

В. П. Голуб, Я. В. Павлюк, В. С. Резник

**ЩОДО РОЗРАХУНКУ ДЕФОРМАЦІЙ ПОВЗУЧОСТІ ТОНКОСТІННИХ  
ТРУБЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ ІЗ ЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ  
ЗА УМОВ РОЗТЯГУ ІЗ КРУЧЕННЯМ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України  
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна; e-mail: creep@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The problem of creep strains analysis of thin-walled tubular elements made of linearly viscoelastic materials under uniaxial tension, pure torsion, and combined tension with torsion is solved and experimentally approved. The analysis is based on the use of viscoelasticity models in the form of proportionality of deviators. The creep kernels are given by the fractional-exponential functions. The longitudinal, transversal, shear, and volume creep strains are calculated.

**Key words:** thin-walled tubular elements, linear viscoelastic materials, uniaxial tension, pure torsion, tension with torsion, creep strains analysis, experimental approval.

**Вступ.**

Оцінка несучої здатності елементів конструкцій із полімерних матеріалів при тривалій дії навантаження та температури здійснюється, як правило, з урахуванням розвитку процесу повзучості [1, 8, 9, 14, 15]. Розв'язок задач повзучості будується у цьому випадку на основі лінійної та нелінійних теорій повзучості спадкового типу.

За умов одномірного напруженого стану як модель повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів використовуються рівняння теорії спадкової пружності Больцмана – Вольєрра [7, 16]. На випадок складного напруженого стану рівняння Больцмана – Вольєрра узагальнюється у формі суперпозиції зсувної та об'ємної повзучості [3, 10], а також, виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів [11]. У роботах [10, 12] на основі моделі повзучості, що побудована у формі суперпозиції зсувної та об'ємної повзучості, розв'язано задачу розрахунку деформацій повзучості та релаксації напружень у тонкостінних трубчастих елементах за умов розтягу із крученням.

У даній роботі задача розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов розтягу із крученням розв'язується на основі моделі повзучості, що побудована, виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів.

**§1. Постановка задачі. Початкові співвідношення.**

Розглядається усталена повзучість тонкостінних трубчастих елементів круглого поперечного перерізу (рис. 1, *a*) з діаметром серединної поверхні  $d_{cp}$  й товщиною стінки  $h$  із лінійно-в'язкопружних матеріалів. Трубчасті елементи навантажуються постійним за часом осьовим розтягуючим зусиллям  $N$  та крутильним моментом  $M_t$ . Під усталеною повзучістю розуміється повзучість за умов постійних напружень.

Напружений стан тонкостінного трубчастого елемента двовісний (рис. 1, *b*), однорідний ( $h \ll d_{cp}$ ) та статично визначений. Нормальна  $\sigma_{xx}$  та дотична  $\tau_{xy}$  компоненти тензора напружень розраховуються, виходячи з рівнянь рівноваги, так що [15]

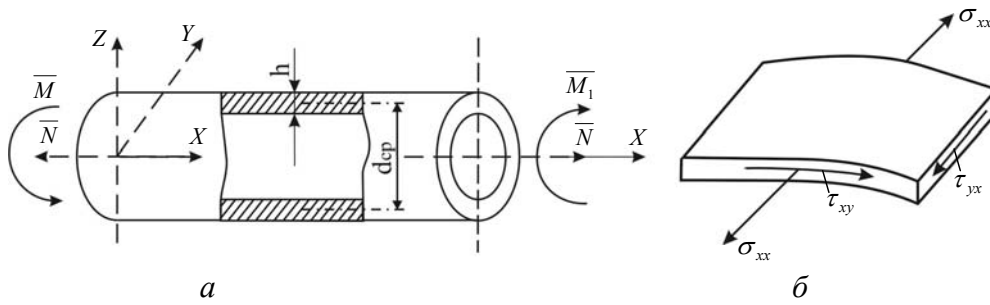


Рис. 1

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{\pi d_{cp} h}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{2M_t}{\pi d_{cp}^2 h}. \quad (1.1)$$

Визначальні рівняння лінійної теорії в'язкопружності за умов складного напруженого стану, що задає залежність між компонентами тензорів деформацій  $\varepsilon_{ij}(t)$ , тензорів напружень  $\sigma_{ij}$  та часом  $t$ , записуються, виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів у вигляді [11]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(t, \sigma_i)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) \quad (i, j = 1, 3); \\ \varepsilon_i(\sigma_i, t) &= \frac{2(1+\nu_0)}{3E} \left[ \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau \right]; \\ \varepsilon_v(\sigma_0, t) &= \frac{3(1-2\nu_0)}{E} \left[ \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (1.2)$$

де  $\varepsilon_v(t)$  і  $\varepsilon_i(t, \sigma_i)$  – об'ємна деформація та інтенсивність деформацій повзучості;  $\sigma_0(t)$  і  $\sigma_i(t)$  – середнє напруження та інтенсивність напружень;  $K_i(t-\tau)$  та  $K_v(t-\tau)$  – ядра інтенсивності деформацій повзучості та об'ємної повзучості;  $E$  – модуль пружності;  $\nu_0$  – коефіцієнт Пуассона;  $\lambda_i, \lambda_v$  – реологічні параметри;  $\delta_{ij}$  – одинична функція Кронекера.

