

І. Ф. Киричок¹, О. А. Чернюшок²

ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА І ДОВГОВІЧНІСТЬ ПІДДАТЛИВИХ
НА ЗСУВ НЕПРУЖНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ
З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ НАКЛАДКАМИ ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ
РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАННЯХ

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: term@inmech.kiev.ua;

²Національний університет харчових технологій,
вул. Володимирська, 68, 01601, Київ, Україна; e-mail: chernyshokolqa@ukr.net

Abstract. The improved statement and methodology of solving the problem on the electrothermomechanical behavior and durability forecast of the nonelastic shell of revolution with piezoelectric actuators and sensors under axisymmetric resonance oscillation are presented. The deformation of transverse shear, rotation inertia, and temperature dependence of mechanical characteristic of materials are taken into account. Effect of these factors on the frequency response of deflection amplitude, vibration heating temperature, and sensor of electric indicator is investigated with using the numerical experiment. On the basis of the criterion for assessing local durability according to the permissible values of the maximum heating temperature, the dependence of the system's performance time on the extreme amplitudes of mechanical load and heat transfer conditions from its surface is investigated.

Key words: resonance vibration, dissipative heating, inelastic material, piezoelectric actuators, sensors.

Вступ.

Тонкостінні елементи типу балок, пластинок і оболонок обертання знаходять широке застосування як складові конструкцій сучасної техніки. Часто вони виготовлені з непружних пасивних (без п'єзоефекту) і п'єзоактивних матеріалів, для яких характерна шаруватість, анізотропія механічних властивостей, висока піддатливість на зсув. В багатьох випадках конструктивні елементи в процесі експлуатації перебувають під дією інтенсивних гармонічних навантажень з частотами, близькими до резонансних. Такі екстремальні умови експлуатації, як правило, супроводжуються високим рівнем механічних напружень, прогинів і вібророзігріву. Ці обставини при розрахунках напружено-деформованого стану і температури вібророзігріву вимагають розробки підходів керування коливаннями і оцінки довговічності об'єкта в процесі експлуатації. Для контролю вимушених коливань тонкостінних елементів в останні роки застосовуються п'єзоелектричні включення, одні з яких виконують роль збуджувачів або гасителів коливань (актуатори), а інші дають інформацію про термомеханічний стан об'єкта (сенсори) [7, 9, 19, 20]. При цьому задачі про електротермомеханічну поведінку і прогнозування довговічності таких елементів необхідно розв'язувати на основі уточнених теорій оболонок, які враховують ефекти деформацій поперечного зсуву і дисипативного розігріву [3, 4].

Розробці математичних моделей динамічної поведінки шаруватих тонкостінних оболонок із непружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів з врахуванням дисипативного розігріву, фізичної і геометричної нелінійностей, а також розв'язанню конкретних задач про коливання і дисипативний розігрів та демпфування п'єзоактуаторами і сенсорами таких елементів присвячено багато наукових статей [12 – 14, 15 – 18 та ін.], значна частина яких представлена в монографіях [3, 4] або обговорюється в оглядах [10, 11, 13].

В даній статті в рамках уточненої моделі теорії шаруватих оболонок, яка враховує деформації поперечного зсуву та інерцію повороту елементів перерізу, представлено постановку і методику чисельного розв'язування задачі про електротермомеханічну поведінку та прогнозування довговічності непружних оболонок обертання з п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами при осесиметричних резонансних коливаннях. Зокрема, на прикладі задачі про вимушені коливання в'язкопружної циліндричної оболонки досліджується вплив деформації поперечного зсуву і температурної залежності електромеханічних модулів від температури вібророзігріву на динамічні характеристики оболонки та електричні показники сенсора. За критерієм допустимої температури дисипативного розігріву дана оцінка довговічності оболонки, що розглядається, при екстремальних умовах експлуатації, коли настає втрата працездатності через температурну деградацію пасивного або активного матеріалів.

1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо задачу про вимушені осесиметричні коливання і дисипативний розігрів тришарової оболонки обертання, складеної із пасивного (без п'єзо ефекту) шару товщиною h_3 і жорстко скріплених з його внутрішньою і зовнішньою поверхнями п'єзоелектричних шарів товщиною h_1 і h_2 , відповідно. Останні можуть виконувати роль актуаторів або сенсорів. Оболонка віднесена до ортогональної криволінійної системи координат s, θ, γ з початком нормальної координати $\gamma = 0$ на серединній поверхні пасивного шару (s – довжина дуги меридіана; θ – центральний кут в паралельному колі). Пасивний шар товщиною h_3 виготовлено з трансверсально-ізотропного матеріалу, а п'єзоактивні шари товщиною h_1 і h_2 – з поляризованої вздовж товщинної координати п'єзокераміки. Зовнішні поверхні $\gamma = \mp H_{1,2}$ ($H_{1,2} = h_3 / 2 + h_{1,2}$) і поверхні $\gamma = \pm h_3 / 2$ п'єзошарів покриті нескінченно тонкими суцільними електродами. Внутрішні електроди підтримуються при нульовому електричному потенціалі $\varphi_{1,2}(\pm h_0 / 2) = 0$. Електродовані поверхні $\gamma = \mp H_{1,2}$ можуть бути розділені нескінченно тонкими коловими розрізами на окремі ділянки з координатами s_1, s_2 вздовж твірної меридіану. Матеріали пасивного і п'єзоактивних шарів вважаємо в'язкопружними. В'язкопружні властивості матеріалів описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності $a * b = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau$, які зводяться до операції множення комплексних величин $a * b = (a' + ia'')(b' + ib'')$ при гармонічних процесах деформування.

