} + \alpha_5 I_1 \bar{\mathbf{e}} + \alpha_6 \bar{\mathbf{e}}^2 + O\left(|\bar{\mathbf{H}}|^3\right) \right]_s ; \\
\alpha_3 &= (3\beta_1 + \beta_2 - \alpha_1) / \mu; \quad \alpha_4 = (\beta_2 + \beta_3) / \mu; \\
\alpha_5 &= (2\alpha_1 - 2 - \beta_2 - \beta_3) / \mu; \quad \alpha_6 = (4 + \beta_3) / \mu.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Додержуючись методики, викладеній в роботах [6 – 9], в задачах прогнозування довготривалої міцності інформативними є також вирази для тензорних коефіцієнтів концентрацій напружень в елементах арматури і матеріалі матриці.

##### §5. Функція накопиченої енергії деформації та додаткова енергія.

Для подальшого аналізу процесів повзучості доцільним є представлення отриманих результатів відносно наведених параметрів для потенціалу деформацій, тобто додаткової енергії. Енергія миттєвої пружної деформації на одиницю об'єму матеріалу може бути представлена розкладанням в ряд Тейлора в околі природного, ненапруженого стану [4, 5, 6]

$$W(\mathbf{e}) = \frac{1}{2!} e_{ij} C_{ijkl} e_{kl} + \frac{1}{3!} e_{ij} (C_{ijklmn} e_{kl}) e_{mn} + \dots, \tag{5.1}$$

де  $e_{ij}$  – компоненти лінійного тензора деформацій Коші;  $C_{ijkl}$  – тензор констант лінійної пружності. Пружні постійні 3-го порядку є компонентами тензора порядку 6.

Симетричний тензор напружень Коші  $\sigma_{ij}$  є градієнтом пружної енергії по відношенню до пружних деформацій

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = C_{ijkl} e_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijklmn} e_{kl} e_{mn}. \tag{5.2}$$

Якщо співвідношення (5.2) є оборотними, то в результаті отримуємо

$$e_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} = D_{ijkl} \sigma_{kl} + \frac{1}{2} D_{ijklmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn}. \tag{5.3}$$

Тут

$$U(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{kl} e_{kl} - W(e_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} D_{ijkl} \sigma_{kl} + \frac{1}{3!} \sigma_{ij} (D_{ijklmn} \sigma_{kl}) \sigma_{mn} \tag{5.4}$$

– додаткова енергія деформації, що визначається перетворенням Лежандра від функції  $W$ .

Оскільки  $\partial\sigma_{ij}/\partial\sigma_{kl} = I_{ijkl}$  (одичинний тензор четвертого рангу) і  $\partial^2\sigma_{ij}/\partial\sigma_{kl}\partial\sigma_{mn} = 0$ , то можна отримати співвідношення, що зв'язують пружні постійні другого  $C_{ijkl}$  і третього  $C_{ijklmn}$  порядків з податливостями відповідних порядків, а саме:

$$C_{ijkl} = D_{ijkl}^{-1}; \quad C_{ijklmn} = -C_{ijpq}D_{pqrsuv}C_{rskl}C_{uvmn}. \quad (5.5)$$

Як приклад розглянемо далі пружний потенціал  $W$  третього порядку в формі [4, 6]

$$W = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)E_1^2 + 2\mu E_2 + \frac{l+2m}{3}3E_1^3 + 2mE_1E_2 + nE_3,$$

де  $E_k$  – головні інваріанти тензору деформацій Коші. Тоді формула для напружень набуває вигляду

$$\boldsymbol{\sigma} = [\lambda E_1 + lE_1^2 + (2m - n)E_2] \mathbf{1} + [2\mu + (2m - n)E_1] \mathbf{e} + n\mathbf{e}^2. \quad (5.6)$$

Константи третього порядку  $l$ ,  $m$ ,  $n$  введено Мурнаганом [4].