Для компонентів тензора деформацій повзучості  $\varepsilon_{ij}(t)$  зі спільного розгляду рівнянь, що входять до (1.2), можна також записати

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \frac{(1+\nu_0)}{E} \frac{1}{\sigma_i(t)} \left[ \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau \right] \left[ \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} (\sigma_0(t)) \right] + \\ &+ \frac{(1-2\nu_0)}{E} \left[ \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right] \quad (i, j = \overline{1, 3}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

що дозволяє розраховувати значення деформацій повзучості при різних комбінаціях нормальних та дотичних напружень.

Ядра повзучості  $K_i(t-\tau)$  та  $K_v(t-\tau)$  в (1.2) задаються дробово-експоненціальними функціями [10, 11, 15], так що

$$K_i(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha_i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha_i)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_i)]} \quad (1.4)$$

та, відповідно,

$$K_v(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha_v}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha_v)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]}. \quad (1.5)$$

Тут  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  і  $\alpha_v$ ,  $\beta_v$  – параметри ядер інтенсивності деформацій повзучості й об’ємної повзучості;  $\Gamma[\cdot]$  – гамма-функція Ейлера.

Задача полягає у визначенні параметрів ядер інтенсивності деформацій повзучості й об’ємної повзучості лінійно-в’язкопружних матеріалів та в розв’язуванні задач розрахунку деформацій усталеної повзучості тонкостінних трубчастих елементів за умов комбінованого навантаження осьовим розтягом із крученням.

## §2. Матеріал трубчастих елементів. Матеріальні функції та константи.

Розв’язування задач повзучості елементів конструкцій із лінійно-в’язкопружних матеріалів з використанням системи визначальних рівнянь (1.3) передбачає обґрунтування лінійності в’язкопружних властивостей матеріалів, визначення пружних постійних  $E$  і  $\nu_0$  та визначення параметрів ядер інтенсивності деформацій повзучості  $K_i(t)$  та об’ємної повзучості  $K_v(t)$ .

**2.1. Матеріал трубчастих елементів. Базові експериментальні дані.** Як матеріал для трубчастих елементів обрані «оргстекло СТ-1» та «поліетилен високої щільності ПЭВП», а як базові експериментальні дані розглядаються криві поздовжньої та поперечної повзучості за умов одновісного розтягу та криві зсувної повзучості за умов чистого кручення. Експериментальні дані запозичені, відповідно, з [4] та [5].

На рис. 2 наведено експериментальні криві поздовжньої (*a*) та поперечної (*б*) повзучості оргстекла за умов одновісного розтягу напруженнями  $\sigma_{11} = 7,65$  (крива 1), 11,45 (крива 2) та 15,30 (крива 3) МПа. Тут і далі експериментальні дані наносяться точками. Лініями нанесена апроксимація експериментальних даних згладжуючими кубічними сплайнами. Методика побудови згладжуючих сплайн-апроксимацій експериментальних даних з повзучості викладена в роботі [13].

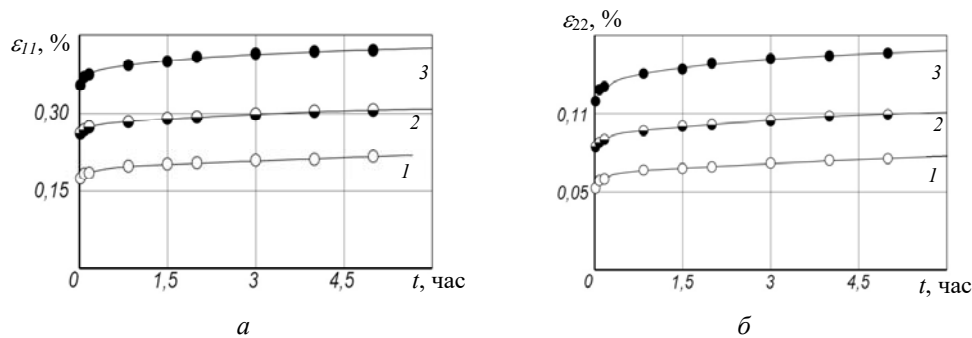


Рис. 2

На рис. 3, *a* наведено експериментальні криві поздовжньої (○) та поперечної (●) повзучості поліетилену за умов одновісного розтягу напруженнями  $\sigma_{11} = 2,5$  (крива 1) та 5,0 (крива 2) МПа, а на рис. 3, *б* – експериментальні криві зсувної повзучості за умов чистого кручення напруженнями  $\tau_{21} = 1,17$  (1) та 2,34 (2) МПа. Лініями, як і на рис. 1, нанесена апроксимація експериментальних даних згладжуючими кубічними сплайнами.