Оболонка навантажена осесиметричним поверхневим тиском $q_z = q'_z(s) \cos \omega t$, що гармонічно змінюється за часом t з амплітудою q'_z і коловою частотою ω , близькою до резонансної. Якщо п'єзошари виконують роль актуатора, для підсилення або зниження амплітуди механічних коливань з тою ж частотою і фазою або протифазою, відповідно, до зовнішніх електродованих колових ділянок шириною $\Delta_s = s_2 - s_1$ на поверхнях $\gamma = \mp H_{1,2}$ підводяться електричні потенціали $\varphi_{1,2}(\mp H_{1,2}) = \text{Re}(2V_a e^{i\omega t})$ з амплітудою V_a . Ділянки $s < s_1, s > s_2$ не електродовані. При виконанні п'єзошарами ролі сенсорів в результаті гармонічного деформування оболонки на розімкнутих електродах сенсора виникає різниця електричних потенціалів амплітуди V_s , яку необхідно визначити експериментально або на основі розв'язування задачі електромеханіки, використовуючи електричні граничні умови

$$\iint_{F^\pm} D_\gamma dF = 0 \quad (s_1 \leq s \leq s_2); \quad D_\gamma = 0 \quad (s < s_1, s > s_2), \quad (1)$$

де D_γ – нормальна складова електричної індукції в п'єзошарі; $F = 2\pi r(s)\Delta_s$ – площа електродованої ділянки; $r(s)$ – радіус паралельного кола оболонки.

Математичне моделювання електротермомеханічної поведінки даної оболонки обертання ґрунтується на справедливості по всьому пакету шарів відносно механічних змінних гіпотез С.П.Тимошенка, які враховують деформацію поперечного зсуву та інерцію повороту нормального елемента [2]. Відносно електричних величин в п'єзосшарах вважаємо, що складовими D_s, D_θ вектора електричної індукції можна знехтувати. При цьому складові E_s, E_θ вектора електричної напруженості знаходяться із визначальних рівнянь $D_s = 0, D_\theta = 0$, а з рівнянь електростатики випливає, що нормальна складова $D_\gamma = \text{const}$ не залежить від товщинної координати γ [3]. Температуру дисипативного розігріву оболонки вважаємо постійною по товщині пакету шарів, а на поверхнях $\gamma = \mp H_{1,2}$ реалізуються умови конвективного теплообміну.

На основі прийнятих гіпотез тривимірні визначальні співвідношення поляризованої вздовж осі γ п'єзокераміки зводяться до наступних виразів [3]:

$${}^m\sigma_s = {}^m b_{11} * e_s + {}^m b_{12} * e_\theta - {}^m b_{31} * {}^m E_\gamma; \quad (2)$$

$${}^m\sigma_\theta = {}^m b_{12} * e_s + {}^m b_{11} * e_\theta - {}^m b_{31} * {}^m E_\gamma; \quad {}^m\sigma_{s\gamma} = {}^m b_{44} * \varepsilon_{s\gamma};$$

$${}^m D_\gamma = {}^m b_{31} * (e_s + e_\theta) + {}^m b_{33} * {}^m E_\gamma; \quad {}^m E_\gamma = -\partial\varphi_m / \partial\gamma \quad (m = 1, 2, 3). \quad (3)$$

У співвідношеннях (2), (3) позначено:

$${}^m b_{11} = 1 / [{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E^2)]; \quad {}^m b_{12} = {}^m \nu_E {}^m b_{11}; \quad {}^m b_{31} = {}^m d_{31} / [{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E)];$$

$${}^m b_{44} = 1 / [{}^m s_{11}^E (1 - {}^m k_{15}^2)]; \quad {}^m b_{33} = {}^m \varepsilon_{33}^T (1 - {}^m k_p^2); \quad {}^m k_p^2 = 2 {}^m d_{32}^2 / [{}^m \varepsilon_{33}^T {}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E)];$$

$${}^m k_{15}^2 = {}^m d_{15}^2 / ({}^m s_{44}^E {}^m \varepsilon_{11}^T); \quad {}^m \nu_E = -{}^m s_{12}^E / {}^m s_{11}^E,$$

де $s_{jk}^E = s'_{jk} (1 - i\delta_{jk}^s)$; $d_{jk} = d'_{jk} (1 - i\delta_{jk}^d)$; $\varepsilon_{kk}^T = \varepsilon'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^e)$ – відповідно комплексні піддатливості, п'єзомодулі і діелектричні проникливості п'єзокераміки, які залежать від температури. Знак * далі опускаємо. Поведінка пасивного шару ($m = 3$) із трансверсально-ізотропного матеріалу описується співвідношеннями (2), в яких ${}^3 b_{11} = E / (1 - \nu^2)$; ${}^3 b_{12} = \nu {}^3 b_{11}$; ${}^3 b_{31} = 0$; ${}^3 b_{44} = G_{13}$; $E = E' + iE''$ і $G = G' + iG''$ – температурно залежні комплексні модулі Юнга і поперечного зсуву; $\nu = \text{const}$ – коефіцієнт Пуассона.

Співвідношення Коші для амплітуд деформацій мають вигляд [2]

$$e_s = \varepsilon_s + \gamma\kappa_s; \quad e_\theta = \varepsilon_\theta + \gamma\kappa_\theta; \quad \varepsilon_{s\gamma} = \psi_s - \mathcal{G}_s; \quad (4)$$

$$\varepsilon_s = \frac{du}{ds} + k_1 w; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} (u \cos \varphi + w \sin \varphi);$$

$$\kappa_s = \frac{d\psi_s}{ds} - k_1 \varepsilon_s; \quad \kappa_\theta = \frac{1}{r} \psi_s \cos \varphi - k_2 \varepsilon_\theta; \quad \mathcal{G}_s = -\frac{dw}{ds} + k_2 u, \quad (5)$$

де u, w, ψ_s – відповідно комплексні амплітуди меридіонального і поперечного переміщень координатної поверхні та кут повороту нормалі до неї; $k_1 = 1 / R_s$; $k_2 = 1 / R_\theta$; R_s, R_θ – радіуси головних кривизн в меридіональному і коловому напрямках; φ – кут, утворений нормаллю до координатної поверхні і віссю обертання.

