

А. В. Плащинська

**ЩОДО ВИЗНАЧЕННЯ ТРИВАЛОСТІ СТАДІЙ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ
ТРИЩИН ВТОМИ В ТОНКИХ АЛЮМІНІЄВИХ ПЛАСТИНАХ
З КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРУЖЕНЬ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: creep@inmech.kiev.ua*

Abstract. The solution of a problem on prediction of kinetics of fatigue cracks propagation is obtained for the thin isotropic plate of finite size with the stress concentrators under uniaxial asymmetrical tension-compression. The central circular unnotched and notched holes are considered as the stress concentrators. The solution is obtained analytically based on the fatigue crack growth model which combines the fracture mechanics and the continuous damage mechanics concepts. It is assumed that the fatigue damage accumulation is the cause of the crack motion. Duration of crack initiation period and the dependence of the fatigue cracks length on loading cycles number are calculated. The calculation results using this model agree well with those obtained by the experiments.

Key words: thin isotropic finite plates, central circular hole, uniaxial tension-compression, asymmetrical cyclical loading, fatigue crack growth kinetics.

Вступ.

Аналіз катастрофічних руйнувань елементів конструкцій авіаційного, енергетичного і транспортного устаткування показав, що причиною таких руйнувань є процес зародження і розвитку тріщин втоми. Місцями зародження втомних тріщин є різного роду технологічні і конструктивні концентратори напружень. Проблема підвищення надійності і довговічності конструкцій особливо актуальна для області багатоциклової втоми, коли руйнування не супроводжується накопиченням макроскопічних пластичних деформацій, є крихким і відбувається практично миттєво.

Переважає більшість методів дослідження процесу руйнування внаслідок втоми будується на основі концепції Паріса [15, 16], де як узагальнюючу характеристику вибрано кінетичну діаграму руйнування від втоми. Відповідні рівняння отримані в результаті обробки великого обсягу експериментальних даних і містять емпіричні коефіцієнти, що залежать від властивостей матеріалу, навколишнього середовища і умов навантаження. Однак, емпірична природа більшості існуючих моделей розповсюдження тріщин втоми не дозволяє узагальнювати значення коефіцієнтів моделей, знайдених для обраної геометрії і схеми навантаження зразка з тріщиною, на елементи конструкцій і на зразки іншої геометрії і інші схеми навантаження. Практично не розробленими залишаються також аналітичні методи визначення тривалості інкубаційної стадії розповсюдження тріщини втоми, та методи оцінки втомної довговічності твердих тіл з тріщинами.

З огляду на аналіз результатів опублікованих досліджень [11, 17] більш перспективним для розв'язування задач руйнування внаслідок втоми твердих тіл з тріщинами може бути підхід, який об'єднує силову концепцію нелінійної механіки тріщин і концепцію механіки неперервного пошкодження [1, 2]. Модель розповсюдження тріщини втоми, яка побудована в роботі [8] для нескінченної пластини при симетричному циклічному навантаженні, використана в подальшому для оцінки впливу концентрації напружень, пластичності матеріалу, асиметрії циклу напружень [9].

У даній роботі в рамках цього методу розв'язуються задачі прогнозування тривалості інкубаційної стадії, кінетики розповсюдження тріщини втоми і втомної довговічності пластин з концентраторами напружень у вигляді гладкого кругового отвору та кругового отвору з надрізами.

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо процес руйнування внаслідок втоми тонких ізотропних пластин скінченних розмірів з концентраторами напружень (рис. 1) при одновісному асиметричному розтягу – стиску. Пластини висотою h , шириною w містять внутрішні концентратори напружень у вигляді гладкого кругового отвору діаметром $2r$ (рис. 1, *a*) та

