

Ю. М. К о б з а р

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РУЙНУВАННЯ СТЕРЖНІВ ВНАСЛІДОК
БАГАТОЦИКЛОВОЇ ВТОМИ ЗА УМОВ СИМЕТРИЧНОГО
РОЗТЯГУ – СТИСКУ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна; creep@inmech.kiev.ua*

Abstract. The problem of damage of the elastic rod under cyclic tension-compression is solved. The changes of the rod state are modeled on each cycle of loading. A criterion of damage is formulated and the parameters of cyclic durability are found which corresponds to the given amplitude loadings. The calculated curves of durability are built for the heat-resistant Nickel alloy ЭИ867 and light alloy Д16АТ on the aluminum base. They are compared with the corresponding experimental curves.

Key words: symmetric tension-compression, fatigue model, fatigue failure criterion.

Вступ.

Тривала експлуатація машин та механізмів під дією змінних періодичних навантажень веде до їх руйнування. За умов багатоциклічної втоми руйнування, як правило, відбуваються в області пружних деформацій. По суті, це двостадійний процес, де в першій інкубаційній стадії накопичуються розсіяні пошкодження, а в другій з'являється і розповсюджується локалізоване пошкодження – тріщина. Цей процес покладено в основу багатьох методів досліджень руйнування в умовах втоми. Також поширені статистичні підходи до вивчення втомного руйнування матеріалів, які базуються на врахуванні впливу неоднорідностей та їх розмірів. В основі цих підходів лежать концепції «слабких ланок», які в основному застосовують в умовах одновісних напружених станів [1, 9, 16]. При складному напруженому стані статистичні підходи до втомного руйнування розглянуті в [7, 9]. Руйнування пластин з тріщинами під дією асиметричних періодичних навантажень вивчалися за допомогою заміни асиметричних на симетричні навантаження і, виходячи з рівняння пошкоджуваності Работнова – Качанова, визначалися тривалість інкубаційного періоду, швидкість руху макротріщини і час руйнування [10]. Параметри в рівняннях пошкоджуваності знаходились з експерименту на втому за умов симетричного навантаження.

Моделі втоми, які прогнозують руйнування гладкого зразка, тобто фрагментацію його як єдиного цілого за умов симетричного періодичного навантаження, невідомі. В порівнянні з іншими видами багатоциклічного навантаження симетричні мають найменші границі витривалості [2, 12, 13, 14]. Тому симетричні навантаження при експлуатації об'єктів викликають підвищену небезпеку руйнування, що диктує необхідність детального їх розгляду.

В цій статті моделюється процес руйнування стержня внаслідок втоми під дією багатоциклічних симетричних навантажень у вигляді розтягу-стиску з початковими амплітудними напруженнями, які менші за границю пропорційності. Визначаються циклічні довговічності, за якими будується розрахункова крива втоми. Досліджують-

ся зміни об'єму та не враховуються зміни форми. На кожному півциклі відслідковуються напруження, втрата маси або приріст густини. В кожному циклі фіксуються зміни модуля пружності та пружної потенціальної енергії стержня. Не враховуються зростання розсіяних пошкоджень, локальних тріщин, видимої тріщини. Критерій втомного руйнування стержня виконується, коли в стержні рівень циклічної максимальної пружної потенціальної енергії на певному півциклі стиску стане рівним або перевищить значення відомої енергії його руйнування в статичному випадку. Цикл, в якому виконуються умови руйнування (максимальна потенціальна пружна енергія стане рівною або більшою енергії руйнування), характеризує циклічну довговічність стержня і розрахунки припиняються. Вони також зупиняються, коли досягається умовне базове число циклів без руйнувань. Границя втоми вважається досягнутою, коли число циклів навантажень стає набагато більшим умовної бази випробувань, а стержень при цьому не зруйнувався. В праці узагальнено попередні підходи в частині, де мова йде про критерій руйнування [5].

§1. Постановка задачі. Критерій втомного руйнування.

Основні характеристики опору матеріалів втоми визначаються із серії випробувань на втому однакових циліндричних зразків. Результати випробувань відображає крива втоми (крива Велера) $N(\sigma_a)$, де N – циклічна довговічність, яка відповідає початковому амплітудному напруженню σ_a . Напруження σ_a спричинене симетричним періодичним навантаженням розтягу-стиску P_a . Побудова кривої втоми для різних симетричних навантажень розтягу-стиску без проведення експериментів є актуальною задачею. Нехай на кінці ізотропного стержня з коефіцієнтом Пуассона μ , границею міцності σ_θ , з початковими – модулем пружності E_1 , масою m_1 , густиною ρ_1 , довжиною l_1 , площею перетину F_1 , об'ємом $V_1 = m_1/\rho_1$ при постійній температурі θ діють симетричні, періодичні навантаження розтягу-стиску P_a з частотою Ω і амплітудним значенням $P_a = \text{const}$, меншим критичного навантаження $P_{кр}$. Початкове напруження $\sigma_{a1} = P_a/F_1$ менше границі пропорційності $\sigma_{ну}$. Виникаючі напруження розтягу-стиску $\sigma_{aj}(i)$ в кожному j -му півциклі i -го циклу визначаються співвідношенням

$$\sigma_{aj}(i) = \sigma_{aj}(i) \sin \Omega t, \quad (1.1)$$

де $\sigma_{aj}(i) = P_a / F_j(i)$; $F_j(i)$ – амплітудні значення площі перетину стержня, які відповідають в першому півциклі $j = 1$ – стиску і в другому півциклі $j = 2$ – розтягу i -го циклу. Щоб розв'язати задачу, потрібно визначити розрахункові циклічні довговічності N при різних відповідних початкових напруженнях σ_{a1} і за ними побудувати криву втоми $N(\sigma_a)$. Достовірність останньої перевірити її порівнянням з експериментальною кривою втоми (крива Велера).