Інтегруючи залежності (3) за γ з врахуванням виразів (4) і електричних граничних умов $\varphi_{1,2}(\mp H_{1,2}) = \mp V_a$; $\varphi_{1,2}(\mp h_3 / 2) = 0$, одержимо вирази для електричних складових

$$\begin{aligned} {}^m D_\gamma &= -{}^m b_{33} {}^m V_0 / h_m + {}^m b_{33} (\varepsilon + \tilde{h}_m \kappa); \quad \varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_\theta; \quad \kappa = \kappa_s + \kappa_\theta; \\ {}^m E_\gamma &= -{}^m V_0 / h_m + {}^m b_{31} / {}^m b_{33} (\mp \tilde{h}_m - \gamma) \kappa; \quad \tilde{h}_m = (h_3 + h_m) / 2 \quad (m=1, 2). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут необхідно прийняти для п'єзосенсора ${}^m V_0 = {}^m V_s$, а для актуатора – ${}^m V_0 = {}^m V_a$.

Враховуючи прийняті гіпотези і залежності (2), (4), (6), співвідношення в'язкопружності для зусиль і моментів записуються у вигляді

$$\begin{aligned} N_s &= C_{11} \varepsilon_s + C_{12} \varepsilon_\theta + K_{11} \kappa_s + K_{12} \kappa_\theta + N_E; \quad N_\theta = C_{12} \varepsilon_s + C_{11} \varepsilon_\theta + K_{12} \kappa_s + K_{11} \kappa_\theta + N_E; \\ M_s &= K_{11} \varepsilon_s + K_{12} \varepsilon_\theta + D_{11} \kappa_s + D_{12} \kappa_\theta + M_E; \quad M_\theta = K_{12} \varepsilon_s + K_{11} \varepsilon_\theta + D_{12} \kappa_s + D_{11} \kappa_\theta + M_E; \quad (7) \\ Q_s &= k_s C_{44} \varepsilon_{s\gamma} = k_s C_{44} (\psi_s - \vartheta_s). \end{aligned}$$

В співвідношеннях (7) залежні від температури комплексні параметри C_{1j} , C_{44} , K_{1j} , D_{1j} визначаються формулами

$$\begin{aligned} C_{1j} &= \sum_{n=1}^3 {}^n b_{1j} h_n + B_{33} k_c; \quad K_{1j} = \sum_{n=1}^3 {}^n b_{1j} h_{n2} + K_{33} k_c; \quad D_{1j} = \sum_{n=1}^3 {}^n b_{1j} h_{n3} + D_{33} \quad (j=1, 2); \\ C_{44} &= \sum_{n=1}^3 {}^n b_{44} h_n; \quad B_{33} = \sum_{n=1}^2 {}^n \gamma_{33} h_n p_n; \quad K_{33} = \sum_{n=1}^2 {}^n \gamma_{33} h_{n2} p_n; \\ D_{33} &= ({}^1 \gamma_{33} h_{13} p_3 + {}^2 \gamma_{33} h_{23} p_4) k_{D1} + ({}^1 \gamma_{33} h_1^3 p_5 + {}^2 \gamma_{33} h_2^3 p_6) k_{D2} / 12; \quad {}^n \gamma_{33} = {}^n b_{31}^2 / {}^n b_{33}; \\ N_E &= {}^1 b_{31} {}^1 V_a k_{v1} + {}^2 b_{31} {}^2 V_a k_{v2}; \quad M_E = -\tilde{h}_1 {}^1 b_{31} {}^1 V_a k_{v1} + \tilde{h}_2 {}^2 b_{31} {}^2 V_a k_{v2}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$h_{12} = -h_1 (h_1 + h_3); \quad h_{22} = h_2 (h_2 + h_3); \quad h_{32} = 0;$$

$$h_{13} = (4h_1^3 + 6h_1^2 h_3 + 3h_1 h_3^2) / 4; \quad h_{23} = (4h_2^3 + 6h_2^2 h_3 + 3h_2 h_3^2) / 4; \quad h_{33} = h_3^3 / 4;$$

k_s – коефіцієнт зсуву [2]. Зауважимо, що при побудові визначальних співвідношень (7) при визначенні коефіцієнтів (8) для п'єзосенсора замість умови (1) використана наближена рівність $D_\gamma = 0$ [15]. Крім того, в формулах (8) необхідно прийняти $k_c = 0$; $k_{D1} = 0$; $k_{D2} = 1$; $p_5 = p_6 = 1$; $k_{v1} = k_{v2} = 1$ якщо п'єзошари h_1 і h_2 виконують роль актуатора; $k_c = 1$; $k_{D1} = 1$; $k_{D2} = 0$; $p_1 = p_2 = 1$; $p_4 = p_4 = 1$; $k_{v1} = k_{v2} = 0$ – п'єзошари h_1 і h_2 є сенсором; $k_c = 1$; $k_{D1} = 1$; $k_{D2} = 1$; $p_1 = p_3 = p_6 = 0$; $p_2 = p_4 = p_5 = 1$; $k_{v1} = 1$; $k_{v2} = 0$ – п'єзошар h_1 – актуатор, а п'єзошар h_2 є сенсором.

При врахуванні масових інерційних сил згідно принципу Даламбера рівняння осесиметричних гармонічних коливань в'язкопружних оболонок обертання відносно шуканих комплексних невідомих мають вигляд (множник $e^{i\omega t}$ опускаємо)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (r N_s) - \cos \varphi N_\theta + r k_1 Q_s &= r \rho_s \omega^2 u; \\ \frac{d}{ds} (r Q_s) - \sin \varphi N_\theta + r k_1 N_s + r q_\gamma &= r \rho_s \omega^2 w; \\ \frac{d}{ds} (r M_s) - \cos \varphi M_\theta - r Q_s &= r \rho_s \omega^2 \psi_s, \end{aligned} \quad (9)$$

де $\rho_{\bullet} = \sum_{m=1}^3 (\rho_n h_n)$; $\rho_{\bullet\bullet} = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^2 \rho_n (4h_n^3 + 6h_n^2 h_3 + 3h_n h_3^2) + \frac{1}{12} \rho_3 h_3^3$; ρ_1, ρ_2, ρ_3 – відповідно, питомі густини п'єзоактивних і пасивного матеріалів.

