В.Ф.Мейш[1], **Ю.А.Мейш**[2],
Н.В.Майбородіна[3], **В.А.Герасименко**[3]

ДИНАМІЧНА ПОВЕДІНКА ТРИШАРОВИХ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ОБОЛОНОК ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

*[1]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: vfmeish@gmail.com;
[2]Національний транспортний університет,
вул. Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна; e-mail: juliameish@gmail.com
[3]Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і
природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»,
вул. Шевченка 10, 16600, Чернігівська обл., м. Ніжин, Україна;
e-mail: natashamai2311@gmail.com*

Abstract. The problem of forced vibrations of three-layer ellipsoidal shells under action of a non-stationary distributed load is considered. When constructing a mathematical model of three-layer shells, the theory of kinematic and statical hypotheses is used for a package of layers of an ellipsoidal shell. A geometrically nonlinear version of the Timoshenko-type shell theory is applied in the quadratic approximation. To solve the problems stated, a numerical algorithm based on the use of an integro-interpolation method for constructing difference schemes in spatial coordinates and an explicit finite difference scheme in time coordinates are used. The numerical results of the solved dynamic problem are presented.

Key words: multilayer ellipsoidal shells, the theory of Timoshenko type, forced vibrations, numerical solution.

Вступ.

Розвиток теорії і практики динаміки деформівних систем, запити різних галузей сучасної техніки вимагають дослідження вимушених коливань пружних елементів, зокрема оболонок і оболонкових конструкцій. Традиційний підхід досліджень пов’язаний із розглядом одношарових оболонок канонічної форми (круговий циліндр, конус, сфера та інші) [1 – 5, 8]. Одношарові оболонки більш складної форми розглянуті в роботах [9 – 19].

В даній роботі розглянуто задачі про вимушені коливання тришарових еліпсоїдальних оболонок під дією нестаціонарного розподіленого навантаження. При побудові математичної моделі тришарових оболонок використано теорію кінематичних та статистичних гіпотез для пакету шарів еліпсоїдальної оболонки [2]. Застосовано геометрично нелінійний варіант теорії оболонок С.П. Тимошенка в квадратичному наближенні. Для розв’язування поставлених задач було використано чисельний алгоритм, заснований на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови різницевих схем за просторовими координатами і явної скінченно-різницевої схеми за часом [2, 4, 7]. Наведено чисельні результати розв’язаної динамічної задачі.

§1. Постановка задач.

Розглядається еліпсоїдальна оболонка, геометрія серединної поверхні якої задається наступними співвідношеннями:

$$x = a\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \,; \quad y = a\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \,; \quad z = b\cos\alpha_1 , \tag{1.1}$$

де параметри α_1, α_2 являють собою гауссові криволінійні координати на поверхні оболонки, причому координата α_1 відповідає меридіальному напрямку, а α_2 – коловому напрямку; a, b – півосі еліпса.

Відповідно до формул (1.1), вирази для коефіцієнтів першої квадратичної форми і кривизни серединної поверхні еліпсоїдальної оболонки мають наступний вигляд:

$$A_1 = a(\cos^2\alpha_1 + k^2\sin^2\alpha_1)^{1/2};\ A_2 = a\sin\alpha_1;\ \ k = b/a;$$
$$k_1 = \frac{b}{a^2}(\cos^2\alpha_1 + k^2\sin^2\alpha_1)^{-3/2};\ k_2 = \frac{b}{a^2}(\cos^2\alpha_1 + k^2\sin^2\alpha_1)^{-1/2}. \tag{1.2}$$

Як математична модель процесів вимушених коливань тришарової еліпсоїдальної оболонки, розглянута гіперболічна система нелінійних диференціальних рівнянь теорії оболонок С.П. Тимошенка. Приймається, що закон зміни переміщень за товщиною еліпсоїдальної оболонки в системі координат (s_1, s_2, z) має вигляд

$$u_1^z(s_1,s_2,z) = u_1(s_1,s_2) + z\varphi_1(s_1,s_2);\ u_2^z(s_1,s_2,z) = u_2(s_1,s_2) + z\varphi_2(s_1,s_2);$$
$$u_3^z(s_1,s_2,z) = u_3(s_1,s_2), \tag{1.3}$$

де $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$ – компоненти узагальненого вектора переміщень $\overline{U}$; s_1, s_2 –довжини дуг в меридіальному і коловому напрямках.

Напружено-деформований стан пружної структури описується з використанням геометрично нелінійного варіанту теорії оболонок в квадратичному наближенні [2, 6]. При цьому геометричні співвідношення для тришарової оболонки приймаються у вигляді:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1} + k_1u_3 + \frac{1}{2}\theta_1^2;\ \ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}u_1 + k_2u_3 + \frac{1}{2}\theta_2^2;$$

$$\varepsilon_{12} = \omega + \theta_1\theta_2;\ \ \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \theta_1;\ \ \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \theta_2;$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2;\ \ \omega_1 = \frac{\partial u_2}{\partial s_1};\ \ \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}u_2;\ \ \theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial s_1} - k_1u_1; \tag{1.4}$$

$$\theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2u_2;\ \ \chi_{11} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial s_1};\ \ \chi_{22} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}\varphi_1;$$

$$\chi_{12} = \tau_1 + \tau_2 + \kappa_1\omega_1 + \kappa_2\omega_2;\ \ \tau_1 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial s_1};\ \ \tau_2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial s_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s_1}\varphi_2.$$