1.1. Критерій руйнування. Початкова амплітудна пружна енергія стержня при розтязі-стиску є

$$U = W_1 V_1 = \frac{\sigma_{a1}^2 m_1}{2E_1 \rho_1}, \quad (1.2)$$

де $W_1 = \sigma_{a1}^2 / 2E_1$ – потенціальна пружна енергія одиниці об'єму.

Найбільша потенціальна енергія U дорівнює добутку амплітуди P_a зовнішньої гармонічної сили, прикладеної до кінців стержня з частотою Ω на найбільше переміщення $P_a / m_1 \omega^2$, де ω – початкова власна частота стержня, яка при співвідношеннях $\Omega \ll \omega$ частот дорівнює [6]

$$U = \frac{(P_a)^2}{2m_1\omega^2}. \quad (1.3)$$

Нехай потенціальна енергія (1.3), що подається ззовні, без втрат переходить в пружну енергію стержня (1.2), тобто має місце рівність

$$U = \frac{(P_a)^2}{2m_1\omega^2} = \frac{\sigma_{a1}^2 m_1}{2E_1 \rho_1}. \quad (1.4)$$

Виходячи з балансу енергій (1.4), власна частота стержня буде

$$\omega = P_a \sqrt{E_1 \rho_1} / \sigma_{a1} m_1. \quad (1.5)$$

Приймається, що амплітудне значення руйнуючого навантаження P_e , яке відповідає границі міцності σ_e , враховуючи (1.4), дорівнює

$$P_e = \sigma_e m_1 \omega / \sqrt{E_1 \rho_1}, \quad (1.6)$$

а енергія руйнування

$$U_0 = P_e^2 / 2m_1\omega^2. \quad (1.7)$$

Тому критерієм руйнування прийнято виконання нерівності

$$\frac{P_e^2}{m_1\omega^2} - \frac{\sigma_{aj}(i)^2 m_j(i)}{E_j(i) \rho_j(i)} < 0 \quad (1.8)$$

в j -ій половині i -го циклу, коли поточна енергія стержня стане більшою енергії руйнування. Цей цикл $i = N < N_0$ є циклічною довговічністю при початковому напруженні σ_{a1} , яке викликано циклічним симетричним навантаженням P_a . Обчислення значень точок циклічної довговічності N кривої втоми $N(\sigma_a)$ відбувається до тих пір, поки відповідні їм спадаючі початкові амплітудні напруження σ_a досягнуть такого граничного значення, що відповідна кількість циклів навантаження N стає більшою умовно заданого числа циклів N_0 (прийнята база) напружень, а зразок не зруйнувався. Цей підхід дозволяє визначити границю втоми, але строге його обґрунтування вимагає додаткових досліджень і тут не розглядається. Необхідною умовою досягнення границі втоми в процесі обчислень буде не виконання нерівності (1.8) $\forall i \geq N_0$ за границями прийнятої бази випробувань N_0 .

1.2. Умови руйнування. В процесі стиску відбувається приріст об'єму мікротріщин за рахунок збільшення простору між зернами. Нові об'єми утворюються при розриві зерен і кристалів, що складають зерна. В результаті сумарний об'єм мікротріщин стержня (початковий прийнято рівним нулю) зростає і викликає зміну малих пружних деформацій. При стиску має місце зменшення загальної несучої маси стержня, яка є сумою зв'язаних локальних несучих мас, що не перетинаються. Локальною несучою масою вважається максимальна частина всієї несучої частини зразка в довільному перетині малої товщини, відсутність якої в даний момент часу в цьому перетині призведе до фрагментації зразка, тобто його руйнування як цілого. Таке зменшення несучої маси відбувається в середині за рахунок відриву від стержня його частинок. Ці частинки утворюються шляхом відколювання, розкришення, неузгодженості проковзування, стирання (зношення поверхонь дотику), прокручування (внаслідок втрати стійкості) зерен, але залишаються в просторі пустот та тріщин, які проростають між стиками зерен, в середині зерен і розділених кристалах [11, 15]. Загальна несуча маса зменшується як на внутрішню, так і на зовнішню частину, яка відділяється від поверхні стержня. В процесі розтягу відбувається приріст об'єму мікротріщин за рахунок

приєднання пор при дифузії вакансій із зерен до їх границь. Причиною утворення точкових дефектів (вакансій) є рух дислокацій. На границях зерен в результаті злиття пор утворюються мікротріщини, як наслідок зростає їх сумарний об'єм, частина якого виклинюється на поверхню стержня.

Залежність середніх напружень $\sigma_{срj}(i)$ та об'ємної деформації $\varepsilon_{Vj}(i)$ при одноісному розтягу-стиску в границях пружності в j -му півциклі i -го циклу має вигляд

$$\sigma_{срj}(i) = \frac{E_1(i)}{3(1-2\mu)} \varepsilon_{Vj}(i), \quad (1.9)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона; $E_1(i)$ – модуль пружності. Припускається, що при руйнуванні стержня в кожному циклі навантажень пружна енергія не розсіюється на тепловий нагрів, нескінченно мало витрачається на зміну форми, але вся йде на зміну об'єму.

§2. Модель втомного руйнування.