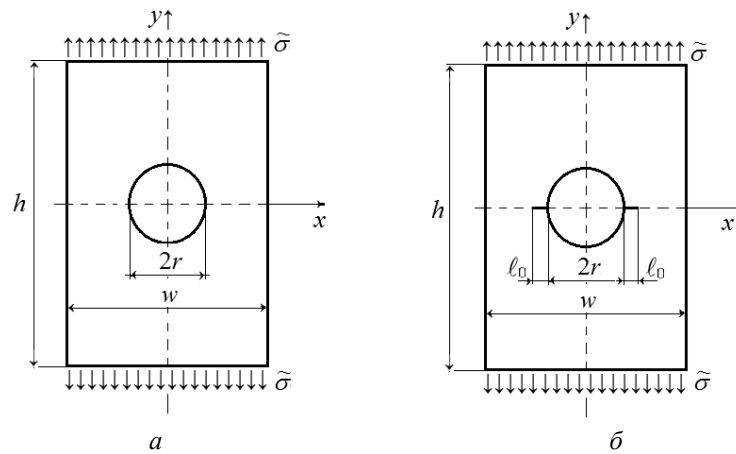


Рис. 1

кругового отвору діаметром $2r$ з двома бічними надрізами (рис. 1, *б*) довжиною l_0 . Пластини піддаються дії прикладеного по краях пластин одновісного циклічного напруження $\tilde{\sigma}$, що змінюється за асиметричним циклом

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi n) \quad (\sigma_{\max} = (\sigma_m + \sigma_a) < \sigma_Y), \quad (1.1)$$

де σ_m – значення середнього напруження циклу; σ_a – значення амплітуди циклічного напруження; σ_Y – межа течії матеріалу; n – число циклів навантаження або дискретний час ($n = ft$); t – час; f – частота навантаження. Береги тріщин та поверхні гладких концентраторів напружень вільні від навантажень.

У рівнянні (1.1) прийнято, що значення σ_a не залежить від дискретного часу n (стаціонарний режим) та прикладається з частотою $f \geq 10$ Гц, а максимальне напруження в циклі σ_{\max} не перевищує межі течії матеріалу σ_Y (багатоциклова втома). У цьому випадку основний масив пластин деформується лінійно-пружно, а руйнування від втоми є квазікрихким. Процес руйнування від втоми пластин з концентраторами напружень складається з інкубаційної стадії, стадії розповсюдження тріщини втоми та моменту остаточного руйнування, що відповідає моменту розділу пластини на частини.

Застосовуючи концепцію еквівалентних напружень [3, 7], які дозволяють звести асиметричний цикл навантаження до еквівалентного за кількістю циклів до руйнування n_R симетричного циклу, умови навантаження (1.1) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(n) &= \sigma_{a,\text{eqv}} \sin(2\pi n); \\ \sigma_{a,\text{eqv}} &< \sigma_Y, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де еквівалентні напруження $\sigma_{a,\text{eqv}}$ задаються співвідношенням [3]

$$\sigma_{a,\text{eqv}} = \left[\cos\left(\frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B}\right) \right]^{-\eta} \sigma_a, \quad (1.3)$$

σ_B – межа короткочасної міцності при розтягу; η коефіцієнт чутливості матеріалу пластини до асиметрії циклу навантаження при одновісному розтягу – стиску.

Протягом інкубаційної стадії в пластинах з гладкими концентраторами напружень зароджуються макротріщини, а в пластинах з існуючими або тріщинами, які виникли, формуються умови для початку їх руху. Протягом стадії розповсюдження тріщини втоми реалізується ділянка стабільного розповсюдження тріщини з постійною швидкістю та ділянка динамічного розповсюдження тріщини, коли швидкість збільшується. Момент остаточного руйнування пластини характеризує довговічність пластини з тріщиною при втомі.

Задача полягає в прогнозуванні тривалості інкубаційної стадії, кінетики росту тріщин втоми та довговічності тонких ізотропних пластин скінченних розмірів з концентраторами напружень при одновісному асиметричному розтягу – стиску.