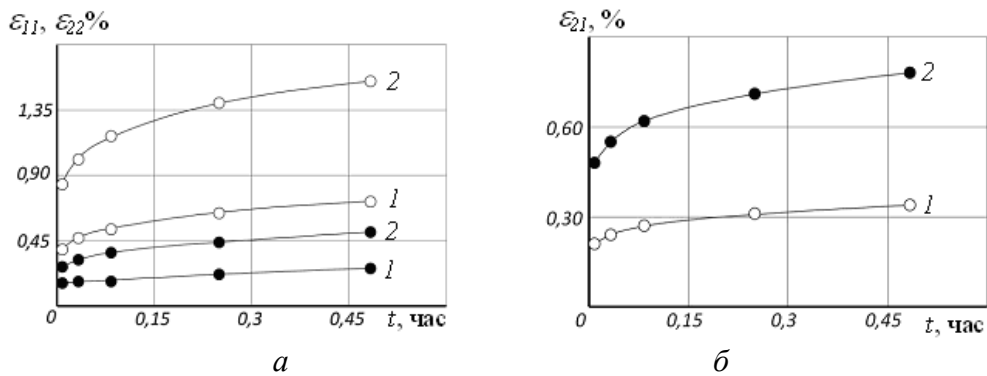


Рис. 3

**2.2. Обґрунтування області лінійності в'язкопружних властивостей матеріалів трубчастих елементів.** Вважається [10 – 12], що матеріал є лінійно-в'язкопружним у заданій області напружень  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  та  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  з похибкою  $\delta$  та ймовірністю  $p$ , якщо для кожної області напружень виконується умова

$$t_{\alpha,k} = \frac{\delta \bar{J}(t_j) \sqrt{n}}{S_J(t_j)} \geq t_{\alpha,k}^*, \quad (2.1)$$

де  $t_{\alpha,k}$ ,  $t_{\alpha,k}^*$  – розрахункове та критичне (табличне) значення квантиля статистики;  $\bar{J}(t_j)$  – вибіркове середнє значення функції повзучості  $J(t_j)$ ;  $S_J(t_j)$  – вибіркове середнє квадратичне відхилення функції повзучості  $\bar{J}(t_j)$ ;  $n$  – обсяг вибірки (число функцій повзучості).

Методика побудови та експериментальні значення функцій повзучості  $J(t_j)$  оргскла та поліетилену, а також методика визначення величин  $\bar{J}(t_j)$  і  $S_J(t_j)$  та значення величин  $\bar{J}(t_j)$  наведені в [12].

На рис. 4 наведено розрахункове  $t_{\alpha,k}$  та табличне  $t_{\alpha,k}^*$  значення квантиля статистики для оргскла, що відповідають заданій ймовірності  $p$ . Розрахункові значення величини  $t_{\alpha,k}$  для деформацій поздовжньої повзучості нанесені штриховою лінією, а для поперечної повзучості – штрих-пунктирною лінією. Суцільною лінією нанесене табличне значення квантиля статистики  $t_{\alpha,k}^*$ . Тут і далі значення величин  $t_{\alpha,k}$  розраховувалися за рівнянням (2.1) за умови, що  $\delta_{\max} = 7,5\%$ , а значення величини  $t_{\alpha,k}^*$  визначалися згідно таблиць, що наведені в [6].

На рис. 5 наведено розрахункові  $t_{\alpha,k}$  та табличні  $t_{\alpha,k}^*$  значення квантиля статистики для поздовжньої, поперечної (а) та зсувної (б) повзучості поліетилену. Розрахункові значення квантиля статистики  $t_{\alpha,k}$  для поздовжньої та зсувної повзучості нанесено штриховими лініями, а для поперечної повзучості – штрих-пунктирною лінією. Табличні значення квантиля статистики

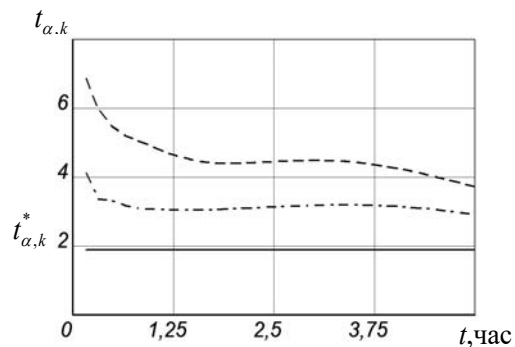


Рис. 4

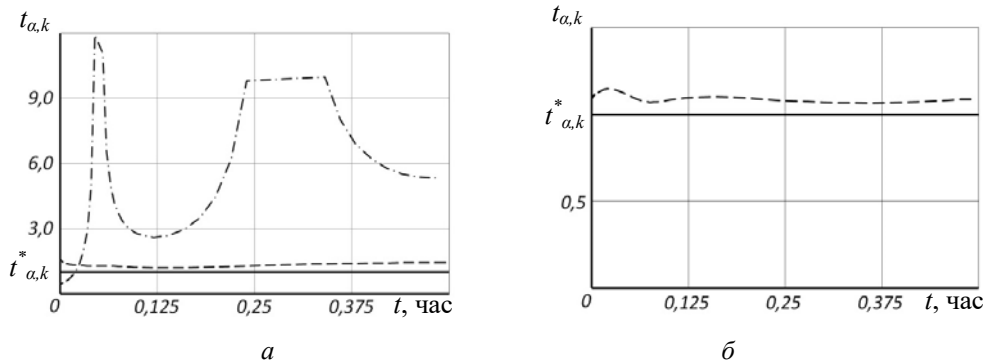


Рис. 5

$t_{\alpha,k}^*$  нанесено суцільними лініями.

У цілому, як це свідчать наведені на рис. 4, 5 дані, оргскло та поліетилен є при заданих рівнях напружень із похибкою  $\pm 7,5\%$  лінійно-в'язкопружними матеріалами.

**2.3. Пружні сталі.** Розв'язування задач повзучості елементів конструкцій з лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану із використанням визначальних рівнянь (1.2) припускає визначення пружних постійних матеріалу  $E$ ,  $\nu_0$  та параметрів ядер повзучості  $K_i(t-\tau)$  й  $K_v(t-\tau)$ .