Об'ємна деформація $\varepsilon_{Vj}(i)$ в першому $j=1$ та другому $j=2$ півциклах першого $i=1$ та довільного i -го циклів буде

$$\varepsilon_{Vj}(1) = \begin{cases} \frac{V_2(0) - V_1(1)}{V_2(0)} = \frac{\Delta V_1(1)}{V_2(0)}, & j=1; \\ \frac{V_1(1) - V_2(1)}{V_1(1)} = \frac{\Delta V_2(1)}{V_1(1)}, & j=2; \end{cases} \quad i=1;$$

$$\varepsilon_{Vj}(i) = \begin{cases} \frac{V_{j+1}(i-1) - V_j(i)}{V_{j+1}(i-1)} = \frac{\Delta V_j(i)}{V_{j+1}(i-1)}, & j=1; \\ \frac{V_{j-1}(i) - V_j(i)}{V_{j-1}(i)} = \frac{\Delta V_j(i)}{V_{j-1}(i)}, & j=2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Тут і далі $V_2(0) = V_1$, де $V_j(i)$ – об'єм стержня. Об'ємна деформація (2.1) зв'язана з поздовжніми лінійними деформаціями $\varepsilon_{xy}(i)$ при стиску чи розтягу співвідношеннями

$$\varepsilon_{Vj}(i) = (1-2\mu)\varepsilon_{xy}(i). \quad (2.2)$$

Нехай в початковий момент часу $t=0$ розтягнутий стержень має масу m_1 , об'єм $V_1 = F_1 l_1$ і густину ρ_1 . Припускається, що істинний об'єм стержня в процесі циклічного навантаження (1.1) зменшується. Розглядається рекурентний процес зміни стану стержня на кожному циклі, викликаний втомою.

2.1. Стиск $j=1$ в циклі $i=1$. Під дією стискаючого навантаження (1.1) в першому півциклі $j=1$ першого циклу $i=1$ стержень пружно деформується. В півциклі стиску в стержні змінюються його несуча маса і об'єм, але зберігається густина. Таким чином, $\rho_1(1)$ дорівнює початковій густині

$$\rho_1 = \rho_1(1). \quad (2.3)$$

В загальному випадку для довільних найближчих циклів навантаження $(i-1)$ -го в півциклі $j=2$ розтягу та i -го в півциклі $j=1$ стиску знайдена густина $\rho_2(i-1)$ попереднього циклу дорівнює густині $\rho_1(i)$ наступного циклу, тобто

$$\rho_2(i-1) = \rho_1(i); \quad \forall i > 1. \quad (2.4)$$

Початковий розтягнутий стан стержня і стан в першому півциклі $j=1$ стиску першого $i=1$ циклу зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_1 V_1}{m_1} = \frac{\rho_1(1) V_1(1)}{m_1(1)} = \frac{\rho_1(1)(V_1 - \Delta V_1(1))}{m_1(1)}, \quad (2.5)$$

де $m_1(1)$ – несуча маса стержня; $V_1(1)$ – об'єм і приріст $\Delta V_1(1) = V_1 - V_1(1)$ об'єму.

Залежність між поточною масою $m_1(1)$ і об'ємною деформацією $\varepsilon_{V1}(1)$ цього циклу, виходячи з рівнянь (2.3), (2.5), буде

$$\frac{m_1(1)}{m_1} = 1 - \varepsilon_{V1}(1). \quad (2.6)$$

Враховуючи вирази площ поперечного перетину стержня початкової $F_1 = P_a / \sigma_{xa1}$ та площі $F_1(1) = P_a / \sigma_{xa1}(1)$ в півциклі $j=1$ першого циклу стиску, рівняння (2.5) перетворюються в

$$\frac{1}{P_a} = \frac{l_1}{m_1 \sigma_{xa1}} = \frac{l_1(1)}{m_1(1) \sigma_{xa1}(1)}; \quad l_1(1)/l_1 = 1 + \varepsilon_{xa1}(1). \quad (2.7)$$

Виходячи з рівнянь (2.7), залежності між напруженнями набувають вигляду

$$\sigma_{xa1}(1) = (1 + \varepsilon_{xa1}(1)) \frac{m_1}{m_1(1)} \sigma_{xa1}. \quad (2.8)$$

Лінійну деформацію ε_{xa1} і відношення мас $m_1(1)/m_1$ зв'язує рівність

$$\varepsilon_{xa1}(1) = \frac{1}{1-2\mu} \left(1 - \frac{m_1(1)}{m_1} \right), \quad (2.9)$$

отримана з (2.2) і (2.6). З рівності (2.9) знаходиться $1 + \varepsilon_{xa1}(1)$ через співвідношення мас. Скориставшись ним в рівнянні (2.8), отримуємо

$$\sigma_{xa1}(1) = \left(\frac{m_1}{m_1(1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}. \quad (2.10)$$

Середнє напруження півциклу $j=1$ стиску довільного i -го циклу можна подати у вигляді

$$\sigma_{cp1}(i) = \frac{1}{3} \left(\sigma_{xa1}(i) \left(1 - \frac{4\mu G_1(i-1)}{E_1(i-1)} \right) + 2\lambda_1(i-1) \varepsilon_{V1}(i) \right), \quad (2.11)$$

де $\lambda_1(i-1) = \frac{2\mu G_1(i-1)}{1-2\mu}$.