Система вирішальних рівнянь для розв'язку поставлених задач, побудована виходячи зі спільного розгляду силової концепції механіки тріщин і концепції механіки неперервного пошкодження в роботі [9], має вигляд

$$(a) \begin{cases} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{xx})_{\text{eqv}}}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\tau}_{yx})_{\text{eqv}}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial(\tilde{\tau}_{xy})_{\text{eqv}}}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{yy})_{\text{eqv}}}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

$$(b) \frac{\partial^2(\tilde{\sigma}_{xx})_{\text{eqv}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\tilde{\sigma}_{yy})_{\text{eqv}}}{\partial x^2} - \nu \left[\frac{\partial^2(\tilde{\sigma}_{xx})_{\text{eqv}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\tilde{\sigma}_{yy})_{\text{eqv}}}{\partial y^2} \right] = 2(1+\nu) \frac{\partial^2(\tilde{\tau}_{yx})_{\text{eqv}}}{\partial x \partial y};$$

$$(c) \begin{cases} (\tilde{\sigma}_{xx})_{\text{eqv}}(n) \cos(\nu, x) = 0; & x = \pm \frac{w}{2}; \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}; \\ (\tilde{\sigma}_{yy})_{\text{eqv}}(n) \cos(\nu, y) = \tilde{\sigma}_{\text{eqv}}(n); & y = \pm \frac{h}{2}; \quad = \frac{w}{2} \leq x \leq \frac{w}{2}; \\ (\tilde{\sigma}_{yy})_{\text{eqv}}(n) \cos(\nu, y) = 0; & y = 0; \quad -d_0 \leq x \leq d_0; \quad 0 < n \leq n_*; \\ (\tilde{\sigma}_{yy})_{\text{eqv}}(n) \cos(\nu, y) = 0; & y = 0; \quad -d(n) \leq x \leq d(n); \quad n > n_*; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \frac{\partial \omega(x, n)}{\partial n} = D \left[\frac{(\Delta \tilde{\sigma})_{\text{eqv}}}{1 - \omega(x, n)} \right]^q; \\ \omega(x, n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0; \\ 1 & \text{при } n = n_*; \end{cases} \end{cases} \quad (1.4)$$

$$(e) \begin{cases} \max \{ \omega[d_0 + \lambda(d_0)] \} = 1; & 0 \leq n \leq n_*; \\ \max \{ \omega[d(n) + \lambda(d(n))] \} = 1; & n \geq n_* \end{cases}$$

та містить рівняння рівноваги (а), рівняння спільності в напруженнях (б), граничні умови для прямокутної пластини з концентратором напружень (с), еволюційне рівняння для функції пошкодження (д) з початковими і граничними умовами, а також умови локального руйнування (е).

Тут $(\tilde{\sigma}_{xx})_{\text{eqv}}$, $(\tilde{\sigma}_{yy})_{\text{eqv}}$, $(\tilde{\tau}_{yx})_{\text{eqv}}$ – компоненти тензора еквівалентних циклічних напружень в пластині з концентратором напружень в умовах навантаження (1.2); ν – коефіцієнт Пуассона; $\omega(x, n)$ – скалярний параметр пошкодження, що залежить від

координати x по фронту розповсюдження тріщини та числа циклів навантаження n ; n_* – тривалість інкубаційної стадії; $d_0, d(n)$ – початкове і поточне значення характерного розміру пластини з концентраторами напружень ($d_0 = r + \ell_0$; $d(n) = r + \ell(n)$); $\ell_0, \ell(n)$ – початкова і поточна довжина тріщини втомі; $\lambda(d_0), \lambda(d(n))$ – початкова і поточна довжина тонкої пластичної зони в вершині тріщини втомі; $(\Delta\tilde{\sigma})_{\text{eqv}}$ – розмах еквівалентних циклічних напружень; D, q – коефіцієнти, що характеризують інтенсивність накопичення втомних пошкоджень.