Методика визначення пружних постійних в'язкопружних матеріалів наведена в роботах [2, 7, 8]. В табл. 1 наведені значення пружних постійних оргскла та поліетилену. На додаток до модуля поздовжньої пружності  $E$  і коефіцієнту Пуассона  $\nu_0$  наведені також значення модуля зсуву  $G$  та об'ємного модуля  $B$ .

Таблиця 1

Матеріал	$E$ , МПа	$G$ , МПа	$B$ , МПа	$\nu_0$
«Оргстекло СТ-1»	$6,3 \cdot 10^3$	$2,64 \cdot 10^3$	$4,2 \cdot 10^3$	0,246
«Полиетилен високої щільності ПЭВП»	$8,67 \cdot 10^2$	$3,21 \cdot 10^2$	$9,63 \cdot 10^2$	0,350

**2.4. Параметри ядер повзучості.** Методи визначення параметрів ядер повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану для випадку пропорційності девіаторів наведені в роботах [11, 12]. Методи засновані на результатах апроксимації дискретних значень ядер повзучості за умов складного напруженого стану функціями, що задають ядра. Дискретні значення ядер розраховуються згідно співвідношень, що встановлюють залежність між ядрами інтенсивності деформацій повзучості й об'ємної повзучості за умов складного напруженого стану та ядрами повзучості за умов одновимірних напружених станів. Одновимірні напружені стани розглядаються як базові.

У роботі як базовий обрано одновісний розтяг із виміром поздовжніх та поперечних деформацій повзучості. У цьому випадку для залежності між ядрами інтенсивності деформацій повзучості  $K_i(t)$ , об'ємної повзучості  $K_v(t)$ , поздовжньої повзучості  $K_{11}(t)$  та поперечної повзучості  $K_{22}(t)$  отримано співвідношення [11, 12]

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) + \nu_0 \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 + \nu_0} \quad (2.2)$$

та, відповідно, співвідношення

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) - 2\nu_0 \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 - 2\nu_0}, \quad (2.3)$$

що дозволяють розраховувати дискретні значення ядер інтенсивності деформацій повзучості й об'ємної повзучості за ядрами поздовжньої й поперечної повзучості.

У табл. 2 наведено розраховані за викладеною у роботах [11, 12] методикою із використанням співвідношень (2.2) та (2.3) параметри дробово-експоненціальних ядер повзучості  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  оргскла та поліетилену.

Таблиця 2

Матеріал	$K_{11}(t)$ , година <sup>-1</sup>			$K_{22}(t)$ , година <sup>-1</sup>		
	$\alpha_{11}$	$\beta_{11}$ , час <sup>-(1+<math>\alpha_{11}</math>)</sup>	$\lambda_{11}$ , час <sup>-(1+<math>\alpha_{11}</math>)</sup>	$\alpha_{22}$	$\beta_{22}$ , час <sup>-(1+<math>\alpha_{22}</math>)</sup>	$\lambda_{22}$ , час <sup>-(1+<math>\alpha_{22}</math>)</sup>
«Оргстекло»	-0,8740	0,4000	0,7947	-0,8700	0,0548	0,6878
«ПЭВП»	-0,6460	0,1398	1,9439	-0,5158	1,0137	3,1427
Матеріал	$K_i(t)$ , година <sup>-1</sup>			$K_v(t)$ , година <sup>-1</sup>		
	$\alpha_i$	$\beta_i$ , час <sup>-(1+<math>\alpha_i</math>)</sup>	$\lambda_i$ , час <sup>-(1+<math>\alpha_i</math>)</sup>	$\alpha_v$	$\beta_v$ , час <sup>-(1+<math>\alpha_v</math>)</sup>	$\lambda_v$ , час <sup>-(1+<math>\alpha_v</math>)</sup>
«Оргстекло»	-0,9820	0,7780	0,1480	-0,9900	0,8380	0,3000
«ПЭВП»	-0,6191	0,2764	2,1493	-0,6988	0,1229	1,6334

### §3. Повзучість тонкостінних трубчастих елементів за умов розтягу із крученням.

Розв'язується задача розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу, чистого кручення та комбінованого навантаження розтягом із крученням.

**3.1. Одновісний розтяг.** Розраховуються деформації поздовжньої  $\varepsilon_{11}(t)$ , поперечної  $\varepsilon_{22}(t)$  та об'ємної  $\varepsilon_v(t)$  повзучості тонкостінних трубчастих елементів з оргскла та поліетилену за умов одновісного розтягу напруженням  $\sigma_{11} = \text{const}$  ( $\tau_{21} = \tau_{12} = 0$ ).