Механічні граничні умови на контурах оболонки, що розглядаються, як і в теорії пружних оболонок, можна представити в зусиллях і моментах

$$N_s, M_s, Q_s \text{ на контурах } s = s_0, s = s_N, \quad (10)$$

або в переміщеннях

$$u, w, \psi_s \text{ на контурах } s = s_0, s = s_N, \quad (11)$$

або у вигляді комбінації зусиль (10) і переміщень (11).

Згідно прийнятому припущенню відносно розподілу температури вібророзігріву усереднене за період коливань і по товщині оболонки рівняння теплопровідності, початкові і граничні умови конвективного теплообміну записуються у вигляді:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial s} - \frac{2\alpha_s}{\lambda H} (T - T_c) + \frac{\omega}{2\lambda H} \langle W \rangle; \quad (12)$$

$$T = T_0 \quad (t = 0); \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial s} = \pm \alpha_{1,2} (T - T_c) \quad (s = s_0, s = s_N),$$

де

$$\begin{aligned} \langle W \rangle = & N'_s \varepsilon'_s - N'_s \varepsilon''_s + N''_{\theta} \varepsilon'_\theta - N''_{\theta} \varepsilon''_{\theta} + M'_s \kappa'_s - M'_s \kappa''_s + M''_{\theta} \kappa'_\theta - M''_{\theta} \kappa''_{\theta} + \\ & + Q'_s \varepsilon'_{s\gamma} - Q'_s \varepsilon''_{s\gamma} + {}^1 D''_{\gamma} {}^1 V'_a + {}^2 D''_{\gamma} {}^2 V'_a - {}^1 D'_{\gamma} {}^1 V''_a - {}^2 D'_{\gamma} {}^2 V''_a \end{aligned} \quad (13)$$

– усереднена швидкість дисипації; $\alpha_s = (\alpha_+ + \alpha_-) / 2$, α_1, α_2 – коефіцієнти тепло обміну на поверхнях і контурах оболонки; λ, a – усереднені коефіцієнти тепло- і температуропровідності; $H = h_1 + h_2 + h_3$; T_0 – початкова температура оболонки. У випадку п'єзошарів-сенсорів п'єзоелектричні складові в (13) відсутні.

2. Побудова чисельного алгоритму розв'язування задачі.

Розв'язувальна система рівнянь (4) – (7), (9) – (13) описує вимушені осесиметричні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружних трансверсально ізотропних оболонок обертання з п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами. У випадку температурної залежності електромеханічних характеристик пасивного і п'єзоактивного матеріалів ця система рівнянь є взаємно-зв'язаною і нелінійною. Для зручного чисельного розв'язку в якості розв'язувальних функцій вибираємо $u, w, \psi_s, N_s, Q_s, M_s$. При цьому співвідношення (7) з врахуванням (5) запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \tilde{a}_{11} u + a_{15} w + \tilde{a}_{12} \psi_s + a_{13} N_s + a_{14} M_s - n_E; \\ \kappa_s &= \tilde{a}_{21} u + a_{25} w + \tilde{a}_{22} \psi_s + a_{23} N_s + a_{24} M_s - m_E; \\ \psi_s &= \mathcal{G}_s + J_{sD} Q_s; \\ N_{\theta} &= \tilde{m}_{11} u + m_{15} w + \tilde{m}_{12} \psi_s + m_{13} N_s + m_{14} M_s + n_{E\theta}; \\ M_{\theta} &= \tilde{m}_{21} u + m_{25} w + \tilde{m}_{22} \psi_s + m_{23} N_s + m_{24} M_s + m_{E\theta}. \end{aligned} \quad (14)$$

Коефіцієнти в (14) через жорсткісні характеристики (8) виражаються формулами

$$\begin{aligned} a_{11} &= (K_{11} K_{12} - D_{11} C_{12}) / \Delta; \quad a_{12} = (K_{11} D_{12} - D_{11} K_{12}) / \Delta; \quad a_{13} = D_{11} / \Delta; \\ a_{21} &= (K_{11} \tilde{N}_{12} - K_{11} C_{11}) / \Delta; \quad a_{22} = (K_{11} K_{12} - C_{11} D_{12}) / \Delta; \quad a_{23} = a_{14} = -K_{11} / \Delta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{24} &= C_{11} / \Delta; \quad n_E = (D_{11}N_E - K_{11}M_E) / \Delta; \quad m_E = (K_{11}N_E - C_{11}M_E) / \Delta; \\
\tilde{a}_{11} &= \hat{a}_{11}A; \quad \tilde{a}_{12} = a_{12}A; \quad \tilde{a}_{21} = a_{21}A; \quad \hat{a}_{11} = a_{11} - k_2a_{12}; \quad \hat{a}_{21} = a_{21} - k_2a_{22}; \quad A = \cos \varphi / r; \\
\tilde{a}_{22} &= a_{22}A; \quad a_{15} = \hat{a}_{11}B; \quad a_{25} = \hat{a}_{21}B; \quad B = \sin \varphi / r;
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\tilde{m}_{11} = C_{12}\tilde{a}_{11} + K_{12}\tilde{a}_{21} + \tilde{C}_{11}A; \quad \tilde{m}_{12} = C_{12}\tilde{a}_{12} + K_{12}\tilde{a}_{22} + K_{11}A; \quad \tilde{C}_{11} = C_{11} - k_2K_{11};$$

$$m_{13} = C_{12}a_{13} + K_{12}a_{23}; \quad m_{14} = C_{12}a_{14} + K_{12}a_{24}; \quad m_{15} = C_{12}a_{15} + K_{12}a_{25} + \tilde{C}_{11}B;$$

$$\tilde{m}_{22} = K_{12}\tilde{a}_{12} + D_{12}\tilde{a}_{22} + D_{11}A; \quad \tilde{m}_{21} = K_{12}\tilde{a}_{11} + D_{12}\tilde{a}_{21} + \tilde{K}_{11}A;$$

$$m_{23} = K_{12}a_{13} + D_{12}a_{23}; \quad m_{24} = K_{12}a_{14} + D_{12}a_{24}; \quad \tilde{K}_{11} = K_{11} - k_2D_{11};$$

$$m_{25} = K_{12}a_{15} + D_{12}a_{25} + \tilde{K}_{11}B; \quad n_{E\theta} = N_E - C_{12}n_E - K_{12}m_E; \quad m_{E\theta} = M_E - K_{11}n_E - D_{12}m_E.$$