Оскільки пружні константи  $k$ -го порядку є компонентами тензора  $2k$  рангу, то властивість симетрії отримуємо із співвідношень

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}}; \quad C_{ijklmn} = \frac{\partial^3 W}{\partial e_{ij} \partial e_{kl} \partial e_{mn}}. \quad (5.7)$$

Тензор пружних сталих третього порядку в прямокутній системі координат для ізотропних матеріалів має вигляд [6]

$$C_{ijklmn} = \nu_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + 6\nu_2 \delta_{ij} I_{klmn} + 8\nu_3 I_{ijklmn}, \quad (5.8)$$

при цьому постійні Ламе третього порядку  $\nu_k$  пов'язані з коефіцієнтами  $l$ ,  $m$ ,  $n$  із (5.6)

$$l = \nu_2 + \frac{1}{2}\nu_1; \quad m = \nu_2 + 2\nu_3; \quad n = 4\nu_3.$$

При розрахунках використані формули

$$J_{ijklmn} = \frac{1}{3}(\delta_{ij} I_{klmn} + \delta_{kl} I_{mnij} + \delta_{mn} I_{ijkl}); \quad I_{ijklmn} = \frac{1}{4}(\delta_{ik} I_{jlmn} + \delta_{il} I_{jkmn} + \delta_{im} I_{klmj} + \delta_{in} I_{klmj}).$$

У випадку ізотропного матеріалу пружні податливості другого порядку  $d_{ij}$  можна виразити через пружні константи

$$d_{11} = \frac{c_{11} + c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})} = -\frac{\nu}{E}; \quad d_{12} = \frac{c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})} = \frac{1}{E}.$$

Для ізотропних середовищ запишемо також деякі корисні лінійні комбінації пружних модулів  $c_{ijk}$  та податливостей  $d_{ijk}$  третього порядку [6]

$$\begin{aligned} 9d_{123} + 18d_{144} + 8d_{456} &= -(3d_{12} + 2d_{44})^3 (9c_{123} + 18c_{144} + 8c_{456}); \\ 3d_{144} + 4d_{456} &= -4d_{44}^2 (3d_{12} + 2d_{44})(3c_{144} + 4c_{456}); \end{aligned} \quad (5.9)$$

при цьому

$$\nu_1 = c_{123}; \quad \nu_2 = c_{144}; \quad \nu_3 = c_{456}. \quad (5.10)$$

Тоді вираз для додаткової енергії деформації можна записати у формі

$$D_{ijklmn} = \eta_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + 6\eta_2 \delta_{ij} I_{klmn} + 8\eta_3 I_{ijklmn}; \quad d_{123} = \eta_1; \quad d_{144} = \eta_2; \quad d_{456} = \eta_3. \quad (5.11)$$

В теорії нелінійної в'язкопружності корисними є коефіцієнти пропорційності девіаторів [13] деформацій і напружень другого порядку

$$\begin{aligned} d_{144} &= -4d_{44}^2(d_{11}c_{144} + 2d_{12}c_{244}); \quad d_{144} = -4d_{44}^2[d_{12}c_{144} + (d_{11} + d_{12})c_{244}]; \\ d_{11} + d_{12} &= \frac{1-\nu}{E}; \quad d_{456} = -8d_{44}^3c_{456}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Таким чином, отримуємо обернені співвідношення, що виражають податливості  $d_{ijk}$  через коефіцієнти пружності  $c_{ijk}$ .

В нелінійній теорії в'язкопружності при визначенні матеріальних параметрів використовують дані базових експериментів на розтяг та кручення. При заданому зовнішньому напруженому стані необхідно знайти миттєві та реологічні характеристики, використовуючи найбільш адекватну модель деформування [1, 7, 12]. Будемо виходити з того, що миттєві податливості матеріалу знайдено [12]. Тоді в границях ізотропної теорії в'язкопружності для податливостей третього порядку отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3 &= -(3\kappa)^3(9\eta_1 + 18\eta_2 + 8\eta_3); \\ 3\nu_2 + 4\nu_3 &= -12\mu^2\kappa(3\eta_2 + 4\eta_3); \quad \nu_3 = -8\mu^3\eta_3. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Система трьох рівнянь (5.13) із трьома невідомими має єдиний розв'язок при відмінному від нуля детермінанті.

Довільний тензор другого рангу, наприклад  $e_{ij}$ , можна адитивно розкласти на девіаторну частину  $e_d$  і сферичну частину  $e_m$ , які визначимо

$$\mathbf{e}_m = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{1}; \quad \mathbf{e}_d = \mathbf{e} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{1}, \quad (5.14)$$

таким чином  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_d + \mathbf{e}_m$ .