*Поздовжня осьова повзучість.* Для деформацій поздовжньої повзучості  $\varepsilon_{11}(t)$  з (1.3) за умов  $\sigma_{11} = \text{const}$  та  $\tau_{21} = \tau_{12} = 0$  із урахуванням (1.4) та (1.5) одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) = & \frac{2(1+\nu_0)}{3E} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_i)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right\} \sigma_{11} + \\ & + \frac{(1-2\nu_0)}{3E} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_v)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\} \sigma_{11}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

або, відповідно, рівняння

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) = & \frac{1}{3G} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_i)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right\} \sigma_{11} + \\ & + \frac{1}{9B} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_v)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\} \sigma_{11}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де прийнято

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11}; \quad 1 + \nu_0 = \frac{E}{2G}; \quad 1 - 2\nu_0 = \frac{E}{3B}.$$

Результати розрахунків деформацій поздовжньої повзучості  $\varepsilon_{11}(t)$  тонкостінних трубчастих елементів за умов одновісного розтягу, що виконано за рівняннями (3.1)

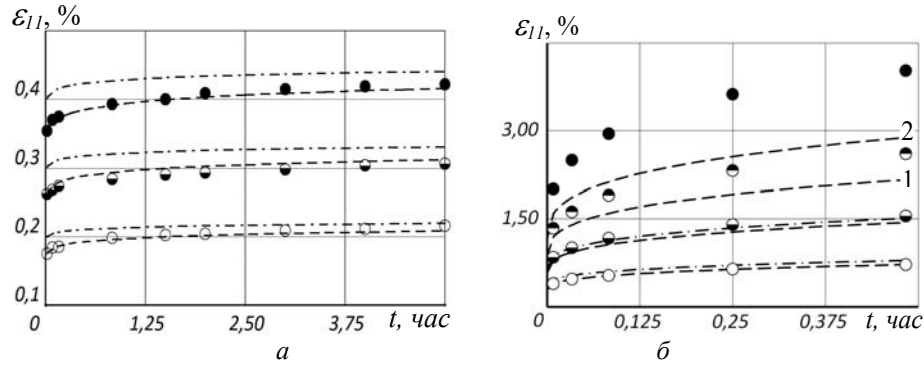


Рис. 6

та (3.2), зіставлено (рис. 6) із експериментальними даними для трубчастих елементів з оргскла (а) за напружень  $\sigma_{11} = 7,65$  (○), 11,45 (◐) і 15,30 (●) МПа та поліетилену (б) за напружень  $\sigma_{11} = 2,5$  (○), 5,0 (◐), 7,5 (1, ◐) і 10,0 (2, ●) МПа. Штриховими лініями нанесено результати розрахунків, що виконані за рівнянням (3.1), а штрихпунктирними – за рівнянням (3.2).

Тут та далі експериментальні дані нанесено точками, а результати розрахунків – лініями. Розрахунки виконані з використанням значень параметрів ядер  $K_i(t)$  та  $K_v(t)$ , що знайдено за ядрами поздовжньої  $K_{11}(t)$  та поперечної  $K_{22}(t)$  повзучості, та наведено у табл. 2.

*Поперечна (радіальна) повзучість.* Для деформацій поперечної повзучості  $\varepsilon_{22}(t)$ , коли  $\sigma_{11} = \text{const}$  та  $\varepsilon_{22} = 0$ , виходячи з умови, що  $\varepsilon_{22}(t) = -\nu_0 \varepsilon_{11}(t)$ , із (3.1) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}(t) = & - \left\{ \frac{2\nu_0(1+\nu_0)}{3E} \left[ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_i)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \sigma_{11} + \right. \\ & \left. + \frac{\nu_0(1-2\nu_0)}{3E} \left[ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_v)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \sigma_{11} \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

та, відповідно, рівняння

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}(t) = & - \left\{ \frac{(E-2G)}{6G^2} \left[ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_i)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \sigma_{11} + \right. \\ & \left. + \frac{(E-2G)(3G-E)}{6EG^2} \left[ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_v)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \sigma_{11} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де прийнято

$$\nu_0 = \frac{E}{2G} - 1; \quad 2\nu_0 = \frac{E}{G} - 2.$$

Результати розрахунків деформацій поперечної повзучості  $\varepsilon_{22}(t)$  тонкостінних трубчастих елементів за умов одновісного розтягу, виконаних за рівняннями (3.3) та (3.4) із використанням наведених у табл. 1 та 2 значень матеріальних констант, зіставлено на рис. 7 із експериментальними даними для трубчастих елементів з оргскла (а) за напружень  $\sigma_{11} = 7,65$  (○), 11,45 (◐) та 15,30 (●) МПа та із поліетилену (б) за напру-

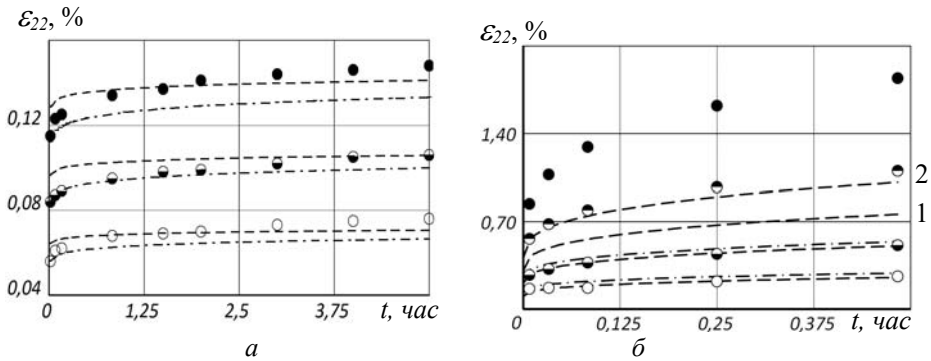


Рис. 7

жень  $\sigma_{11} = 2,5$  (○),  $5,0$  (⊖),  $7,5$  (1, ⊕) і  $10,0$  (2, ●) МПа. Штриховими лініями нанесено розрахунки, що виконані за рівнянням (3.3), а штрих-пунктирними – за рівнянням (3.4).