Залежність (2.11) для поточного півциклу стиску $j=1$ першого циклу $i=1$ після перепозначень поточних констант початковими пружними константами $E_1(0) = E_1$, $G_1(0) = G_1$, $\lambda_1(0) = \lambda_1$ набуває вигляду

$$\sigma_{cp1}(1) = \frac{1}{3} \left(\sigma_{xa1}(1) \left(1 - \frac{4\mu G_1}{E_1} \right) + 2\lambda_1 \varepsilon_{V1}(1) \right). \quad (2.12)$$

Скориставшись співвідношеннями (2.6), (2.10), рівняння (2.12) перетворюється в

$$\sigma_{cp1} = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{4\mu G_1}{E_1} \right) \left(\frac{m_1}{m_1(1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1} + 2\lambda_1 \left(1 - \frac{m_1(1)}{m_1} \right) \right]. \quad (2.13)$$

З іншого боку середнє напруження та співвідношення мас представляється як

$$\sigma_{cp1} = K_1 \left(1 - \frac{m_1(1)}{m_1} \right), \quad (2.14)$$

де $K_1 = K_1(0)$ – коефіцієнт об'ємного розширення.

Рівняння (2.13), (2.14) зводяться виключенням середнього напруження до

$$E_1 \left(\frac{m_1(1)}{m_1} \right)^2 - (E_1 + \sigma_{xa1}) \frac{m_1(1)}{m_1} + 2(1-\mu)\sigma_{xa1} = 0. \quad (2.15)$$

З квадратного рівняння (2.15) знаходиться співвідношення мас $m_1(1)/m_1$, що дозволяє з (2.10) визначити амплітудне напруження $\sigma_{xa1}(1)$. Таким чином, стають відомими маса $m_1(1)$ та амплітудне напруження $\sigma_{xa1}(1)$. Врахувавши значення власної частоти (1.5), густини (2.3), знайдених маси і напружень баланс енергії півциклу $j=1$ цього циклу $i=1$ визначається, як

$$U = \frac{(P_a)^2}{2m_1(1)\omega^2} = \frac{(\sigma_{xa1}(1))^2 m_1(1)}{2E_1(1) \rho_1(1)}. \quad (2.16)$$

З рівності енергій (2.16) знаходиться новий модуль пружності $E_1(1)$ стержня. Визначені на цьому півциклі маса $m_1(1)$, напруження $\sigma_{xa1}(1)$, модуль пружності $E_1(1)$ стають початковими даними для наступної половини циклу. Коефіцієнт Пуассона постійний, так як форма стержня незмінна. Величина модуля пружності змінюється і викликана зменшенням маси і збільшенням густини в кожному циклі.

2.2. Розтяг $j=2$ в циклі $i=1$. Для другого $j=2$ півциклу першого $i=1$ циклу прийнято, що маса не змінюється і дорівнює масі $m_1(1)$ знайденої в попередньому півциклі стиску цього циклу

$$m_1(1) = m_2(1), \quad (2.17)$$

початкова густина буде (2.3) для довільного циклу (2.4). Припущення відносно маси в процесі втоми виконується для обох півциклів довільного циклу

$$m_1(i) = m_2(i). \quad (2.18)$$

В другому півциклі стан стержня зв'язаний з початковим станом і станом першого півциклу цього циклу рівняннями

$$1 = \frac{\rho_1 V_1(1)}{m_1(1)} = \frac{\rho_2(1) V_2(1)}{m_2(1)} = \frac{\rho_2(1)(V_1(1) - \Delta V_2(1))}{m_2(1)}, \quad (2.19)$$

де $\rho_2(1)$ – істинна густина; $V_2(1)$ – об'єм стержня. Залежність між істинною густиною цього півциклу $\rho_2(1)$ і об'ємною деформацією $\varepsilon_{V_2}(1)$ визначається з рівнянь (2.17), (2.19) і буде

$$\frac{\rho_1}{\rho_2(1)} = 1 - \varepsilon_{V_2}(1). \quad (2.20)$$

Враховуючи вирази для площ поперечного перетину стержня $F_1(1) = P_a / \sigma_{xa1}(1)$ в першому півциклі стиску та $F_2(1) = P_a / \sigma_{xa2}(1)$ в другому півциклі розтягу, рівняння (2.19) перетворюються в

$$\frac{m_1(1)}{P_a} = \frac{\rho_1 l_1(1)}{\sigma_{xa1}(1)} = \frac{\rho_2(1) l_2(1)}{\sigma_{xa2}(1)}; \quad \frac{l_2(1)}{l_1(1)} = 1 + \varepsilon_{xa2}(1). \quad (2.21)$$

Виходячи з рівнянь (2.21) залежність між напруженнями $\sigma_{xa1}(1)$ та $\sigma_{xa2}(1)$ відповідно першого та другого півциклів першого циклу набуває вигляду

$$\sigma_{xa2}(1) = (1 + \varepsilon_{xa2}(1)) \frac{\rho_2(1)}{\rho_1} \sigma_{xa1}(1). \quad (2.22)$$

Лінійну деформацію повзучості ε_{xa2} та відношення густин $\rho_1 / \rho_2(1)$ зв'яже рівняння

$$\varepsilon_{xa2}(1) = \frac{1}{1 - 2\mu} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2(1)} \right), \quad (2.23)$$

отримане з (2.2) і (2.20).

Залежність (2.22) після врахування (2.23) представляється рівнянням

$$\sigma_{xa2}(1) = \left(\frac{\rho_2(1)}{\rho_1} \left(1 + \frac{1}{1 - 2\mu} \right) - \frac{1}{1 - 2\mu} \right) \sigma_{xa1}(1), \quad (2.24)$$

де $\rho_2(1)$ – істинна густина стержня при розтязі в другому півциклі першого циклу.