Застосувавши до системи (1.4) метод розв'язування, наведений в роботах [9], отримуємо двостадійну модель розповсюдження тріщини втомі в тонких пластинах з концентраторами напружень у вигляді системи

$$\begin{cases}
 (a) \quad n_* = \frac{1}{(1+q)D(\sigma_{\text{eqv}})_{\text{max}}^q}; \\
 (b) \quad n_* = \frac{1}{(1+q)D} \left[\frac{1}{\sigma_{a,\text{eqv}}} \right]^q \left[\frac{2\lambda(d_0)}{d_0} \right]^{\frac{q}{2}} f^{-q} \left(\frac{h}{w}, \frac{d_0}{w} \right); \\
 (c) \quad \frac{d\ell}{dn} = \left[1 + \frac{1}{q} \right] D \frac{1}{[2\lambda(d(n))]^{\frac{q}{2}-1}} \left\{ \sigma_{a,\text{eqv}} \sqrt{d(n)} f \left[\frac{h}{w}, \frac{d(n)}{w} \right] \right\}^q; \\
 (d) \quad n_R = n_* + n_\ell,
 \end{cases} \quad (1.5)$$

яка містить рівняння для оцінки тривалості інкубаційного періоду в пластинах з гладкими концентраторами напружень (а) та з тріщинами (б), рівняння для швидкості розповсюдження тріщин втомі (с), рівняння для розрахунку втомної довговічності пластини з тріщиною (д).

Тут $(\sigma_{\text{eqv}})_{\text{max}}$ – максимальне значення еквівалентних циклічних напружень в зоні гладкого концентратора напружень; n_R – довговічність при втомі пластини з тріщиною; n_ℓ – тривалість стадії розповсюдження тріщини втомі. Довжина циклічної пластичної зони в вершині тріщини втомі $\lambda(d(n))$ задається з урахуванням скінченних розмірів пластини співвідношенням

$$\lambda(d(n)) = \frac{1}{8} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{a,\text{eqv}}}{\sigma_Y} f \left[\frac{h}{w}, \frac{d(n)}{w} \right] \right\}^2, \quad (1.6)$$

де корегувальна функція $f(\cdot)$ враховує вплив скінченних розмірів пластини на кінетику розповсюдження тріщин втомі та застосована у вигляді

$$f \left[\frac{h}{w}; \frac{b}{a}; \frac{d(n)}{w} \right] = A_0 + A_1 \frac{d(n)}{w} + A_2 \left[\frac{d(n)}{w} \right]^2 + A_3 \left[\frac{d(n)}{w} \right]^3 + A_4 \left[\frac{d(n)}{w} \right]^4, \quad (1.7)$$

де A_0, A_1, \dots, A_4 – коефіцієнти поліномів, які залежать від геометрії пластини з концентраторами напружень.

§2. Розв'язування задач.

Розв'язуються задачі розрахунку тривалості інкубаційної стадії, кінетики розповсюдження тріщин втомі та втомної довговічності тонких ізотропних пластин скінченних розмірів з концентраторами напружень при одновісному асиметричному розтягу – стиску. Розглянуто концентратори напружень у вигляді гладких кругових та кругових отворів з бічними надрізами, що виходять з контуру отвору.

У табл. 1 наведено механічні властивості й матеріальні константи алюмінієвих сплавів 2024-Т3 і 7075-Т6, які визначалися за результатами обробки стандартних експериментів на гладких циліндричних зразках [10] за методикою, викладеною в роботі [6].

Таблиця 1

Сплав	σ_Y , МПа	σ_B , МПа	D , (МПа ^q ·цикл) ⁻¹	q	η
2024-Т3	353	489	$7,45 \cdot 10^{-26}$	8,28	2,37
7075-Т6	523	571	$3,33 \cdot 10^{-29}$	9,23	3,57

2.1. Пластини з одним центральним гладким круговим отвором. Розглянемо пластину на рис. 1, а, та визначимо тривалість інкубаційного періоду й стадії розповсюдження тріщини втоми.