*Об'ємна повзучість.* Для деформацій об'ємної повзучості, коли  $\sigma_{11} = \text{const}$  із (1.3) із урахуванням (1.5) отримуємо рівняння

$$\varepsilon_v(t) = \frac{(1-2\nu_0)}{E} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\} \sigma_{11} \quad (3.5)$$

та, відповідно, рівняння

$$\varepsilon_v(t) = \frac{1}{3B} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-1)^n (\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\} \sigma_{11}, \quad (3.6)$$

де прийнято

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11}; \quad (1-2\nu_0) = \frac{E}{3B}.$$

Результати розрахунків деформацій об'ємної повзучості  $\varepsilon_v(t)$  тонкостінних трубчастих елементів за умов одновісного розтягу, виконаних за рівняннями (3.5) та (3.6) із використанням наведених у табл. 1 та 2 значень матеріальних констант, зіставлено на рис. 8 із експериментальними даними для трубчастих елементів з оргскла (а) за напружень  $\sigma_{11} = 7,65$  (○);  $11,45$  (⊖) та  $15,30$  (●) МПа та із поліетилену (б) за напружень  $\sigma_{11} = 2,5$  (○),  $5,0$  (⊖),  $7,5$  (1, ⊕) та  $10,0$  (2, ●) МПа. Штриховими лініями нанесено результати розрахунків, що виконано за рівнянням (3.5), а штрих-пунктирними лініями – за рівнянням (3.6).

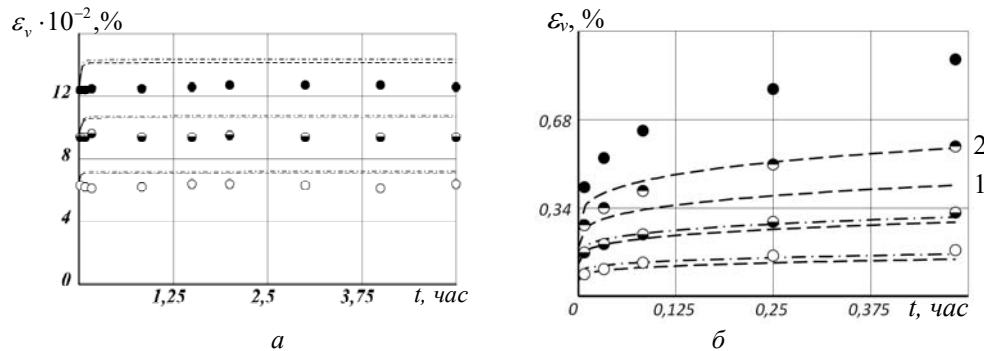


Рис. 8



**3.2. Чисте кручення.** Розраховуються деформації зсувної повзучості  $\varepsilon_{21}(t)$  тонкостінних трубчастих елементів з оргскла та поліетилену за умов чистого кручення напруженням  $\tau_{21} = \text{const}$  ( $\sigma_{11} = 0$ ).

Для деформацій зсувної повзучості  $\varepsilon_{21}(t)$  із (1.3) за умови, що  $\tau_{21} = \text{const}$  й  $\sigma_0 = 0$  із урахуванням (1.5) отримуємо рівняння

$$\varepsilon_{21} = \frac{(1 + \nu_0)}{E} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right\} \tau_{21} \quad (3.7)$$

та, відповідно, рівняння

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{1}{2G} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right\} \tau_{21}, \quad (3.8)$$

де прийнято

$$s_{ij} = \tau_{21}; \quad 1 + \nu_0 = \frac{E}{2G}.$$

Результати розрахунків деформацій зсувної повзучості  $\varepsilon_{21}(t)$  тонкостінних трубчастих елементів за умов чистого кручення, виконаних за рівняннями (3.7) та (3.8) із використанням наведених у табл. 1 та 2 значень матеріальних констант, наведені на рис. 9 для трубчастих елементів із оргскла (а) та поліетилену (б). Для оргскла значен-

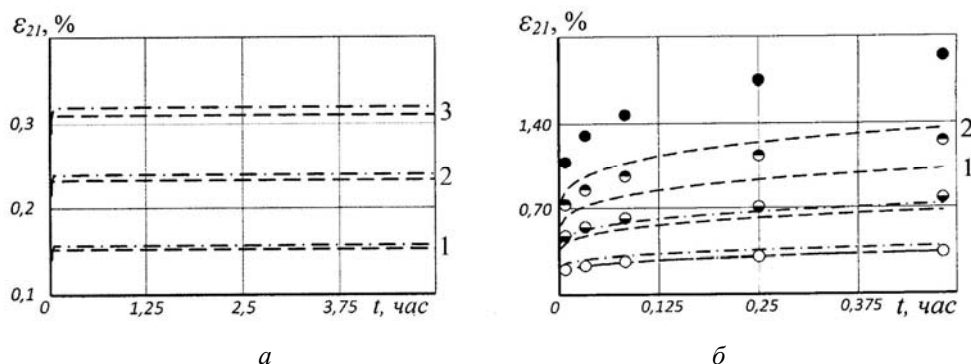


Рис. 9

ня деформацій  $\varepsilon_{21}(t)$  розраховані для напружень  $\tau_{21} = 7,65$  (1), 11,45 (2), 15,30 (3) МПа, а для поліетилену – для напружень  $\tau_{21} = 1,17$  (○) і 2,34 (●), 3,51 (1, ●) і 4,68 (2, ●) МПа. Штриховими лініями нанесено результати розрахунків, що виконано за рівнянням (3.7), а штрих-пунктирними лініями – за рівнянням (3.8).