Середнє напруження півциклу розтягу $j = 2$ довільного i -го циклу можна представити у вигляді

$$\sigma_{cp2}(i) = \frac{1}{3} \left(\sigma_{xa2}(i) \left(1 - \frac{4\mu G_1(i)}{E_1(i)} \right) + 2\lambda_1(i) \varepsilon_{V2}(i) \right). \quad (2.25)$$

Залежність (2.25) для півциклу розтягу $j = 2$ першого циклу $i = 1$ має вигляд

$$\sigma_{cp2}(1) = \frac{1}{3} \left(\sigma_{xa2}(1) \left(1 - \frac{4\mu G_1(1)}{E_1(1)} \right) + 2\lambda_1(1) \varepsilon_{V2}(1) \right). \quad (2.26)$$

Скориставшись співвідношеннями (2.20), (2.24), рівність (2.26) перетвориться в

$$\sigma_{cp2}(1) = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{4\mu G_1(1)}{E_1(1)} \right) \left(\frac{\rho_2(1)}{\rho_1} \left(1 + \frac{1}{1 - 2\mu} \right) - \frac{1}{1 - 2\mu} \right) \sigma_{xa1}(1) + 2\lambda_1(1) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2(1)} \right) \right]. \quad (2.27)$$

З іншого боку, середнє напруження та відношення густин зв'яже вираз

$$\sigma_{cp2}(1) = K_1(1) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2(1)} \right). \quad (2.28)$$

Рівняння (2.27), (2.28) зводяться виключенням середнього напруження до

$$2(1 - \mu) \sigma_{xa1}(1) \left(\frac{\rho_2(1)}{\rho_1} \right)^2 - (E_1(1) + \sigma_{xa1}(1)) \frac{\rho_2(1)}{\rho_1} + E_1(1) = 0, \quad (2.29)$$

з якого знаходиться відношення густин $\rho_2(1)/\rho_1$, яке дозволяє з (2.24) визначити амплітудне напруження $\sigma_{xa2}(1)$. Маса (2.17) за припущенням не змінювалась, а модуль не перераховувався на даному півциклі $j = 2$ розтягу першого циклу. Обчислені на цьому півциклі густина $\rho_2(1)$, напруження $\sigma_{xa2}(1)$ використовуються як початкові дані для наступного циклу. Далі перевіряється нерівність (1.8) при $j = 2, i = 1$. Якщо вона виконується, руйнування відбулося і обчислення припиняються, в іншому випадку – продовжуються. Такі рекурентні розрахунки проводяться і в наступних циклах. Для довільного i -го циклу процедура обчислень напружень, несучої маси, модуля пружності, істинної густини буде наступною.

2.3. Стиск $j = 1$ в i -му циклі. В першому півциклі $j = 1$ стиску i -го циклу припускається, що $\rho_1(i)$ дорівнює густині, знайденій в попередньому $(i - 1)$ -му циклі

$$\rho_2(i - 1) = \rho_1(i), \quad (2.30)$$

а для мас виконується

$$m_1(i - 1) = m_2(i - 1). \quad (2.31)$$

Стан стержня в $(i - 1)$ -му та i -му циклах зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_2(i - 1)V_2(i - 1)}{m_2(i - 1)} = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_1(i)(V_2(i - 1) - \Delta V_1(i))}{m_1(i)}, \quad (2.32)$$

де $m_1(i)$ – несуча маса та $V_1(i)$ – об'єм стержня. Залежність між несучою масою цього циклу $m_1(i)$ і об'ємною деформацією $\varepsilon_{V1}(i)$ визначається з рівнянь (2.32) і буде

$$\frac{m_1(i)}{m_2(i - 1)} = 1 - \varepsilon_{V1}(i). \quad (2.33)$$

Враховуючи вирази для площ поперечного перетину стержня $F_2(i - 1) = P_a / \sigma_{xa2}(i - 1)$ в другому півциклі розтягу $(i - 1)$ -го циклу та $F_1(i) = P_a / \sigma_{xa1}(i)$ в першому півциклі стиску i -го циклу, рівняння (2.32) перетворюються в

$$\frac{1}{\rho_2(i - 1)P_a} = \frac{l_2(i - 1)}{m_1(i - 1)\sigma_{xa2}(i - 1)} = \frac{l_1(i)}{m_1(i)\sigma_{xa1}(i)}; \quad \frac{l_1(i)}{l_2(i - 1)} = 1 + \varepsilon_{xa1}(i). \quad (2.34)$$

Виходячи з рівнянь (2.34), залежності між напруженнями набувають вигляду

$$\sigma_{xa1}(i) = [1 + \varepsilon_{xa1}(i)] \frac{m_1(i - 1)}{m_1(i)} \sigma_{xa2}(i - 1). \quad (2.35)$$

Лінійну деформацію ε_{xa1} і відношення мас $m_1(i)/m_1(i - 1)$ зв'язує рівність

$$\varepsilon_{xa1}(i) = \frac{1}{1 - 2\mu} \left(1 - \frac{m_1(i)}{m_1(i - 1)} \right), \quad (2.36)$$

отримана з (2.2) і (2.33). Залежність (2.35) з врахуванням рівності (2.36) перетворюється в

$$\sigma_{xa1}(i) = \left(\frac{m_1(i - 1)}{m_1(i)} \left(1 + \frac{1}{1 - 2\mu} \right) - \frac{1}{1 - 2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i - 1), \quad (2.37)$$

де $m_1(i)$ – несуча маса стержня при стиску в першому півциклі i -го циклу.