Величини зусиль і моментів виражаються через величини деформацій

$$T_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22} + B_{13}\chi_{11} + B_{14}\chi_{22};\ \ T_{12} = S + k_2H;$$
$$T_{22} = B_{21}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} + B_{23}\chi_{11} + B_{24}\chi_{22};\ \ T_{21} = S + k_1H;$$
$$T_{13} = \tilde{B}_{13}\varepsilon_{13};\ \ T_{23} = \tilde{B}_{23}\varepsilon_{23};\ \ H = D_s\chi_{12};\ \ S = B_s\varepsilon_{12};$$

$$\overline{T}_{13} = T_{13} + T_{11}\theta_1 + S\theta_2;\ \ \overline{T}_{23} = T_{23} + T_{22}\theta_2 + S\theta_1;$$
$$M_{11} = D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22} + D_{13}\varepsilon_{11} + D_{14}\varepsilon_{22}; \tag{1.5}$$

$$M_{22} = D_{21}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} + D_{23}\varepsilon_{11} + D_{24}\varepsilon_{22};\ \ M_{12} = M_{21} = H.$$

Тут

$$B_{11}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_1^i h_i}{1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i}\,;\quad B_{12}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_1^i\nu_{21}^i h_i}{1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i}\,;\quad B_{21}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_2^i\nu_{12}^i h_i}{1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i}\,;$$

$$B_{22}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_2^i h_i}{1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i}\,;\quad B_s=\sum_{i=1}^{I}G_{12}^i\cdot h_i\,;\quad \tilde{B}_{13}=\sum_{i=1}^{I}G_{13}^i h_i\,;\quad \tilde{B}_{23}=\sum_{i=1}^{I}G_{23}^i h_i\,;$$

$$B_{23}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_2^i\nu_{12}^i}{1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i}\cdot\frac{(z_{i+1}^2-z_i^2)}{2};\quad B_{13}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_1^i}{1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i}\cdot\frac{(z_{i+1}^2-z_i^2)}{2};$$

$$B_{14}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_1^i\nu_{21}^i}{1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i}\cdot\frac{(z_{i+1}^2-z_i^2)}{2};\quad B_{24}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_2^i}{1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i}\cdot\frac{(z_{i+1}^2-z_i^2)}{2};$$

$$D_{11}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_1^i}{12(1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i)}\cdot\frac{(z_{i+1}^3-z_i^3)}{3};\quad D_{22}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_2^i}{12(1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i)}\cdot\frac{(z_{i+1}^3-z_i^3)}{3};$$

$$D_{13}=B_{13}\,;\quad D_{23}=B_{23}\,;\quad D_{14}=B_{14}\,;\quad D_{24}=B_{24}\,;$$

$$D_s=\sum_{i=1}^{I}\frac{G_{12}^i}{12}\cdot\frac{(z_{i+1}^3-z_i^3)}{3};\quad D_{12}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_1^i\nu_{21}^i}{12(1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i)}\cdot\frac{(z_{i+1}^3-z_i^3)}{3};$$

$$D_{21}=\sum_{i=1}^{I}\frac{E_2^i\nu_{12}^i}{12(1-\nu_{12}^i\nu_{21}^i)}\cdot\frac{(z_{i+1}^3-z_i^3)}{3}\quad,$$

де величини $z_i\in[-h/2;h/2]$ та залежать від *i*-го шару; h – товщина оболонки; I – кількість шарів; E_1^i, E_2^i, G_{12}^i, G_{13}^i, G_{23}^i, ν_{12}^i, ν_{21}^i – фізико-механічні характеристики *i*-го шару матеріалу оболонки.

Рівняння коливань неоднорідної по товщині оболонки в диференціальній формі мають вигляд:

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2T_{11})-\frac{\partial A_2}{\partial s_1}T_{22}\right]+k_1\overline{T}_{13}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1T_{21})=I_1\cdot\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+I_2\cdot\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\,;$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2T_{12})-\frac{\partial A_2}{\partial s_1}T_{21}\right]+k_2\overline{T}_{23}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1T_{22})=I_1\cdot\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}+I_2\cdot\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\,;\qquad(1.6)$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2\overline{T}_{13})-k_1T_{11}-k_2T_{22}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1\overline{T}_{23})+P_3=I_1\cdot\frac{\partial^2u_3}{\partial t^2}\,;$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2M_{11})-\frac{\partial A_2}{\partial s_1}M_{22}\right]-T_{13}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1M_{21})=I_2\cdot\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+I_3\cdot\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\,;$$

$$\frac{1}{A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2M_{12})+\frac{\partial A_2}{\partial s_1}M_{21}\right]+\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial s_2}(A_1M_{22})-T_{23}=I_2\cdot\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}+I_3\cdot\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\,;$$

$$I_1=\sum_{i=1}^{I}\rho_ih_i\,;\quad I_2=\sum_{i=1}^{I}\rho_i\,\frac{z_{i+1}^2-z_i^2}{2}\,;\quad I_3=\sum_{i=1}^{I}\rho_i\,\frac{z_{i+1}^3-z_i^3}{3}\,.$$

Рівняння коливань (1.6) доповнюються відповідними граничними умовами та нульовими початковими умовами.