**3.3. Розтяг із крученням.** Розраховуються деформації поздовжньої  $\varepsilon_{11}(t)$  й зсувної  $\varepsilon_{21}(t)$  повзучості тонкостінних трубчастих елементів із поліетилену за умов комбінованої дії постійних нормальних напружень розтягу ( $\sigma_{11} = \text{const}$ ) та постійних дотичних напружень кручення ( $\tau_{21} = \text{const}$ ).

За умов комбінованої дії постійних за часом нормальних та дотичних напружень взаємовплив напружень на процес повзучості, як це і впливає із рівняння (1.3), не враховується. У цьому випадку, деформації поздовжньої й зсувної повзучості за умов спільної дії нормальних та дотичних напружень розраховуються за тими ж рівняннями, як і у випадку одновісного розтягу та чистого кручення.

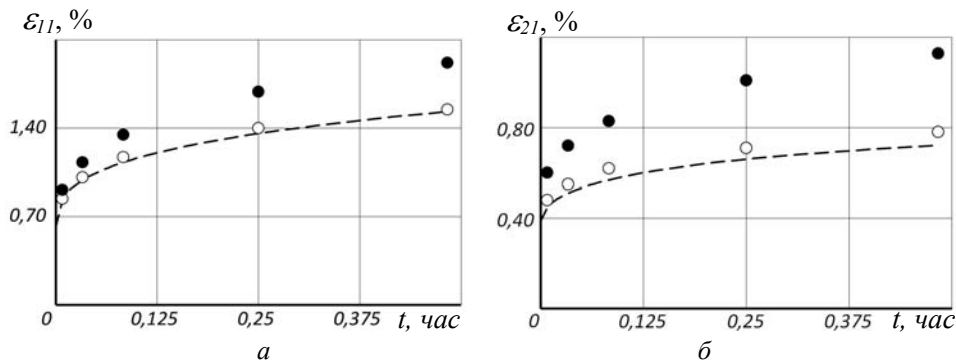


Рис. 10

*Поздовжня (осьова) повзучість.* Результати розрахунків деформацій поздовжньої повзучості  $\varepsilon_{11}(t)$  тонкостінних трубчастих елементів із поліетилену за умов навантаження розтягом із крученням, що виконано за рівняннями (3.1) та (3.2) із використанням значень матеріальних констант, наведених у табл. 1 та 2, зіставлено на рис. 10, *a* з експериментальними даними (точки) при напруженнях  $\sigma_{11} = 5,31$  та  $\tau_{21} = 0$  (○) МПа;  $\sigma_{11} = 5,31$  та  $\tau_{21} = 2,49$  (●) МПа.

*Зсувна повзучість.* Результати розрахунків деформацій зсувної повзучості  $\varepsilon_{21}(t)$  тонкостінних трубчастих елементів із поліетилену за умов навантаження розтягом із крученням, що виконані за рівняннями (3.7) та (3.8) із використанням наведених у табл. 1 та 2 значень матеріальних констант, зіставлено на рис. 10, *б* із експериментальними даними (точки) при напруженнях  $\tau_{21} = 2,49$  та  $\sigma_{11} = 0$  (○) МПа;  $\tau_{21} = 2,49$  та  $\sigma_{11} = 5,31$  (●) МПа.

#### §4. Аналіз результатів.

Ефективність підходу до розв'язування задач повзучості елементів конструкцій із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану, заснованого на гіпотезі пропорційності девіаторів, апробується на задачах розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів за умов навантаження розтягом із крученням. Розраховуються деформації поздовжньої, поперечної, зсувної та об'ємної повзучості трубчастих елементів з «оргстекла СТ-1» та «поліетилену високої щільності ПЕВП».

В цілому, як це впливає із даних, що наведено на рис. 6 – 10, отримано цілком задовільне узгодження результатів розрахунків з даними експериментів. Максимальна розбіжність між результатами розрахунків та експериментів у лінійній області деформування (рис. 6, *a* – 8, *a*; рис. 6, *б* – 8, *б* при  $\sigma_{11} = 2,5$  та 5,0 МПа та рис. 9, *б* при  $\tau_{21} = 1,17$  та 2,34 МПа) не перевищує 20%. Характерно, що результати розрахунків, як і слід було сподіватися, практично не залежать від того, чи використовуються в структурах розрахункових формул значення модуля пружності  $E$  й початкове значення коефіцієнта Пуассона  $\nu_0$  або тільки значення модулів пружності  $E$ ,  $G$  та  $B$ . У нелінійній області деформування (рис. 6, *б* – 8, *б* при  $\sigma_{11} = 7,5$  і 10,0 МПа та рис. 9, *б* при  $\tau_{21} = 3,51$  і 4,68 МПа) максимальна похибка може досягати 80%.

У роботі для розв'язування задач повзучості трубчастих елементів з лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану як початкове використане рівняння, що побудоване, виходячи із гіпотези пропорційності девіаторів. У рамках такого підходу, як і у випадку використання принципу суперпозиції зсувної та об'ємної повзучості [10, 12], взаємовплив постійних за часом нормальних та дотичних напружень на процес поздовжньої та зсувної повзучості не враховується. Цей ефект пояснюється збігом у випадку дії постійних за часом напружень структур розв'язу-

кових рівнянь лінійної теорії в'язкопружності, що побудовано, виходячи із принципу суперпозиції зсувної та об'ємної повзучості та на основі гіпотези пропорційності девіаторів.