Інкубаційна стадія. Протягом інкубаційної стадії відбувається накопичення пошкоджень, що завершується виникненням макроскопічної тріщини втоми в зоні дії максимального нормального напруження $(\sigma_{eqv})_{max}$.

$$(\sigma_{eqv})_{max} = K_t \left(1 - \frac{2r}{w}\right)^{-1} \sigma_{a,eqv}; \quad (2.1)$$

$$K_t = 3 - 3,14 \left(\frac{2r}{w}\right) + 3,667 \left(\frac{2r}{w}\right)^2 - 1,527 \left(\frac{2r}{w}\right)^3,$$

де K_t – коефіцієнт концентрації напружень в пластині скінченної ширини з круговим отвором, наведений у роботі [18]

Для визначення тривалості інкубаційної стадії n_* з рівнянь (1.5, а) і (2.1) отримуємо співвідношення

$$n_* = \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right)\right]^{\eta q}}{(1+q)D \left\{ \left[3 - 3,14 \left(\frac{2r}{w}\right) + 3,667 \left(\frac{2r}{w}\right)^2 - 1,527 \left(\frac{2r}{w}\right)^3 \right] \sigma_a \right\}^q \left(1 - \frac{2r}{w}\right)^q}, \quad (2.2)$$

де величина n_* відповідає моменту виникнення макроскопічної тріщини втоми в точці пластини з координатами $(r, 0)$.

Дослідимо вплив геометрії пластини, асиметрії циклу навантаження, прикладених напружень на тривалість інкубаційного періоду в пластинах з алюмінієвого сплаву 2024-Т3, характеристики якого наведено в табл. 1.

На рис. 2, а представлена залежність тривалості інкубаційної стадії n_* від величини відношення діаметра отвору до ширини пластини $2r/w$ при симетричному циклі

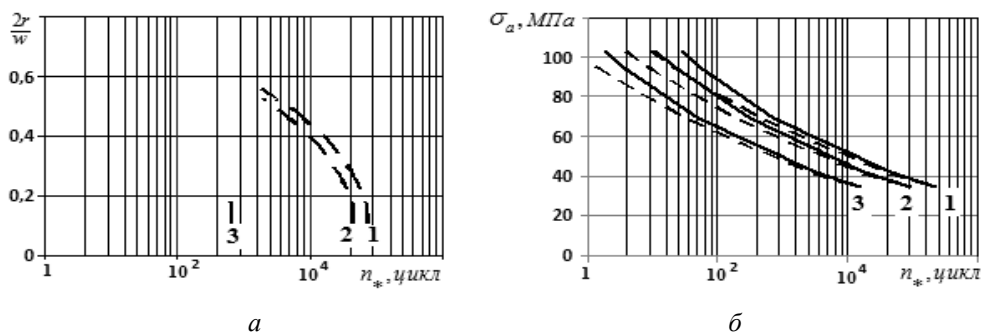


Рис. 2

навантаження $R = -1$ та напруженнях $\sigma_m = 0$; $\sigma_a = 69$ МПа (лінія 1) та при асиметричних циклах навантаження $R = 0$ та напруженнях $\sigma_m = \sigma_a = 69$ МПа (лінія 2); $R = 0,5$ та напруженнях $\sigma_m = 207$; $\sigma_a = 69$ МПа (лінія 3).

На рис. 2, б представлена залежність тривалості інкубаційної стадії від амплітуди циклічних напружень σ_a при одновісному асиметричному розтягу – стиску за параметром відношення діаметра отвору $2r$ до ширини пластини w та різних коефіцієнтах асиметрії циклу R ($R = -1$: $\sigma_a = 69$ МПа, $\sigma_m = 0$ МПа (—) і $R = 0$: $\sigma_m = \sigma_a = 69$ МПа (---) при $2r/w = 0,16$ (лінія 1); $0,3$ (лінія 2); $0,50$ (лінія 3)).

Стадія розповсюдження тріщин втоми. Вважаємо, що в момент часу $n = n_*$ на контурі отвору уздовж осі x виникають дві втомні тріщини нормального відриву довжиною $\ell_0 = 0,5$ мм кожна (рис. 1, б).