§2. Чисельний алгоритм.

Побудова чисельного алгоритму заснована на використанні інтегро-інтерполяційного методу побудови різницевих схем за просторовими координатами s_1, s_2 та явної скінченно-різницевої схеми інтегрування за часом t [2, 6].

Розглянемо побудову різницевого алгоритму в області

$$\Omega_1 = \left\{ s_{1\ l-1/2} \le s_1 \le s_{1\ l+1/2},\ s_{2\ m-1/2} \le s_2 \le s_{2\ m+1/2} \right\} \text{ при } t_{n-1/2} \le t \le t_{n+1/2} :$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{22} \right] + k_1 \overline{T}_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2}(A_1 T_{21}) \right] d\Omega_1 dt =$$

$$= \int_t \iint_{\Omega_1} \left[I_1 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt ;$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 T_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{21} \right] + k_2 \overline{T}_{23} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2}(A_1 T_{22}) \right] d\Omega_1 dt =$$

$$= \int_t \iint_{\Omega_1} \left[I_1 \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + I_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt ; \qquad (2.1)$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 \overline{T}_{13}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2}(A_1 \overline{T}_{23}) + P_3 \right] d\Omega_1 dt =$$

$$= \int_t \iint_{\Omega_1} \left[I_1 \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt ;$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{22} \right] - T_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2}(A_1 M_{21}) \right] d\Omega_1 dt =$$

$$= \int_t \iint_{\Omega_1} \left[I_2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt ;$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1}(A_2 M_{12}) + \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{21} \right] + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2}(A_1 M_{22}) - T_{23} \right] d\Omega_1 dt =$$

$$= \int_t \iint_{\Omega_1} \left[I_2 \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + I_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt .$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (2.1) на зазначених інтервалах з використанням явної апроксимації за часовою координатою, отримаємо наступні різницеві рівняння рівноваги:

$$\frac{1}{A_{2\,l}} \left(\frac{A_{2\ l+1/2,m} T^n_{11\ l+1/2,m} - A_{2\ l-1/2,m} T^n_{11\ l-1/2,m}}{\Delta s_1} \right) - \frac{1}{A_{2\ l}} \frac{A_{2\ l+1/2} - A_{2\ l-1/2}}{\Delta s_1} T^n_{22\ l,m} +$$

$$+\frac{1}{A_{1l}}\frac{A_{1\,l}\,T^{n}_{21l,m+1/2}-A_{1l}\,T^{n}_{21l,m-1/2}}{\Delta s_2}+k_{1\,l}\,\overline{T}^{n}_{13\,l,m}=I_1\cdot(u^{n}_{1\,l,m})_{\overline{t}t}+I_2\cdot(\varphi^{n}_{1\,l,m})_{\overline{t}t}\ ;$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}T^{n}_{12l+1/2,m}-A_{2l-1/2}T^{n}_{12\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}T^{n}_{21\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,T^{n}_{22l,m+1/2}-A_{1\,l}\,T^{n}_{22\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)+k_{2\,l}\,\overline{T}^{n}_{23\,l,m}=I_1\cdot(u^{n}_{2\,l,m})_{\overline{t}t}+I_2\cdot(\varphi^{n}_{2\,l,m})_{\overline{t}t}\ ;$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}\overline{T}^{n}_{13\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}\overline{T}^{n}_{13\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-k_{1\,l}\,T^{n}_{11\,l,m}+ \qquad (2.2)$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,\overline{T}^{n}_{23\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,\overline{T}^{n}_{23\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)-k_{2\,l}\,T^{n}_{22\,l,m}+P^{n}_{3l,m}=I_1\cdot(u^{n}_{3\,l,m})_{\overline{t}t}\ ;$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}M^{n}_{11\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}M^{n}_{11\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}M^{n}_{22\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,M^{n}_{21\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,M^{n}_{21\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)-T^{n}_{13\,l,m}=I_2\cdot(u^{n}_{1\,l,m})_{\overline{t}t}+I_3\cdot(\varphi^{n}_{1\,l,m})_{\overline{t}t}\ ;$$

$$\frac{1}{A_{2\,l}}\left(\frac{A_{2\,l+1/2}M^{n}_{12\,l+1/2,m}-A_{2\,l-1/2}M^{n}_{12\,l-1/2,m}}{\Delta s_1}\right)-\frac{1}{A_{2\,l}}\frac{A_{2\,l+1/2}-A_{2\,l-1/2}}{\Delta s_1}M^{n}_{21\,l,m}+$$

$$+\frac{1}{A_{1\,l}}\left(\frac{A_{1\,l}\,M^{n}_{22\,l,m+1/2}-A_{1\,l}\,M^{n}_{22\,l,m-1/2}}{\Delta s_2}\right)-T^{n}_{23\,l,m}=I_2\cdot(u^{n}_{2\,l,m})_{\overline{t}t}+I_3\cdot(\varphi^{n}_{2\,l,m})_{\overline{t}t}\ .$$

Таким чином, компоненти узагальненого вектора переміщень віднесені до цілих точок за просторовими змінними, тобто $\bar{U}_{l,m}=(u_{1l,m},u_{2l,m},u_{3l,m},\varphi_{1l,m},\ \varphi_{2l,m})$.