Однією з функцій, що монотонно спадають із зростанням аргумента та мають слабку особливість при  $t = 0$ , є експоненціальна функція дробового порядку Работнова [2, 13]. Ця функція успішно застосовується в якості ядра лінійного (1.1) інтегрального рівняння, добре описує в рамках лінійної теорії повзучості поведінку полімерів [7] і композитних матеріалів. В даний час є добре розроблений математичний апарат [1, 7, 13] розв'язання крайових задач теорії лінійної спадковості із використанням цих ядер в якості початкових.

Визначальні рівняння повзучості, що задають залежність між компонентами тензора деформацій, тензора напружень і часом, запишемо у вигляді [7, 8]

$$\begin{aligned} J_d(t) &= \frac{1}{2G}g_1(t); \quad g_1(t) = 1 + (\xi/\beta)_1(1 - M_{\alpha+1}(\alpha_1, \beta_1, t)); \\ J_m(t) &= \frac{1}{3B}g_2(t); \quad g_2(t) = 1 + (\xi/\beta)_2(1 - M_{\alpha+1}(\alpha_2, \beta_2, t)). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Тут  $M_{\alpha+1}(\alpha, \beta, t)$  – функція Мітаг – Леффлера

$$M_{\alpha+1}(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta t^m)^n}{\Gamma(1+mn)}, \quad m = \alpha + 1, \quad (5.16)$$

$G$  – модуль зсуву;  $B$  – модуль об'ємного розширення;  $\alpha, \xi, \beta$  – реологічні параметри.

У лінійній теорії в'язкопружності практично важливим завданням є ідентифікація ядер повзучості і релаксації, при цьому

$$K(\alpha, \beta, t) = -\frac{1}{\beta} \frac{d}{dt} M_{\alpha+1}(\alpha, \beta, t).$$

Ідентифікація ядер повзучості і ядер релаксації в (2.15) здійснена [2, 8] на основі двох груп базових експериментів на повзучість при постійних напруженнях. Перша група базових експериментів включає випробування суцільних циліндричних зразків на повзучість при одновісному розтязі з виміром поздовжніх і поперечних деформацій. Одномірні залежності між напруженнями, деформаціями і часом задаються в цьому випадку рівняннями типу (1.2). Друга група базових експериментів, розглянутих в [8], включає випробування суцільних циліндричних зразків на повзучість при одновісному розтязі з виміром поздовжніх деформацій, а також випробування тонкостінних трубчастих зразків на повзучість при чистому крученні з виміром кутових деформацій.

Ядра повзучості  $K(t-\tau)$  в (1.1), (1.3) і (1.4) та релаксації  $R(t-\tau)$  в (1.2) апроксимуються дробово-експоненціальними функціями [11]

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}; R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (5.17)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – параметри ядер ( $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ );  $\Gamma[\cdot]$  – гамма-функція Ейлера [20]. Функції релаксації, відповідні іншим однорідним напруженим станам, можна також визначити через  $G(s)$  та  $B(s)$ . Порівняння ЛС перетворення ізотропних в'язкопружних співвідношень між напруженнями і деформаціями ізотропної теорії показує, що функції релаксації, що відповідають іншим напруженим станам, визначаються за допомогою співвідношень теорії пружності шляхом заміни пружних модулів ЛС перетворенням відповідних функцій релаксації теорії в'язкопружності [7, 13]. Так, наприклад, із співвідношень ізотропної теорії пружності випливає, що в області зображень функція релаксації  $E(s)$ , що характеризує стан одновісного розтягу, визначається через перетворені функції  $G(s), B(s)$  як

$$E(s) = \frac{9G(s)B(s)}{G(s) + 3B(s)}.$$

Практичне завдання полягає у встановленні залежності між ядрами повзучості і релаксації нелінійно спадкових матеріалів при складному напруженому стані і ядрами повзучості при одновісному розтязі та чистому крученні. Це входить в загальну процедуру визначення параметрів ядер, що задаються дробово-експоненціальними функціями [1, 13].