Залежності (2.11) для півциклу стиску $j = 1$ i -го циклу представляються у вигляді

$$\sigma_{cp1}(i) = \frac{1}{3} \left(\sigma_{xa1}(i) \left(1 - \frac{4\mu G_1(i-1)}{E_1(i-1)} \right) + 2\lambda_1(i-1)\varepsilon_{V1}(i) \right), \quad (2.38)$$

$$\text{де } \lambda_1(i-1) = \frac{2\mu G_1(i-1)}{1-2\mu}.$$

Середнє напруження (2.38) після підстановки співвідношень (2.36), (2.37) стає

$$\begin{aligned} \sigma_{cp1}(i) = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{4\mu G_1(i-1)}{E_1(i-1)} \right) \left(\frac{m_1(i-1)}{m_1(i)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i-1) + \right. \\ \left. + 2\lambda_1(i-1) \left(1 - \frac{m_1(i)}{m_1(i-1)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

З іншого боку, середнє напруження та співвідношення мас представляються як

$$\sigma_{cp1}(i) = K_1(i-1) \left(1 - \frac{m_1(i)}{m_1(i-1)} \right), \quad (2.40)$$

де $K_1(i-1)$ коефіцієнт об'ємного розширення попереднього циклу.

Рівняння (2.39), (2.40) зводяться виключенням середнього напруження до

$$E_1(i-1) \left(\frac{m_1(i)}{m_1(i-1)} \right)^2 - [E_1(i-1) + \sigma_{xa2}(i-1)] \frac{m_1(i)}{m_1(i-1)} + 2(1-\mu)\sigma_{xa2}(i-1) = 0. \quad (2.41)$$

З квадратного рівняння (2.41) при відомій масі (2.31) визначається співвідношення мас $m_1(i)/m_1(i-1)$, що дозволяє з (2.37) визначити амплітудне напруження $\sigma_{xa1}(i)$. Таким чином, стають відомими маса $m_1(i)$ та амплітудне напруження $\sigma_{xa1}(i)$. Врахувавши значення власної частоти (1.5), густини (2.30), знайдених маси і напружень баланс енергії півциклу $j=1$ цього циклу $i=i$, визначається, як

$$U = \frac{P_a^2}{2m_1(i)\omega^2} = \frac{(\sigma_{xa1}(i))^2 m_1(i)}{2E_1(i) \rho_1(i)}. \quad (2.42)$$

З рівності енергій (2.42) знаходиться новий модуль пружності стержня $E_1(i)$. Визначені на цьому півциклі маса $m_1(i)$, напруження $\sigma_{xa1}(i)$, модуль пружності $E_1(i)$ стають початковими даними для наступної половини циклу.

2.4. Розтяг $j=2$ в i -му циклі. В другому $j=2$ півциклі i -го циклу прийнято, що маса не змінюється і дорівнює масі $m_1(i)$, знайденої в попередньому півциклі стиску цього циклу

$$m_1(i) = m_2(i), \quad (2.43)$$

а для густин виконується

$$\rho_1(i) = \rho_2(i-1). \quad (2.44)$$

Стан стержня в першому та другому півциклах i -го циклу зв'язують рівняння

$$1 = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_2(i)V_2(i)}{m_2(i)} = \frac{\rho_2(i)(V_1(i) - \Delta V_2(i))}{m_2(i)}, \quad (2.45)$$

де $\rho_2(i)$ – істинна густина; $V_2(i)$ – об’єм стержня. Залежність істинної густини $\rho_2(i)$ та об’ємної деформації $\varepsilon_{V2}(i)$ визначається з рівнянь (2.45) і буде

$$\frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} = 1 - \varepsilon_{V2}(i). \quad (2.46)$$

Враховуючи вирази для площ поперечного перетину стержня $F_1(i) = P_a / \sigma_{xa1}(i)$ в першому півциклі стиску та $F_2(i) = P_a / \sigma_{xa2}(i)$ в другому півциклі розтягу, рівняння (2.45) перетворюються в

$$\frac{m_1(i)}{P_a} = \frac{\rho_1(i)l_1(i)}{\sigma_{xa1}(i)} = \frac{\rho_2(i)l_2(i)}{\sigma_{xa2}(i)}; \quad \frac{l_2(i)}{l_1(i)} = 1 + \varepsilon_{xa2}(i). \quad (2.47)$$

Виходячи з рівнянь (2.47), залежність між напруженнями $\sigma_{xa1}(i)$ та $\sigma_{xa2}(i)$ відповідно першого та другого півциклів i -го циклу набуває вигляду

$$\sigma_{xa2}(i) = (1 + \varepsilon_{xa2}(i)) \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \sigma_{xa1}(i). \quad (2.48)$$

Лінійну деформацію повзучості $\varepsilon_{xa2}(i)$ та відношення густин $\rho_2(i-1) / \rho_2(i)$ зв’яже рівняння

$$\varepsilon_{xa2}(i) = \frac{1}{1-2\mu} \left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right), \quad (2.49)$$

отримане з (2.2) і (2.46). Залежність (2.48), коли деформація $\varepsilon_{x2}(i)$ виражається як (2.49), буде

$$\sigma_{xa2}(i) = \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i), \quad (2.50)$$

де $\rho_2(i)$ – невідома істинна густина стержня при розтязі в другому півциклі i -го циклу. Залежність (2.11) для півциклу розтягу $j = 2$ цього циклу буде

$$\sigma_{cp2}(i) = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{4\mu G_1(i)}{E_1(i)} \right) \sigma_{xa2}(i) + 2\lambda_1(i) \varepsilon_{V2}(i) \right). \quad (2.51)$$

Використавши співвідношення (2.46), (2.50) в (2.51), отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{cp2}(i) = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{4\mu G_1(i)}{E_1(i)} \right) \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i) + \right. \\ \left. + 2\lambda_1(i) \left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

З іншого боку, середнє напруження та відношення густин зв’яже вираз

$$\sigma_{cp2}(i) = K_1(i) \left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right). \quad (2.53)$$