Для узгодження величин зусиль-моментів в (2.1) рівняння (1.6) інтегруються в областях $\Omega_1,\Omega_2,\dots,\Omega_5$ при $t_{n-1/2}\le t\le t_{n+1/2}$, де

$$\Omega_2=\left\{\,s_{1\,l-1}\le s_1\ \le s_{1\,l};\,s_{2\,m-1/2}\le s_2\ \le s_{2\,m+1/2}\,\right\};$$

$$\Omega_3=\left\{\,s_{1\,l}\le s_1\ \le s_{1\,l+1};\,s_{2\,m-1/2}\le s_2\ \le s_{2\,m+1/2}\,\right\};$$

$$\Omega_4=\left\{\,s_{1l-1/2}\le s_1\le s_{1l+1/2},\,s_{2m-1}\le s_2\le s_{2m}\,\right\};$$

$$\Omega_5=\left\{\,s_{1l-1/2}\le s_1\le s_{1l+1/2},\,s_{2m}\le s_2\le s_{2m+1}\,\right\}.$$

Зокрема, для області Ω_1 маємо такі співвідношення:

$$\int_t \iint_{\Omega_1} [T_{11}] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} [B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22} + B_{13}\chi_{11} + B_{14}\chi_{22}] d\Omega_1 dt;$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} [S] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} [B_s \varepsilon_{12}]\, d\Omega_1 dt; \quad \int_t \iint_{\Omega_1} [H] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} [D_s \chi_{12}] d\Omega_1 dt;$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} [T_{13}]\, d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} [\tilde{B}_{13}\varepsilon_{13}]\, d\Omega_1 dt; \quad \int_t \iint_{\Omega_1} [\overline{T}_{13}] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} [T_{13} + T_{11}\theta_1 + S\theta_2]\, d\Omega_1 dt;$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} [T_{23}]\, d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} [\tilde{B}_{23}\varepsilon_{23}]\, d\Omega_1 dt; \quad \int_t \iint_{\Omega_1} [\overline{T}_{23}] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} [T_{23} + T_{22}\theta_2 + S\theta_1]\, d\Omega_1 dt;$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} T_{21}\, d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[S + k_1 H\right] d\Omega_1 dt; \tag{2.3}$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} T_{22}\, d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[B_{21}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} + B_{23}\chi_{11} + B_{24}\chi_{22}\right] d\Omega_1 dt;$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} [M_{22}]\, d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[D_{21}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} + D_{23}\varepsilon_{11} + D_{24}\varepsilon_{22}\right] d\Omega_1 dt;$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} M_{12}\, d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[D_s \chi_{12}\right] d\Omega_1 dt\,.$$

Аналогічні співвідношення отримуємо для областей $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$.

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (2.3), одержимо

$$T^n_{11\,l-1/2,m} = B_{11}\varepsilon^n_{11\,l-1/2,m} + B_{12}\,\varepsilon^n_{22\,l-1/2,m} + B_{13}\chi^n_{11\,l-1/2,m} + B_{14}\chi^n_{22\,l-1/2,m};$$

$$T^n_{12\,l-1/2,m} = S^n_{l-1/2,m} + k_{1\,l-1/2} H^n_{l-1/2,m}; \quad T^n_{13\,l-1/2,m} = \tilde{B}_{13}\,\varepsilon^n_{13\,l-1/2,m};$$

$$\overline{T}^n_{13\,l-1/2,m} = T^n_{13\,l-1/2,m} + T^n_{11\,l-1/2,m}\,\theta^n_{1\,l-1/2,m} + S_{l-1/2,m}\theta_{2\,l-1/2,m}; \tag{2.4}$$

$$M^n_{11\,l-1/2,m} = D_{11}\,\chi^n_{11\,l-1/2,m} + D_{12}\,\chi^n_{22\,l-1/2,m} + D_{13}\varepsilon^n_{11\,l-1/2,m} + D_{14}\varepsilon^n_{22\,l-1/2,m};$$

$$M^n_{12\,l-1/2,m} = D_s\chi^n_{12\,l-1/2,m}\,.$$

Аналогічні співвідношення отримуємо після операції інтегрування відповідно в областях $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$.

В різницевих рівняннях (2.2), (2.4) позначення різницевих функцій і різницевих похідних введені згідно [2, 7].

Геометричні співвідношення для області Ω_2 записуються у вигляді:

$$\varepsilon^n_{11\,l-1/2,m} = \frac{u^n_{1\,l,m} - u^n_{1\,l-1,m}}{\Delta s_1} + k_{1\,l-1/2}u^n_{3\,l-1/2,m} + \frac{1}{2}\left[\theta^n_{1\,l-1/2,m}\right]^2;$$

$$\theta^n_{1\,l-1/2,m} = \frac{u^n_{3\,l,m} - u^n_{3\,l-1,m}}{\Delta s_1} - k_{1\,l-1/2}u^n_{1\,l-1/2,m}; \quad \omega^n_{1\,l-1/2,m} = \frac{u^n_{2\,l,m} - u^n_{2\,l-1,m}}{\Delta s_1};$$

$$\omega_{2\,l-1/2,m}^{n} = \frac{u_{1\,l-1/2,m+1/2}^{n} - u_{1\,l-1/2,m-1/2}^{n}}{\Delta s_2} - \psi_{2\,l-1/2} u_{2\,l-1/2,m}^{n};$$