Як приклад розглянемо спадкову повзучість композитного зразка (рис. 1), виготовленого із трикомпонентної суміші: алюмінієва матриця типу Al 2024S, що армована випадково розорієнтованими у просторі сфероїдальними пружними включеннями. Пружні характеристики компонентів наведено в табл. 1 (нелінійні пружні сталі, ГПа, компонентів для B/SiC/Al2024 композиту). Враховуємо спадкові властивості алюмінієвої матриці. Реологічні параметри дробово-експоненціального ядра наведено в табл. 2.

Таблиця 1

Матеріал	$E$	$\nu$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	Джерело
Boron	467,3	0,361	-840,0	-420,0	-390,0	[6]
SiC	440,3	0,171	-227,2	31,5	-170,75	[6]
Al 2024S	55,8	0,33	-115,	-160,5	-108,8	[16]
Дуралюмін	65,34	0,3	-270,2	-390,1	-370,2	[5]

Таблиця 2

Матеріал	Параметри ядра			Джерело
	$\xi$	$\alpha$	$\beta$	
Al 2024S	0,054	-0,4082	0,0298	[4, 16]
Дуралюмін	0,031	-0,5684	0,0916	[2]

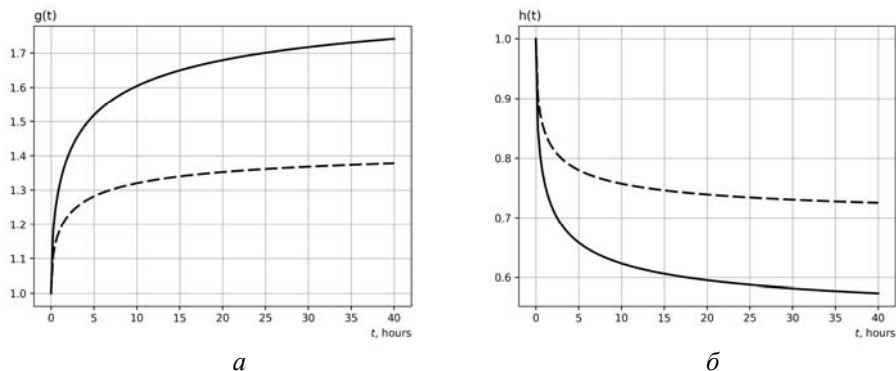


Рис. 2

На рис. 2, а показано криві залежності нормованої функції повзучості  $g(t) = E^e J(t)$  від часу  $t$ . Суцільна лінія відповідає функції повзучості алюмінієвої матриці. Штрихова лінія ілюструє поведінку функції повзучості для композитного матеріалу із вмістом арматури  $c_1 = 0.12$ .

На рис. 2, б показано криві залежності нормованої функції релаксації  $h(t) = E_e^{-1} E(t)$  від часу  $t$ . Суцільна лінія відповідає функції релаксації алюмінієвої матриці. Штрихова лінія ілюструє поведінку функції релаксації для композитного матеріалу із вмістом арматури  $c_1 = 0.12$ .

#### Висновок.

Композитні матеріали застосовуються в елементах конструкцій, які експлуатуються як в умовах тривалих одноразових, так і циклічних навантажень. Міцність і довговічність композитів залежить від величини середніх або максимальних за цикл навантаження напружень в матриці, у включеннях, кількості циклів і т.д. У зв'язку з цим, для проектування нових матеріалів із заданими властивостями становить інтерес моделювання та вивчення мікроструктурних напружень і деформацій, що змінюються в часі. Велике практичне значення має прогнозування наведених макроскопічних характеристик спадкової повзучості та визначення їх залежності від форми включень, типу просторового армування, об'ємної концентрації компонентів. У статті розглянуто композитний матеріал випадкової структури і використано метод усереднення, заснований на застосуванні принципу відповідності типу Шепері, інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа – Карсона. Для комп'ютерного моделювання використано чисельні алгоритми в середовищі Fortran 90. До переваг дослідження можна віднести отримання кінцевих результатів у формі визначальних співвідношень спадкової повзучості. А саме залежності деформацій від напружень, а не тільки релаксаційних співвідношень напруження – деформації.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Розв'язано в рамках нелінійної теорії другого порядку задачу нелінійної спадкової повзучості композитів випадкової структури. Спадкові функціонали використано для побудови загальних визначальних рівнянь складного напруженого стану. Узагальнено принцип відповідності Шепері для квазілінійних в'язкопружних середовищ щодо проблем спадкової повзучості. Отримано розв'язок стохастичної крайової задачі про визначення концентрації напружень та їх релаксації в композиті з металевою матрицею (ММК). Для отримання повної системи в'язкопружних рівнянь другого порядку використовується метод послідовних наближень. Визначено функції релаксації, локально усереднені у випадку в'язкопружної матриці та пружних включень. Також визначені параметри концентрації напружень. Наведені приклади, що показують важливість взаємного впливу нелінійних пружних та в'язких властивостей компонентів на перерозподіл напружень біля включень у багатокомпонентних ММК. Як практичний результат, можна відзначити можливість прогнозування довготривалої міцності матеріалу, коли поле в'язкопружних напружень відоме в результаті комп'ютерного моделювання в околі включень.