Рівняння (2.52), (2.53) зводяться виключенням середнього напруження до

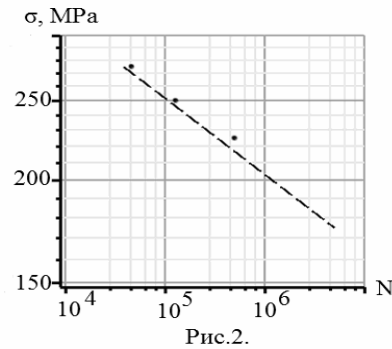
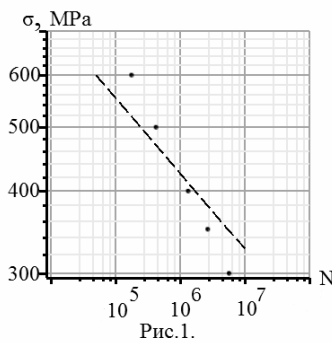
$$2(1-\mu)\sigma_{xa1}(i) \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \right)^2 - (E_1(i) + \sigma_{xa1}(i)) \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} + E_1(i) = 0, \quad (2.54)$$

з якого визначається відношення густин $\rho_2(i)/\rho_2(i-1)$, де густина попереднього циклу відома (2.44), яке дозволяє з (2.50) визначити амплітудне напруження $\sigma_{xa2}(i)$. Маса (2.43), за припущенням, не змінювалась. Модуль пружності при цьому не перераховувався. Обчислені на цьому півциклі густина $\rho_2(i)$, напруження $\sigma_{xa2}(i)$ використовуються як початкові дані для наступного циклу. Далі перевіряється нерівність (1.8) при $j=2$, $i=i$. Якщо вона виконується, руйнування відбулося і обчислення припиняються, в іншому випадку – продовжуються.

§3. Обчислення кривої втоми в умовах симетричного навантаження.

Базове число циклів прийняте рівним $N_0 = 10 \cdot 10^6$. Визначається циклічна довговічність стержня для кожного початкового амплітудного напруження в порядку спадання. Перше значення амплітудного напруження менше напруження течії $\sigma_a < \sigma_T$. Кожне значення циклічної довговічності визначається за наступною схемою. В першому півциклі кожного циклу, відповідно приведеній вище моделі обчислень перевіряється виконання нерівності (1.8) – потенціальної пружної U і руйнуючої $U_0 = P_a^2 / 2m_1\omega^2$ енергій стержня. Як тільки нерівність стає рівністю на якомусь j -му півциклі i -го циклу, обчислення припиняються згідно умови фрагментації стержня. Розрахунки проводились в кожному півциклі, тому істинне число циклів до руйнування (циклічна довговічність) в два рази менше. Знайдено початкові амплітудні напруження, для яких збільшення числа циклів понад базове число не призводить до руйнування стержнів. Тобто, ці амплітудні напруження близькі до границі втоми, тому нерівність (1.8) не виконується для значень відповідних циклів, які перевищують прийняту базову кількість циклів – $i \geq N_0$. Для апробації моделі знаходиться розрахункова крива втоми стержня при різних рівнях прикладених циклічних навантажень P_a з частотою $\Omega = 36$ гц при температурі $\theta = 20^\circ\text{C}$. Фізико-механічні властивості матеріалів стержнів, їх початкові – маса m_1 , густина ρ_1 , геометричні розміри – довжина l_1 , площа перетину F_1 приведені в таблиці.

Матеріал	σ_e , МПа	σ_R , МПа	μ	E_1 , МПа	m_1 , кг	ρ_1 , кг/м ³	l_1 , м	F_1 , м ²
Нікелевий сплав ЭИ867	1200	800	0,294	$2,28 \cdot 10^{11}$	0,151367625	8570	0,040	0,00004415625
Алюмінієвий сплав Д16АТ	483	300	0,33	$7,31 \cdot 10^{10}$	0,0193259891458	2780	0,049	0,000020258024



Початковий модуль пружності E_1 , коефіцієнт Пуассона μ , границя міцності σ_e , границя течії (пропорційності) σ_{ny} визначаються із стандартних випробувань на пружність. Стержні мають форму циліндричних прутиків та виготовлені: перший – з жаростійкого нікелевого сплаву ЭИ867 діаметром 7,5 мм, другий – з алюмінієвого сплаву Д16АТ діаметром 5,08 мм [3, 8].

Результати розрахунків (пунктирна лінія) та експериментів (крапки) відповідно кривих втоми та кривих Велера для нікелевого ЭИ867 та алюмінієвого Д16АТ сплавів наведені на рис. 1 та рис. 2 в логарифмічному масштабі по обох осях.

§4. Обговорення результатів.

Вперше запропонована модель прогнозування втомного руйнування стержня в умовах симетричного циклічного навантаження розтяг-стиск. Припускається, що частота дії зовнішньої циклічної сили набагато менша власної частоти зразка. Це дозволяє не враховувати частоту зовнішньої циклічної сили. Моделювання процесу руйнування відбувається, коли змінюється істинний об'єм стержня, але не змінюється його форма, що підтверджено експериментами на багатоциклічну втому. Розрахункові криві втоми порівнювались з експериментальними даними. В моделі не враховувалась неоднорідність будови матеріалів, яка є причиною зміни форми. Малі зміни геометрії, як показують експерименти, себе проявляють мало. Основні особливості моделі в тому, що відслідковуються зміни властивостей матеріалу стержня по циклах, коли в одному півциклі (непарному) обчислюються зміни маси, напружень, модуля пружності при незмінній густині, а в наступному півциклі (парному) обчислюється густина, перераховуються напруження при незмінній масі. Модуль пружності визначається з балансу потенціальних енергій зовнішньої та пружної, яка приймається стержнем без втрат. Вказані особливості викликали потребу детального розгляду рекурентного процесу. Його програмування проведено в загальнодоступній системі комп'ютерної алгебри. Написана програма дає можливість прогнозувати циклічну довговічність при різних симетричних навантаженнях.