$$\omega_{l-1/2,m}^{n} = \omega_{1\,l-1/2,m}^{n} + \omega_{2\,l-1/2,m}^{n}; \quad \varepsilon_{13\,l-1/2,m}^{n} = \varphi_{1\,l-1/2,m}^{n} + \theta_{1\,l-1/2,m}^{n};$$

$$\chi_{11\,l-1/2,m}^{n} = \frac{\varphi_{1\,l,m}^{n} - \varphi_{1\,l-1,m}^{n}}{\Delta s_1}; \tag{2.5}$$

$$\chi_{12\,l-1/2,m}^{n} = \frac{\varphi_{2\,l,m}^{n} - \varphi_{2\,l-1,m}^{n}}{\Delta s_1} + \frac{\varphi_{1\,l-1/2,m+1/2}^{n} - \varphi_{1\,l-1/2,m-1/2}^{n}}{\Delta s_2} -$$

$$-\psi_{2\,l-1/2} \varphi_{2\,l-1/2,m}^{n} + k_{1\,l-1/2} \omega_{1\,l-1/2,m}^{n} + k_{2\,l-1/2} \omega_{2\,l-1/2,m}^{n};$$

$$\varepsilon_{22\,l-1/2,m}^{n} = \frac{u_{2\,l-1/2,m+1/2}^{n} - u_{2\,l-1/2,m-1/2}^{n}}{\Delta s_2} + \psi_{2\,l-1/2} u_{1\,l-1/2,m}^{n} +$$

$$+k_{2\,l-1/2} u_{3\,l-1/2,m}^{n} + \frac{1}{2}\left[\theta_{2\,l-1/2,m}^{n}\right]^2;$$

$$\theta_{2\,l-1/2,m}^{n} = \frac{u_{3\,l-1/2,m+1/2}^{n} - u_{3\,l-1/2,m-1/2}^{n}}{\Delta s_2} - k_{2\,l-1/2} u_{2\,l-1/2,m}^{n};$$

$$\chi_{22\,l-1/2,m}^{n} = \frac{\varphi_{2\,l-1/2,m+1/2}^{n} - \varphi_{2\,l-1/2,m-1/2}^{n}}{\Delta s_2} - \psi_{2\,l-1/2} \varphi_{1\,l-1/2,m}^{n}.$$

Аналогічним чином геометричні співвідношення записуються і для інших областей.

§3. Числові результати.

Досліджено динамічне деформування тришарової еліпсоїдальної оболонки з жорстко затисненими краями в області $D = \{\alpha_{10} \le \alpha_1 \le \alpha_{1N},\ \alpha_{20} \le \alpha_2 \le \alpha_{2N}\}$ під дією розподіленого нормального навантаження $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$. Крайові умови при цьому мають наступний вигляд:

$$\bar{U}(\alpha_{10}, \alpha_2) = \bar{U}(\alpha_{1N}, \alpha_2) = \bar{0}; \quad \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{20}) = \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{2N}) = \bar{0},$$

де $\bar{0} = (0,0,0,0,0)$.

Приймаються нульові початкові умови для всіх компонентів узагальненого вектора переміщень при $t = 0$, тобто

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2) = u_2(\alpha_1, \alpha_2) = u_3(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0;$$

$$\frac{\partial u_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial t} = 0.$$

Розподілене нормальне навантаження $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$ має вигляд

$$P_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = A \cdot \sin\frac{\pi t}{T}\left[\eta(t) - \eta(t - T)\right],$$

де A – амплітуда навантаження; T – тривалість навантаження. Розрахунки проведено для $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с, а також для випадку параметра $k = a/b = 1{,}5$.

Геометричні та фізико-механічні параметри тришарової оболонки:

$$\alpha_{10}=\frac{\pi}{12};\ \ \alpha_{1N}=\pi-\frac{\pi}{12};\ \ \alpha_{20}=-\frac{\pi}{2};\ \ \alpha_{2N}=\frac{\pi}{2};\ \ \frac{a}{h}=30;\ \ h=h_1+h_2+h_3;$$

$$h_1=h_3=10^{-2}\,\text{м};\ \ h_2=3\cdot 10^{-2}\,\text{м};$$

$$E_1^1=7\cdot 10^{10}\,\text{Па};\ \ E_2^1=E_1^1;\ \ E_1^2=E_1^3=\frac{E_1^1}{1000};\ \ E_2^2=E_2^3=E_1^2;$$

$$\nu_{12}^1=\nu_{21}^1=\nu_{12}^2=\nu_{21}^2=\nu_{12}^3=\nu_{21}^3=0{,}33;\ \ \rho_1=\rho_3=2{,}7\cdot 10^3\,\text{кг}/\text{м}^3;\ \ \rho_2=3\cdot 10^2\,\text{кг}/\text{м}^3.$$

На рис. 1 – 9 наведено результати розрахунків на часовому інтервалі $0\le t\le 40T$. На всіх рисунках криві з індексом *2* відповідають випадку тришарової оболонки, а криві з індексом *1* відповідають випадку одношарової оболонки з такими геометричними та фізико-механічними параметрами:

$$\alpha_{10}=\frac{\pi}{12};\ \ \alpha_{1N}=\pi-\frac{\pi}{12};\ \ \alpha_{20}=-\frac{\pi}{2};\ \ \alpha_{2N}=\frac{\pi}{2};\ \ \frac{a}{h}=30;\ \ h=5\cdot 10^{-2}\,\text{м};$$

$$E_1=E_2=7\cdot 10^{10}\,\text{Па};\ \ \nu_{12}=\nu_{21}=0{,}33;\ \ \rho=2{,}7\cdot 10^3\,\text{кг}/\text{м}^3.$$