Для визначення числа циклів навантаження n в залежності від довжини тріщини втоми ℓ , інтегруючи рівняння (1.5, с), з урахуванням рівнянь (1.6), (1.7) одержуємо систему рівнянь

$$n = n_* + \left(\frac{\pi}{4}\right)^{q-2} \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B}\right)\right]^{2\eta}}{\left(1 + \frac{1}{q}\right) D(\sigma_Y)^{q-2}} \int_{r+\ell_0}^{r+\ell(n)} \frac{1}{\left[\sigma_a f\left(\frac{h}{w}; \frac{r}{w}; \frac{\ell(n)}{w}\right)\right]^2} d\ell; \quad (2.3)$$

$$n_\ell = n_R - n_*;$$

$$f\left[\frac{h}{w}, \frac{r}{w}, \frac{\ell(n)}{w}\right] = A_0 + A_1 \left[\frac{2\ell(n)}{w}\right] + A_2 \left[\frac{2\ell(n)}{w}\right]^2 + A_3 \left[\frac{2\ell(n)}{w}\right]^3,$$

де n_ℓ – тривалість стадії розповсюдження тріщини втоми; n_R – число циклів до руйнування.

Значення коефіцієнтів A_0, A_1, A_2, A_3 залежать від співвідношень $2r/w$ і $(r + \ell(n))/w$ та визначаються апроксимацією поліномами чисельних рішень [13].

Коригувальні функції для пластин з $h/w = 2,92$; $2r/w = 0,25$

$$f\left[\frac{h}{w}, \frac{r}{w}, \frac{\ell(n)}{w}\right] = -4,18 + 30,61 \left[\frac{2(r + \ell(n))}{w}\right] + 55,24 \left[\frac{2(r + \ell(n))}{w}\right]^2 + 32,997 \left[\frac{2(r + \ell(n))}{w}\right]^3; \quad (2.4)$$

для пластин з $h/w = 2,92$; $2r/w = 0,50$

$$f\left[\frac{h}{w}, \frac{r}{w}, \frac{\ell(n)}{w}\right] = -51,6 + 223,38 \left[\frac{2(r + \ell(n))}{w}\right] + 311,41 \left[\frac{2(r + \ell(n))}{w}\right]^2 + 145,1 \left[\frac{2(r + \ell(n))}{w}\right]^3. \quad (2.5)$$

Для пластин, в яких $2r/w = 0,33$ і $2r/w = 0,16$ застосовано корегувальні функції

$$F\left(\frac{b}{a}, \frac{a}{W}, \frac{a + \ell(n)}{W}\right) = \varphi\left(\frac{b}{a}, \frac{a + \ell(n)}{W}\right) \psi\left(\frac{b}{a}, \frac{a}{W}, \frac{a + \ell(n)}{W}\right)$$

для пластин скінченних розмірів з еліптичним отвором з півосями a і b , які наведені у роботі [4] при умові $a = b = r$.

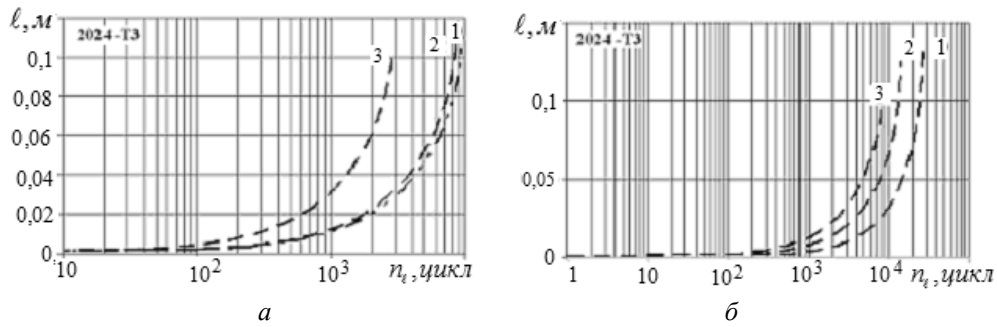


Рис. 3

Результати розрахунків залежності довжини ℓ тріщини втоми від числа циклів навантаження n , виконаних за рівняннями (2.3) для пластин з алюмінієвого сплаву 2024-Т3, представлені на рис. 3, а при фіксованому значенні відношення діаметра отвору до ширини пластини $2r/w = 0,33$ і при варіюванні величини коефіцієнта асиметрії R ($R = -1$; $\sigma_m = \sigma_a = 69$ МПа (лінія 1); $R = 0$: $\sigma_m = \sigma_a = 69$ МПа (лінія 2); $R = 0,5$: $\sigma_m = \sigma_a = 69$ МПа (лінія 3)).