Отримані розрахунки, виходячи з даних таблиці, задовільно співпадають з експериментальними даними (рис. 1 і рис. 2). При зменшенні початкових амплітудних напружень похибка зменшується до перетину розрахункової та експериментальної кривих втоми, що можливо зв'язано із зменшенням швидкості навантаження, а значить зменшенням впливу пластичних деформацій. Швидкість навантаження спадає, так як вона пропорційна добутку початкових амплітудних напружень на періодичну функцію частоти навантажень, яка фіксована. Розрахункова циклічна довговічність не перевищує допустимі значення, продиктовані вимогами практики [4]. Отже, проведене дослідження показує, що запропонована модель обчислення циклічної довговічності стержнів є достатньо ефективною.

Висновки.

Особливість задачі моделювання процесу руйнування стержня за умов багатоциклічної втоми в тому, що в границях теорії пружності на кожному півциклі знаходяться початкові дані, які використовуються в наступному півциклі, тобто фактично йде рекурентний процес. Початкові дані отримані експериментально, це пружні константи, маса, густина, розміри стержня. Підхід до визначення циклічної довговічності при даному початковому амплітудному напруженні ґрунтується на перерахунку в кожному півциклі стиску несучої маси, істинного об'єму, напружень, модуля пружності при незмінній густині, а на півциклі розтягу – густини, напружень при незмінній масі з перевіркою на кожному півциклі критерію руйнування. На основі отриманих в результаті обчислень циклічних довговічностей при відповідних початкових амплітудних напруженнях побудовані розрахункові криві втоми жароміцних та алюмінієвих сплавів включно до границь втоми. Самі величини границі втоми вимагають додаткових досліджень. Встановлено, що відхилення розрахункових від експериментальних значень втоми знаходяться в допустимих границях. Вказана методика обчислень вра-

ховує масштабний фактор та неявно зростання пошкоджень і тріщини. Причиною цих зростань є зменшення маси та збільшення густини. Також ці фактори призводять до збільшення пружної потенціальної енергії, що отримує стержень в кожному циклі і це збільшення веде до втомного руйнування. Наведені результати можуть використовуватися як відправні в дослідженнях на втому за умов комбінованого навантаження стержнів.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу руйнування пружного стержня при циклічному розтязі – стискові. Змодельовано зміни стану стержня на кожному циклі навантаження. Сформульовано критерій руйнування і знайдено циклічні довговічності, що відповідають даним початковим амплітудним навантаженням. Побудовано розрахункові криві втоми для жаростійкого нікелевого сплаву ЭИ867 та легкого сплаву Д16АТ на алюмінієвій основі та порівняно їх з відповідними експериментальними кривими.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: симетричний розтяг-стиск, модель втоми, критерій втомного руйнування.

1. *Афанасьев Н.Н.* Статистическая теория усталостной прочности материалов. – Киев: Изд.-во АН УССР, 1953. – 105 с.
2. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. – Москва: ГИФМЛ, 1959. – 856 с.
3. *Голуб В.П., Погребняк А.Д.* Высокотемпературное разрушение материалов при циклическом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1994. – 228 с.
4. *Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П.* Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность (справочник). – Москва: Машиностроение, 1985. – 224 с.
5. *Кобзарь Ю.М.* К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении-сжатии // *Авиационно-космическая техника и технология.* – 2015. – **126**, № 9. – С. 6 – 146.
6. *Матвеев О.М.* Механіка та теорія відносності. – Київ: Вища школа, 1993. – 288 с.
7. *Троценко В.Т., Сосновский Л.А.* Статистическая теория усталостной прочности в условиях сложного напряженного состояния // *Пробл. прочности: сообщ.* 1 и 2. – 1979. – № 7. – С. 3 – 11.
8. *Троценко В.Т., Сосновский Л.А.* Сопротивление усталости металлов и сплавов: Справочник в 2-х томах. – Киев: Наук. думка, 1987. – Том 1. – 510 с., Том 2. – 825 с.
9. *Fisher J.C., Hollomen J.H.* A statistical theory of fracture // *J. Met. Technol.* – 1947. – **14**, N 5. – P. 1 – 16.
10. *Golub V.P., Plashchynska A.V.* A Phenomenological Model of Fatigue Crack Growth in Perfectly Plastic Infinite Plates under Completely Reversed Uniaxial Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 12. – P. 1426 – 1436.
11. *Klesnil M., Lukas H.* Fatigue of Metallic Materials. – Prague: Academia, 1980. – 239 p.
12. *Rolfe S.T., Barsom J.M.* Fracture and Fatigue Control in Structure. Application of Fracture Mechanics. – New Jersey: Prentice-Hall, 1977. – 562 p.
13. *Serensen S.V.* Fatigue failure criteria in large member of cycles // *JSME Semi Int. Symp. Proc.* – 1967. – N 1. – P. 91-95.
14. *Stowell E.Z.* A study of the energy criterion for fatigue // *Nuclear Engineering and Design.* – 1966. – **3**, N 1. – P.32 – 40.
15. *Tanaka T.* Effect of the superimposed stress of high frequency on fatigue strength // *Bull. JSME.* – 1968. – **11**, N 43. – P. 77 – 83.
16. *Veibull W.* A statistical theory of the strength of materials // *Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res.* 1939. – N 151. – P. 5 – 48.

Надійшла 23.02.2021

Затверджена до друку 09.12.2021