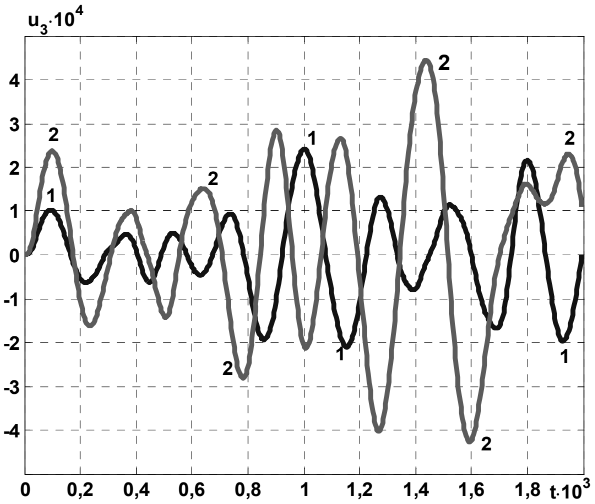

Рис. 1

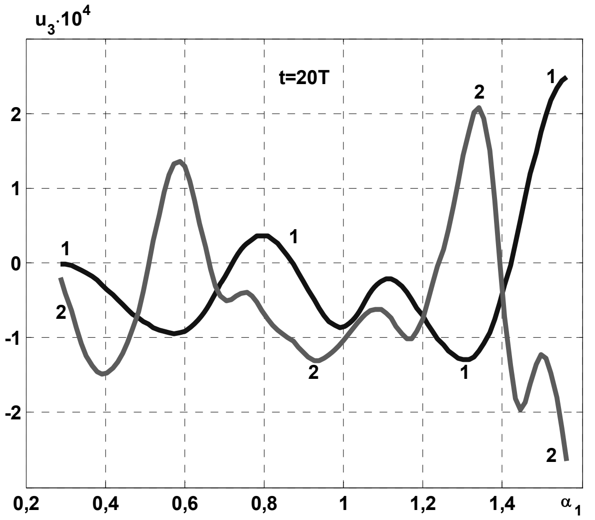

Рис. 2

На рис. 1, 4, 7 представлено залежності величин u_3, ε_{22}, σ_{22} від часу в характерній точці $(\alpha_1 = \pi/2; \alpha_2 = 0)$, в якій зазначені величини досягають своїх максимальних за модулем значень на часовому інтервалі $0 \le t \le 40T$

На рис. 4 показано графіки деформації ε_{22} на часовому інтервалі $0 \le t \le 40T$. Максимальне абсолютне значення величин ε_{22} для випадку одношарової оболонки $\varepsilon_{22} = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$ спостерігається в момент часу $t = 26T$ (рис. 5), а для випадку тришарової оболонки – $\varepsilon_{22} = 8{,}6 \cdot 10^{-4}$ в момент часу $t = 12T$ (рис. 6). Отже, максимальна деформація для випадку тришарової оболонки в 2 рази більша від максимальної деформації для випадку одношарової оболонки.