КЛЮЧОВІ СЛОВА: спадкова повзучість, інтегральне перетворення, ізотропний матеріал, дробове спадкове ядро, наведені властивості, комп'ютерне моделювання.

1. Голуб В.П., Маслов Б.П., Фернати П.В. К определению параметров ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – 53, № 7. – С. 53 – 64.
2. Маслов Б.П. Застосування квазілінійної моделі в'язкопружності для прогнозування повзучості неоднорідного геологічного середовища // Вісн. Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2019. – № 1. – С. 122 – 125.
3. Мелбардис Ю.Г., Крегерс А.Ф. Деформируемость однонаправленно армированного композита с упругопластической матрицей // Механика композитных материалов. – 1982. – № 2. – С. 217 – 224.
4. Механика композитов (под общей ред. Гузя А.Н.): в 12-и томах. Т. 3. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикла Е.Н. и др. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390с.
5. Aboudi J., Arnold S., Bednarczyk B. Micromechanics of Composite Materials. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – 1011 p.
6. Asaro R.J., Lubarda V.A. Mechanics of Solids and Materials. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 880 p.
7. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. An Introduction. – New York: Academic Press, 1982. – 370 p.
8. Christensen, R.M. Mechanics of Composite Materials. – New York: Dover Publications, 2005. – 345 p.
9. Golub V.P., Kobzar Yu.M., Fernati P.V. An Approach to Constructing a Rheological Model of a Strain-Hardening Media // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 7. – P. 776 – 784.
10. Golub V.P., Kobzar Yu.M., Fernati P.V. Nonlinear Creep of Unidirectional Fibrous Composites Tensioned along the Reinforcement // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 5. – P. 491 – 503.
11. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. I. Superposition of Shear and Bulk Creep // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 2. – P. 165 – 174.
12. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. II. Deviators Proportionality // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 6. – P.111 – 125.
13. Golub V.P., Pavluk Ya., Reznik V.S. Analysis of Creep Strains and Stress Relaxation in Thin-Walled Tubular Members Made of Linear Viscoelastic Materials. I. Superposition of Shear and Volume Creep // Int. Appl. Mech. – 2016. – 56, N 2. – P. 156 – 169.
14. Hashin Z. Analysis of composite materials // J. of Appl. Mech. – 1983. – 50, N 9. – P. 481 – 505.
15. Lakes R.S. Viscoelastic Materials. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – 461 p.
16. Lin Y.C., Xia Y.C., Chen M.S., Jiang Y.Q., Li L.T. Modeling the creep behavior of 2024-T3 Al alloy // Computational Materials Sci. – 2013. – 67. – P. 243 – 248.
17. Maslov B.P. Thermal-stress concentration near inclusions in viscoelastic random composites // J. Engineering Mathematics. – 2008. – N 61. – P. 339 – 355.
18. Maslov B.P. Stress Concentration in Incompressible Multicomponent Materials // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 3. – P. 384 – 390.
19. Maslov B.P. Combined Numerical and Analytical Determination of Poisson's Ratio for Viscoelastic Isotropic Materials // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 220 – 230.
20. Rabotnov Y.N. Creep Problems in Structural Members. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. – 822 p.
21. Schapery R.A. Correspondence principles and a generalized integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media // Int. J. of Fract. – 1984. – 25, N 3. – P. 195 – 223.

Надійшла 02.03.2021

Затверджена до друку 09.12.2021