Після деяких перетворень рівнянь (5), (9) з урахуванням (14) приходимо до системи диференціальних рівнянь в формі Коші

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{ds} &= k_1u - \psi_s + J_{sD}Q_s; \quad \frac{du}{ds} = \tilde{a}_{11}u + (a_{15} - k_1)w + \tilde{a}_{12}\psi_s + a_{13}N_s + a_{14}M_s - n_E; \\
\frac{d\psi_s}{ds} &= (k_1\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{21})u + (a_{25} - k_1a_{15})w + (k_1\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{22})\psi_s + \\
&\quad + (k_1a_{13}a_{23})N_s + (k_1a_{14} + a_{24})M_s - (k_1n_E + m_E);
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\frac{dN_s}{ds} = (A\tilde{m}_{11} - \rho_\bullet \omega^2)u + Am_{15}w + A\tilde{m}_{12}\psi_s + A(m_{13} - 1)N_s + Am_{14}M_s - k_1Q_s + An_{E\theta};$$

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_s}{ds} &= k_2\tilde{m}_{11}u + (k_2m_{15} - \rho_\bullet \omega^2)w + k_2\tilde{m}_{12}\psi_s + \\
&\quad + (k_2m_{13} + k_1)N_s + k_2m_{14}M_s - AQ_s - q'_\gamma + k_2n_{E\theta};
\end{aligned}$$

$$\frac{dM_s}{ds} = A\tilde{m}_{21}u + Am_{25}w + (A\tilde{m}_{22} - \rho_\bullet \omega^2)\psi_s + A(m_{24} - 1)M_s + Am_{23}N_s + Q_s + Am_{E\theta}.$$

Розділяючи систему рівнянь (16) разом з граничними умовами типу (10), (11) на дійсні і уявні складові, приходимо до системи диференціальних рівнянь 12 порядку в формі

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = A(s)\vec{N} + \vec{f}, \tag{17}$$

граничні умови для якої можна записати так:

$$B_1\vec{N} = \vec{b}_1 \quad (s = s_0); \quad B_2\vec{N} = \vec{b}_2 \quad (s = s_N). \tag{18}$$

Тут $\vec{N} = \{u', u'', w', w'', \psi'_s, \psi''_s, N'_s, N''_s, Q'_s, Q''_s, M'_s, M''_s\}^T$ – вектор-стовбець; \vec{f} – вектор-стовбець правої частини; $A(s)$ – квадратична матриця, коефіцієнти якої виписуються на основі (16); B_1, B_2 – прямокутні матриці 6 порядку і задані вектори \vec{b}_1, \vec{b}_2 визначаються граничними умовами на торцях оболонки.

При незалежних від температури електромеханічних характеристиках матеріалів задача про електротермомеханічну поведінку даних оболонок зводиться до роздільного розв'язування задачі механіки (17), (18) та інтегрування рівняння теплопровідності

(12) з нелінійним джерелом тепла (13). У випадку температурної залежності в'язкопружних характеристик матеріалів рівняння (12), (13), (17), (18) взаємозв'язані і нелінійні. Для їх розв'язування використовується метод покрокового інтегрування за часом [3]. На першому кроці розв'язуємо лінійну задачу (17), (18) при ізотермічних властивостях матеріалів методом дискретної ортогоналізації [2] з використанням комп'ютерної програми [6]. Потім обчислюємо дисипативну функцію (13) і розв'язуємо задачу теплопровідності (12) методом кінцевих різниць з використанням явної схеми. Далі на основі отриманого розподілу температури обчислюємо жорсткісні характеристики (15) згідно заданого закону залежності від температури електромеханічних комплексних модулів пасивного і п'єзоактивного матеріалів і процес повторюємо на наступному кроці за часом.

На основі отриманого розв'язку зв'язаної крайової задачі електротермов'язкопружності у випадку оболонки з п'єзосенсорами для визначення потенціалу на електродах сенсора після підстановки ${}^m D_\gamma$ із (6) в першу умову (1) одержимо наступний вираз:

$$\frac{{}^m V_s}{h_m} = - \int_{s_0}^{s_1} {}^m b_{31} [\varepsilon_s + \varepsilon_\theta + \tilde{h}_m (\kappa_s + \kappa_\theta)] ds / \int_{s_0}^{s_1} {}^m b_{33} ds. \quad (19)$$

3. Прогнозування довговічності оболонкових систем по допустимим значенням температури вібророзігріву.

Прогнозування довговічності непружних пасивно-п'єзоактивних елементів при гармонічному навантаженні включає розв'язування вищерозглянутих взаємозв'язаних рівнянь вимушених коливань і теплопровідності оболонок, доповнених критеріальними умовами. Аналіз відомих енергетичних і односторонніх критеріїв локального руйнування в'язкопружних гумово-металевих систем представлено в [1]. Одним з найбільш розповсюджених критеріїв в інженерній практиці є прогнозування довговічності по допустимим значенням напружень, деформацій і температур. Такі односторонні оцінки з достатньо великою точністю дозволяють встановити гарантовану нижню оцінку працездатності оболонкової системи. Довговічність, як правило, визначається часом t_k втрати працездатності в локальному її об'ємі.