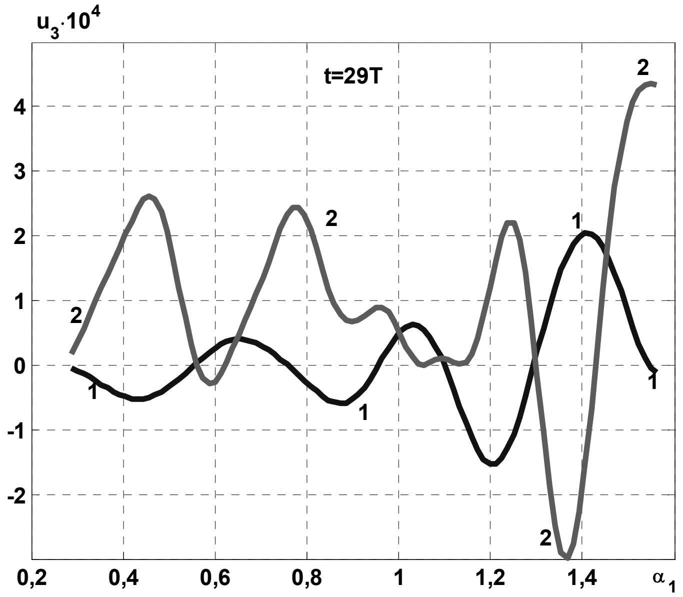

Рис. 3

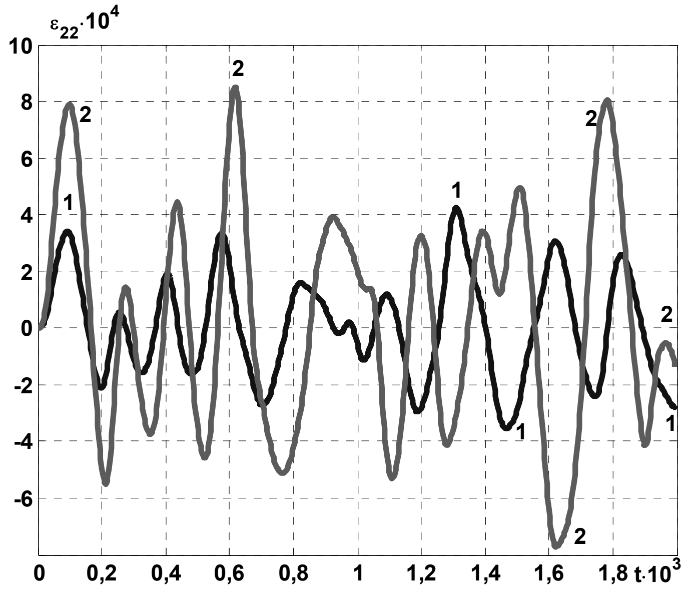

Рис. 4

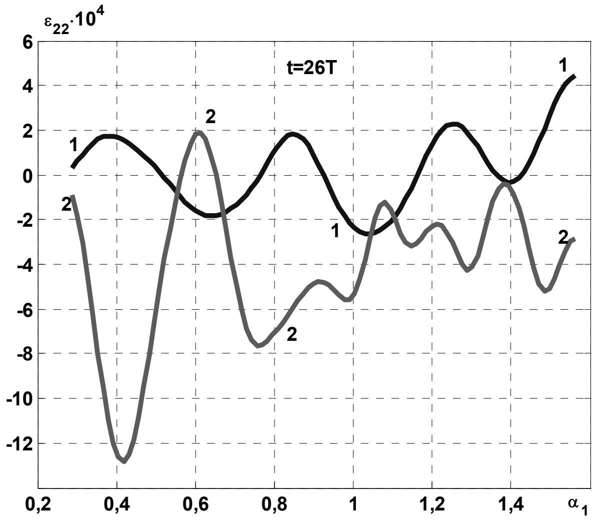

Рис. 5

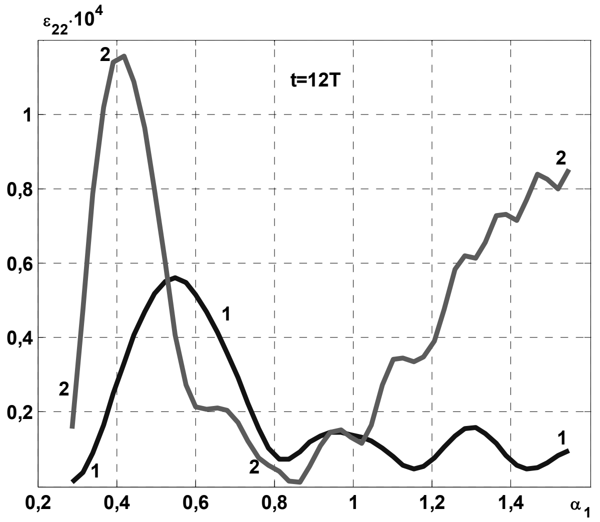

Рис. 6

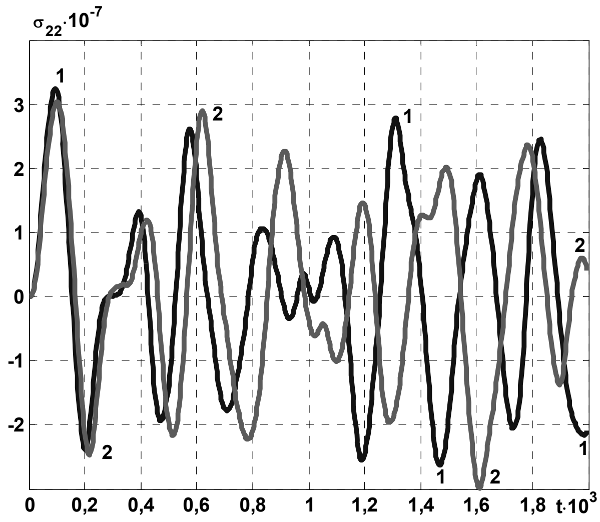

Рис. 7

Із наведеного на рис. 7 графічного матеріалу випливає, що максимальне за абсолютною величиною значення напруження σ_{22} для випадку одношарової оболонки $\sigma_{22} = 3{,}3 \cdot 10^7$Па досягається в момент часу $t = 2T$ (рис. 8), а для випадку тришарової оболонки – $\sigma_{22} = 2{,}9 \cdot 10^7$Па в момент часу $t = 32T$ (рис. 9). Отже, максимальне напруження для випадку тришарової оболонки на 12% менше від максимального напруження для випадку одношарової оболонки.