На рис. 3, б – залежність довжини ℓ тріщини втоми від числа циклів навантаження n при фіксованому значенні коефіцієнта асиметрії $R = 0$ ($\sigma_m = \sigma_a = 69$ МПа) та при варіюванні величини відношення діаметра отвору до ширини пластини $2r/w = 0,16$ (лінія 1); 0,33 (лінія 2); 0,50 (лінія 3).

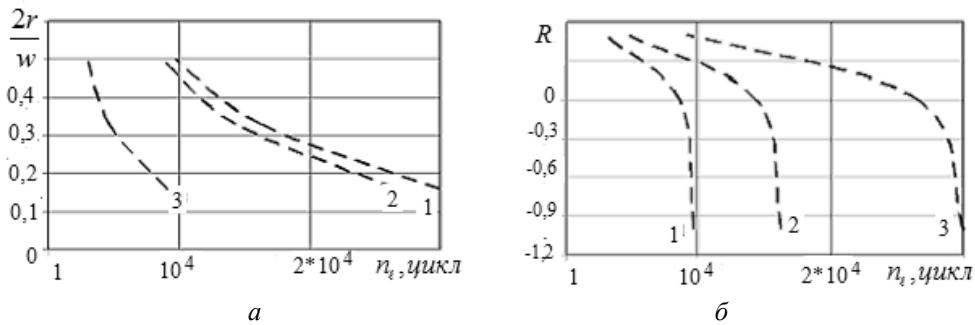


Рис. 4

На рис. 4, а приведено залежність тривалості стадії росту n_ℓ тріщини втоми від величини відношення діаметра отвору $2r$ до ширини пластини w при варіюванні величини коефіцієнта асиметрії R ($R = -1$: $\sigma_m = 0$; $\sigma_a = 69$ МПа (лінія 1); $R = 0$: $\sigma_m = \sigma_a = 69$ МПа (лінія 2); $R = 0,5$; $\sigma_m = 207$; $\sigma_a = 69$ МПа (лінія 3)).

На рис. 4, б наведено залежність тривалості стадії росту n_ℓ тріщини втоми від коефіцієнта асиметрії циклу напружень R ($\sigma_a = 69$ МПа; $\sigma_m = \text{var}$) шириною w , що містять центральний круговий отвір діаметром $2r$ при варіюванні $2r/w = 0,16$ (1); 0,33 (2); 0,50 (3).

Розв'язування тестової задачі. Визначимо тривалість інкубаційної стадії й стадію росту тріщини втоми у пластинах з гладким круговим отвором (рис. 1, а) шириною $w = 0,302$ м, висотою $h = 0,89$ м, радіусом $r = 0,0254$ м з алюмінієвого сплаву 2024-Т3. На рис. 5, а наведено експериментальні дані й результати розрахунків за співвідношенням (2.2) залежності тривалості інкубаційної стадії n_* від максимальних напружень σ_{\max} при симетричному циклі навантаження $R = -1$: $\sigma_{\max} = 276$ МПа (■ – розрахунок, □ – експеримент [5]) та асиметричному циклі $R = 0$: при напруженнях

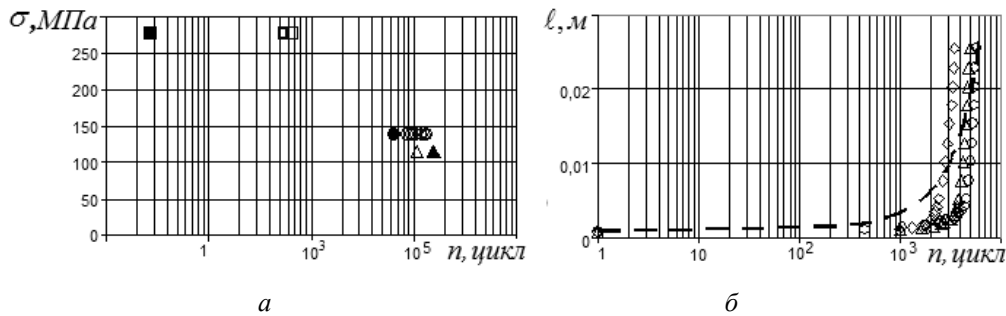


Рис. 5

$\sigma_{\max} = 138$ МПа (● – розрахунок, ○ – експеримент [5]) і $\sigma_{\max} = 115$ МПа (▲ – розрахунок, Δ – експеримент [6]).