Практика інженерних розрахунків показує, що основний вклад в довговічність непружних об'єктів при гармонічних навантаженнях вносить температура дисипативного розігріву. При недостатньому тепловідведенні і високих амплітудах механічного або електричного гармонічних навантажень температура вібророзігріву може досягти критичного значення T_k , коли система деградує, тобто стає непрацездатною через розм'якшення в'язкопружного пасивного матеріалу або деполяризацію п'єзоелектричних складових (точка Кюрі). Значення T_k для пасивного і п'єзоактивного матеріалів визначаються експериментально. Критичному значенню T_k відповідають критичні амплітуди механічного q_k або електричного V_k гармонічного навантаження оболонки, які визначаються на основі розв'язку вище розглянутої задачі. При критичних навантаженнях, які обумовлюють усталену максимальну температуру $T_m \leq T_k$ в локальному об'ємі, довговічність системи прогнозується на основі умови $T_m \leq T_{don} < T_k$ (T_{don} – установлена практикою допустима температура експлуатації). В цьому випадку в задачі термов'язкопружності використовується рівняння стаціонарної теплопровідності. У випадку навантажень, які викликають температуру, що перевищує T_k , необхідно визначити критичний час t_k працездатності системи з використанням нестационарного рівняння теплопровідності. В подальшому при чисельному визначенні локальної довговічності конкретної оболонки приймаємо, що деградація пасивного або п'єзоактивного матеріалу настає при досягненні температури $T_{don} = 120^\circ\text{C}$ хоча би в одній точці системи.

4. Результати числових розрахунків і їх аналіз для циліндричної оболонки з п'єзосенсором.

Як приклад розглянемо задачу про електротермомеханічну поведінку і прогнозування довговічності циліндричної оболонки радіуса R з п'єзошарами – сенсорами при гармонічному навантаженні поверхневим тиском постійної амплітуди q_0 . Геометричні характеристики оболонки наступні: $s_0 = 0; s_N = l; h_1 = h_2; r = R; \varphi = \pi / 2; k_1 = 0; k_2 = 1 / R$. П'єзошари виготовлені з однієї і тієї ж п'єзокераміки типу ЦТСтБ – 2 [8] з протилежною вздовж товщини поляризацією, так що шари h_1 і h_2 характеризуються п'єзомодулями ${}^1d_{31} = +d_{31}$ і ${}^2d_{31} = -d_{31}$, відповідно. Пасивний шар виготовлено з в'язкопружного полімера [5]. Температурні апроксимації в'язкопружних характеристик указаних матеріалів представлено, наприклад, в [18]. Задача розв'язується на основі вище розробленого підходу для оболонки з граничними умовами, коли край $s = 0$ шарнірно закріплений ($N_s = 0, w = 0, M_s = 0$), а край $s = l$ – жорстко защемлений ($N_s = 0, w = 0, \psi_s = 0$). Числові розрахунки проведено для таких розмірів оболонки та п'єзошарів сенсора: $l = R = 0,2\text{м}; h_1 = h_2 = 0,1 \cdot 10^{-4}\text{м}; h_3 = 0,04\text{м}; \Delta_s = 0,05l$ ($s_1 = 0,475l; s_2 = 0,525l$). Коефіцієнт поперечного зсуву $k_s = 5/6$ [2]. Розрахунки проведено в околі першої резонансної частоти найбільш енергоємної моди згинальних коливань оболонки.

На рис. 1 – 3 кривими показано частотні залежності максимальних значень амплітуд прогину $\tilde{w} = |w| \cdot 10^4\text{м}$ (АЧХ) (рис. 1), електричного показника сенсора $V_s, \text{В}$ (рис. 2) і температури дисипативного розігріву $T_m, ^\circ\text{С}$ (ТЧХ) (рис. 3) при ізотермічних ($T = T_0$) характеристиках матеріалів оболонки. Числові результати отримано для амплітуд поверхневого тиску $q_0 = 0,4 \cdot 10^4\text{Па}$ і коефіцієнта теплообміну Біо $\gamma_s = \alpha_{\pm,0,l} l / \lambda = 0,5$. Суцільні криві відповідають постановці задачі згідно класичної теорії оболонок Кірхгофа – Лява, а штрихові – при врахуванні деформації поперечного зсуву на основі гіпотез типу С.П. Тимошенка. Видно, що врахування деформації поперечного зсуву призводить до зміщення частотних залежностей величин \tilde{w}, V_s, T_m в сторону зменшення резонансної частоти та до збільшення їх значень на уточненій частоті резонансу.

Вплив температурної залежності в'язкопружних комплексних характеристик пасивного і п'єзоактивного матеріалів для невідомих \tilde{w}, V_s, T_m демонструють криві на рис. 4 – 6, відповідно. Розраховані з урахуванням деформації поперечного зсуву штрихові криві відповідають ізотермічній ($T = T_0$) постановці задачі, а су-