Дійсно, з врахуванням того, що  $\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t) = s_{ij}(t)$ , де  $s_{ij}$  – девіатор напружень, а  $(1 + \nu_0) = E/2G$ ;  $(1 - 2\nu_0) = E/3B$  та, враховуючи, що  $\sigma_i = \text{const}$ ,  $s_{ij} = \text{const}$ ,  $\sigma_0 = \text{const}$ , із (1.3) отримуємо рівняння

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2G} \left[ 1 + \lambda_i \int_0^t K_i(t) dt \right] s_{ij} + \frac{1}{3B} \left[ 1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t) dt \right] \delta_{ij} \sigma_0, \quad (4.1)$$

яке за структурою збігається з рівнянням [10, 12]

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2G} \left[ 1 + \lambda_s \int_0^t K_s(t) dt \right] s_{ij} + \frac{1}{3B} \left[ 1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t) dt \right] \delta_{ij} \sigma_0, \quad (4.2)$$

що отримано виходячи із принципу суперпозиції зсувної та об'ємної повзучості. Характерна риса полягає також у тому, що структура ядер  $K_i(t)$  та  $K_s(t)$  у рівняннях (4.1) та (4.2) також збігається.

Однак, як показують експериментальні дані (рис. 10), такий взаємовплив може бути досить істотним. Так, дотичне напруження  $\tau_{21} = 2,49$  МПа при  $\sigma_{11} = 5,31$  МПа (рис. 10, а) збільшує деформацію поздовжньої повзучості  $\varepsilon_{11}(t)$  приблизно на 30%, а нормальне напруження  $\sigma_{11} = 5,31$  МПа при  $\tau_{21} = 2,49$  МПа (рис. 10, б) збільшує деформацію зсувної повзучості  $\varepsilon_{21}(t)$  приблизно на 50%.

### Висновки.

Один із підходів до розв'язування задач повзучості елементів конструкцій із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану може бути заснований на використанні гіпотези пропорційності девіаторів. За незмінних за часом напружень такий підхід є адекватним підходу, що заснований на принципі суперпозиції зсувної та об'ємної повзучості. У цьому випадку взаємовплив нормальних та дотичних напружень на процес повзучості не враховується, що не збігається з експериментальними даними.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Розв'язано та експериментально апробовано задачу розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу, чистого кручення та комбінованого навантаження розтягом із крученням. Розв'язок ґрунтується на використанні моделі в'язкопружності у формі пропорційності девіаторів. Ядра повзучості задаються дробово-експоненціальними функціями. Розраховано поздовжню, поперечну, зсувну та об'ємну деформації повзучості.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** тонкостінні трубчасті елементи, лінійні в'язкопружні матеріали, одновісний розтяг, чисте кручення, розтяг із крученням, розрахунок деформацій повзучості, експериментальна апробація.

1. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. Теория и приложения. – Москва: Наука, 1973. – 288 с.
2. Гольдман А.Я. Прочность конструкционных пластмасс. – Ленинград: Машиностроение, 1979. – 320 с.

3. Колтунов А.А. Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие) // *Механика полимеров*. – 1969. – № 4. – С. 754 – 758.
4. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – Москва: Высшая школа, 1976. – 277 с.
5. Крегерс А.Ф., Килевич М.Р. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений // *Механика композитных материалов*, 1985. – №2. – С. 195 – 201.
6. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний. – Москва: Машиностроение, 1972. – 232 с.
7. Boltzmann L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung // *Annalen der Physik und Chemie*. – 1876. – 7, N 4. – S. 624 – 655.
8. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An Introduction. – New-York: Academic Press Inc., 1971 – 338 p.
9. Golub V.P., Kobzar Y.M., Fernati P.V. Determining the Parameters of the Hereditary Kernels of Isotropic Nonlinear Viscoelastic Materials in Combined Stress State // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – 55, N 6. – P. 601 – 619.
10. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. 1. Superposition of Shear and Bulk Creep // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – 52, N 2. – P. 165 – 175.
11. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. 2. Proportional Deviators // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – 52, N 6. – P. 648 – 660.
12. Golub V.P., Pavlyuk Ya.V., Reznik V.S. Analysis of Creep Strains and Stress Relaxation in Thin-Walled Tubular Members Made of Linear Viscoelastic Materials. 1. Superposition of Shear and Volume Creep // *Int. Appl. Mech.*, 2020. – 56, N 2. – P. 156 – 169.
13. Golub V.P., Pogrebnyak A.D., Romanenko I.B. Application of Smoothing Spline Approximations in Problems on Identification of Creep Parameters // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – 33, N 6. – P. 477 – 484.
14. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: on the Occasion of the 50th Anniversary of the Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – 55, N 2. – P. 129 – 174.
15. Rabotnov Y.N. Creep Problems in Structural Members. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. – 822 p.
16. Volterra V. Sulle equazioni integro-differenziali, della theoria dell elasticità // *Atti della Reale Accademia dei Lincei Rend.* – 1909. – 18, N 2. – P. 295 – 301.

Надійшла 18.03.2021

Затверджена до друку 09.12.2021