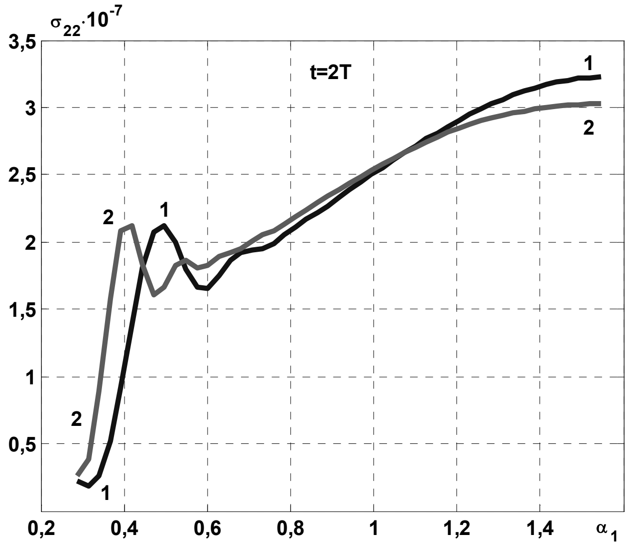

Рис.8

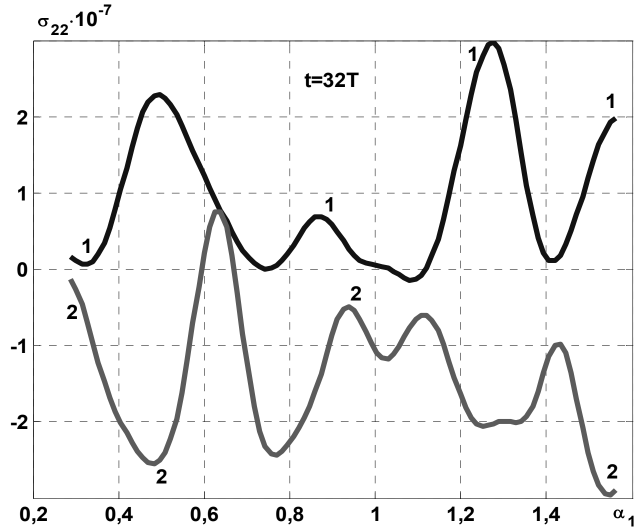

Рис .9

Висновок.

Розглянуто задачі динамічної поведінки тришарових еліпсоїдальних оболонок під дією нестаціонарних навантажень. Наведено рівняння коливань оболонок з відповідними граничними та початковими умовами. Для розв'язування поставлених задач побудовано чисельний алгоритм, заснований на скінченно-різницевій апроксимації вихідних рівнянь за просторовими та часовою координатами. Наведено чисельні результати для випадків динамічної поведінки одношарових та тришарових еліпсоїдальних оболонок, проведено їх порівняльний аналіз.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачі про вимушені коливання тришарових еліпсоїдальних оболонок під дією нестаціонарного розподіленого навантаження. При побудові математичної моделі тришарових оболонок використано теорію кінематичних та статичних гіпотез для пакету шарів еліпсоїдальної оболонки. Застосовано геометрично нелінійний варіант теорії оболонок типу С.П. Тимошенка в квадратичному наближенні. Для розв'язування поставлених задач було використано чисельний алгоритм, оснований на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови різницевих схем за просторовими координатами, і явна скінченно-різницева схема за часовою координатою. Наведено числові результати розглянутої динамічної задачі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тришарова еліпсоїдальна оболонка, теорія типу С.П. Тимошенка, вимушені коливання, числовий розв'язок.

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432с.
2. *Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – Киев: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
3. *Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
4. *Луговой П.З., Мукоид В.П., Мейш В.Ф.* Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках. – Киев: Наук. думка, 1991. – 280 с.
5. *Методы расчета оболочек:* в 5-и томах. Т.5. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д.* Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наук. думка, 1982. – 400 с.
6. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Ленинград-Москва: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
7. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1977. – 656 с.
8. *Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С.* Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392с.
9. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P.* Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 22 – 32.
10. *Maiborodina N.V., Meish V.F.* Forced Vibrations of Ellipsoidal Shells Reinforced with Transverse Ribs under a Nonstationary Distributed Load // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 693 – 701.
11. *Meish V.F., Maiborodina N.V.* Nonaxisymmetric vibrations of ellipsoidal shells under nonstationary distributed loads // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. – P. 1015 – 1024.
12. *Meish V.F., Maiborodina N.V.* Analysis of the Non-Axisymmetric Vibrations of Flexible Ellipsoidal Shells Discretely Reinforced with Transverse Ribs under Non-Stationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1128 – 1136.
13. *Meish V.F., Meish Yu.A., Pavlyuk A.V.* Dynamics of a Three-Layer Elliptic Cylindrical Shell Reinforced with Discrete Rings // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 172 – 179.
14. *Meish V.F., Maiborodina N.V.* Stress State of Discretely Stiffened Ellipsoidal Shells Under a Nonstationary Normal Load // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 6. – P. 675 – 686.
15. *Meish V.F., Meish Yu.A., Arnauta N.V.* Numerical Analysis of Unsteady Oscillations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Variable Geometries // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 426 – 433.
16. *Meish V.F., Meish Yu.A., Belova M.A.* Nonstationary Dynamics of Elliptic Isotropic Conical Shells under Distributed Loads // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 424 – 431.
17. *Noor A.K., Burton W.S.* Assessment of Computational Models for Multilayered Composite Shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – **43**, N 4. – P. 67 – 97.
18. *Qatu M.S.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Shells: 1989 – 2000. Part 1: Laminated Composite Shells // Appl. Mech. Rev. 2002. – **55**, N 4. – P. 325 – 350.
19. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // Composite Struct. – 2010. – **93**, N 1. – P. 14 – 31.

Надійшла 24.04.2021 Затверджена до друку 09.12.2021