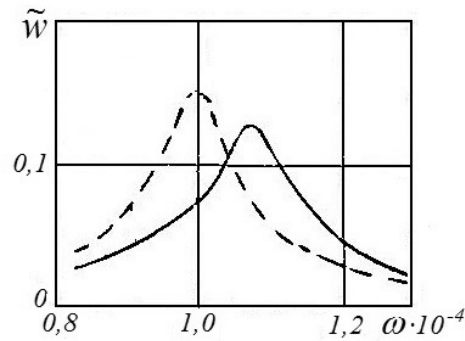


Рис. 1

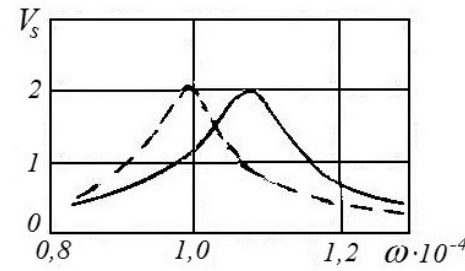


Рис. 2

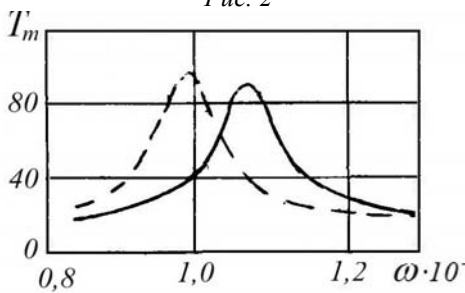


Рис. 3

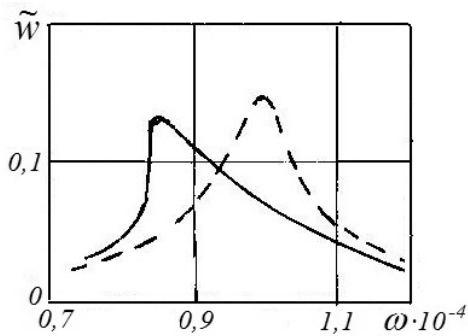


Рис. 4

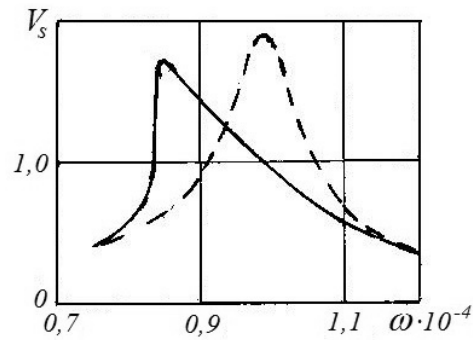


Рис. 5

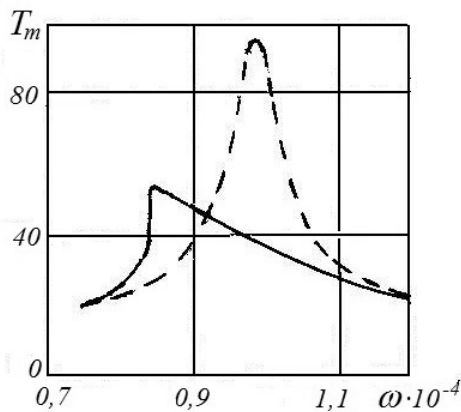


Рис. 6

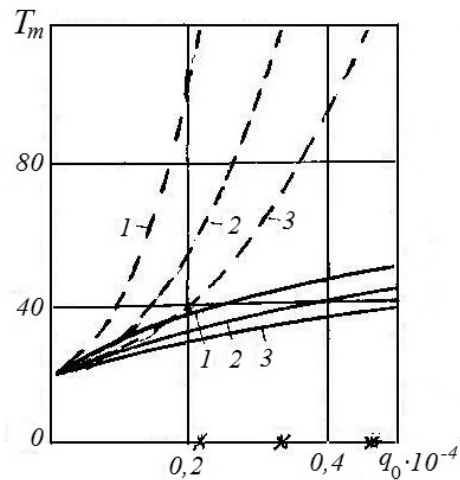


Рис. 7

цільні – при врахуванні температурної залежності електромеханічних властивостей матеріалів. Останні показують, що врахування залежності електромеханічних властивостей матеріалів від температури супроводжується зміщенням частотних характеристик в сторону зменшення резонансної частоти. При цьому має місце зниження амплітуди прогинів, показника сенсора і температури дисипативного розігріву на частоті неізотермічного резонансу по відношенню до її значення на ізотермічному резонансі.

На рис. 7 показані криві 1 – 3 залежності усталеної максимальної температури вібророзігріву T_m оболонки від амплітуди поверхневого тиску q_0 з частотою $\omega = 9900 \text{ c}^{-1}$. Ці криві розраховані при ізотермічних (штрихові лінії) і температурно залежних (суцільні лінії) властивостях матеріалів для параметрів теплообміну $\gamma_s = 0, 1; 0, 25; 0, 5$, відповідно. Критичні значення температури T_m і амплітуд $q_0 = q_k$ позначені хрестиками на осях ординат і абсцис. Аналіз кривих показує, що недостатній тепловідвід з поверхонь оболонки призводить до зменшення амплітуди критичного навантаження q_k (крива 1), яка відповідає температурі деградації системи. Врахування температурної залежності властивостей матеріалів супроводжується зниженням температури вібророзігріву через зміщення ТЧХ в сторону зменшення ізотермічної частоти резонансу.

У випадку ізотермічних характеристик матеріалів на рис. 8. кривими 1 – 3 показано еволюцію максимальної температури вібророзігріву оболонки за параметром часу $\tau = at/l^2$ на частоті $\omega = 9900 \text{ c}^{-1}$ для амплітуд $q_0 = (0, 30; 0, 335; 0, 35) \cdot 10^4 \text{ Па}$ і $\gamma_i = 0, 25$. Тут на осях ординат і абсцис хрестиками позначені, відповідно, критичні

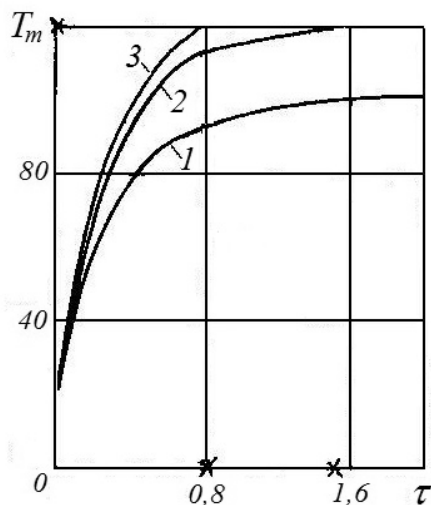


Рис. 8

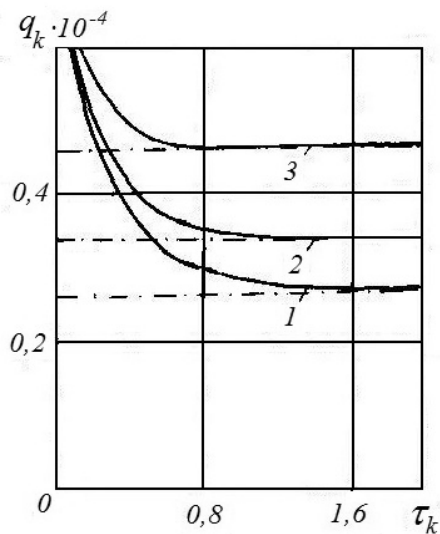


Рис. 9

значення температури T_k деградації і безрозмірного параметра часу τ_d . Аналіз кривих призводить до висновку, що при амплітудах навантаження q_0 , при яких температура вібророзігріву $T < T_k$ (крива 1), конструкція може працювати не менше визначеного практикою часу. При амплітудах q_0 , коли досягається температура $T \geq T_k$, настає критичний час τ_d температурної деградації системи.

На рис. 9 криві 1 – 3 характеризують час довговічності даної системи при амплітудах навантаження вище критичних (штрих-пунктирні лінії) та параметрах тепловіддачі $\gamma_s = 0,15; 0,25; 0,5$, відповідно. Ці криві нагадують криві Веллера з теорії циклічного руйнування пружних систем. Вони показують, що за оцінкою довговічності по допустимих значеннях температури вібророзігріву ($T_m \leq T_{don} \leq T_k$) термін працездатності системи суттєво залежить від умов навантаження і теплообміну з навколишнім середовищем. Збільшення коефіцієнта теплообміну γ_s супроводжується ростом критичних значень амплітуд q_k , що обумовлюють температуру деградації T_k об'єкта, і зменшенням його часу довговічності.

Висновок.

В рамках уточненої теорії шаруватих оболонок типу С.П.Тимошенка представлені постановка та методологія чисельного розв'язування зв'язаної задачі про електротермомеханічну поведінку і прогнозування довговічності в'язкопружних оболонок обертання з п'єзоелектричними актуаторами і сенсорами при вимушених осесиметричних коливаннях з частотою, близької до резонансної. Враховуються деформації поперечного зсуву, інерція повороту, а також залежність комплексних модулів матеріалів від температури дисипативного розігріву. На прикладі циліндричної оболонки з п'єзо-сенсорами, один край якої жорстко, а другий шарнірно закріплені, досліджено вплив деформації поперечного зсуву і залежності електромеханічних властивостей пасивного і п'єзоактивного матеріалів від температури на частотні залежності амплітуди прогинів згинальної моди осесиметричних коливань, електричного показника сенсора і температури дисипативного розігріву. На основі критерія оцінки довговічності коливальної системи по допустимим значенням максимальної температури вібророзігріву досліджено залежність терміну її працездатності від амплітуди поверхневого тиску і параметрів теплообміну.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Представлені уточнена постановка і методологія розв'язування задачі про електро-термомеханічну поведінку і прогнозування довговічності непружних оболонок обертання з п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами при осесиметричних резонансних коливаннях. Враховуються деформації поперечного зсуву, інерція повороту і температурна залежність електромеханічних властивостей матеріалів. Чисельно для циліндричної оболонки з п'єзосенсором досліджено вплив указаних факторів на частотні залежності амплітуд прогинів, температури вібророзігріву і електричного показника сенсора. На основі критерію оцінки локальної довговічності за допустимими значеннями максимальної температури розігріву досліджено залежність часу працездатності системи від екстремальних амплітуд механічного навантаження і умов тепловідведення з її поверхні.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: резонансна вібрація, дисипативний розігрів, непружний матеріал, п'єзоелектричні приводи, датчики.

1. Булат А.Ф., Дырда В.И., Звягильский Е.Л., Маркелов А.Е. Прочность и разрушение резиновых деталей технологических машин. – Киев: Наук. думка, 2010. – 440 с.
2. Григоренко Я.М., Влайков А.Т., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
3. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
4. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
5. Нестеренко Н.П., Червинко О.П., Сенченко И.К. Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых композитов при нормальном нагружении // Вест. нац. техн. ун-та «ХПИ» – 2002. – № 9. – С. 3 – 8.
6. Шинкар А.И., Китайгородский Ф.Б., Борцевская С.К. Решение линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: в кн. «Алгоритмы и программы решения задач механики твердого деформируемого тела». – Киев: Наук. думка. – 1976. – С. 157 – 170.
7. Blaguenon A., Lene F., Bernadou M. Active control a beam a piezoceramic element // Smart Mater. Struct. – 1999. – 8. – P. 116 – 124.
8. Bolkisev A.M., Karlash V.L., Shul'ga N.A. Temperature Dependence of the Properties of Piezoelectric Ceramics // Sov. App. Mech. – 1984. – 20. – N 7. – P. 650 – 653.
9. Gabbert U., Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems. – Dordrecht: Kluwer Acad., 2001. – 384 p.
10. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I. Electromechanical Vibrations and Dissipative Heating of Viscoelastic Thin-Walled Piezoelements // Int. App. Mech. – 2001. – 37, N 2. – P. 182 – 212.
11. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I. Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // Int. App. Mech. – 2017. – 53, N 1. – P. 6 – 58.
12. Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V. Parametric Vibrations of a Hinged Thermoviscoelastic Rectangular Piezoelectric Plate with Shear Strains and Dissipative Heating Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 3. – P. 334 – 339.
13. Katunin A. Criticality of the Self-Heating Effect in Polymers and Polymer Matrix Composites during Fatigue and Their Application in Non – Destructive Testing // Polymers. – 2018. – 11. – P. 1 – 19.
14. Katunin A., Fidali M. Fatigue and thermal failure of polymeric composites subjected to cyclic heating // Adv. Compos. Lett. – 2012. – 21. – P. 64 – 69.
15. Kirichok I.F. Resonant Axisymmetric Vibrations and Vibrational Heating of a Viscoelastic Cylindrical Shell with Piezolayers Subject to Electromechanical Excitation // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 5. – P. 567 – 573.
16. Kirichok I.F., Cherniuchok O.A. Forced Vibration and Self-Heating of a Flexible Viscoelastic Beam with Piezoelectric Sensor and Actuator with Account of Shear Strain // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 5. – P. 568 – 576.
17. Kirichok I.F., Cherniuchok O.A. Axisymmetrical Vibrations and Vibroheating of a Thermoviscoelastic Cylindrical Shell with Piezoactuators and Shear Deformation Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 3. – P. 340 – 346.
18. Kirichok I.F., Cherniuchok O.A. Forced Vibration and Self-Heating of a Thermoviscoelastic Cylindrical Shear Compliant Shell with Piezoelectric Actuators and Sensors // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 6. – P. 723 – 731.
19. Tzou H.S. Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht: Kluwer Acad., 1993. – 400 p.
20. Tzou H.S., Bergman L.A. Dynamics and Control of Distributed Systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 374 p.

Надійшла 05.05.2021

Затверджена до друку 09.12.2021