Для розрахунку залежності довжини втомної тріщини ℓ від числа циклів навантаження n запишемо рівняння (2.3) у вигляді

$$n = n_* + \frac{\pi^{q-1}}{\left(1 + \frac{1}{q}\right) D (4\sigma_Y)^{q-2}} \int_{\ell_0}^{\ell} \frac{1}{(K_{\max,eff})^2} d\ell; \quad (2.6)$$

$$K_{\max,eff} \left(\sigma_{\max} \sqrt{\ell}, \frac{\ell}{r} \right) = 17,33 + 47,764 \left(\frac{\ell}{r} \right) - 16,445 \left(\frac{\ell}{r} \right)^2 + 1,8951 \left(\frac{\ell}{r} \right)^3,$$

де $K_{\max,eff}$ – максимальний коефіцієнт інтенсивності напружень у вершині тріщини втоми, визначений шляхом апроксимації чисельних рішень, наведених у роботі [6].

На рис. 5, б наведено результати розрахунку залежності довжини ℓ тріщини втоми, що виходить з контуру центрального кругового отвору, від числа циклів навантаження n в пластині з алюмінієвого сплаву 2024-T3. Результати розрахунків, виконані за рівнянням (2.6), представлені лінією (- -), а крапками нанесені експериментальні дані (◇, ○, Δ), що наведені в роботі [6].

2.2. Пластини з центральним круговим отвором і двома бічними надрізами.

Розв'язуються задачі розрахунку тривалості інкубаційної стадії, кінетики росту й тривалості стадії росту втомної тріщини в тонких ізотропних пластинах (рис. 1, б).

Інкубаційна стадія. Протягом інкубаційної стадії відбувається накопичення пошкоджень внаслідок втоми без зміни довжини тріщини. У цьому випадку тріщини на контурі отвору розкриваються, але не ростуть.

Для тривалості інкубаційної стадії n_* , незалежно від класу матеріалу, з рівняння (1.5, б) та з урахуванням (1.6) – (1.7) одержуємо рівняння

$$n_* = \frac{1}{(1+q)D \left(\frac{4\sigma_Y}{\pi} \right)^q}, \quad (2.7)$$

з якого видно, що тривалість інкубаційної стадії n_* залежить тільки від механічних властивостей матеріалу пластини.

У табл. 2 наведено характеристики механічних властивостей і значення тривалості інкубаційної стадії n_* , розрахованої за рівнянням (2.7).

Таблиця 2

Матеріал	σ_Y , МПа	D , (МПа ^q ·цикл.) ⁻¹	q	n_* , цикли
Сплав 2024-Т3	353	$7,45 \cdot 10^{-26}$	8,28	$1,56 \cdot 10^2$
Сплав 7075-Т6	523	$3,33 \cdot 10^{-29}$	9,23	$2,50 \cdot 10^1$
Сплав LC9СS	514	$7,20 \cdot 10^{-15}$	3,58	$2,51 \cdot 10^3$
Сплав EP- 718-6	700	$2,50 \cdot 10^{-25}$	6,76	$5,72 \cdot 10^3$

Стадія розповсюдження тріщин втоми. Вважається, що в момент часу $n = n_*$ тріщини, що виходять із контуру кругового отвору, починають розповсюджуватися уздовж осі x . Розглядаються тонкі ізотропні пластини скінченних розмірів, в яких $h/w = 2,92$; $2r = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м; $\ell_0 = 0,8 \cdot 10^{-3}$ м. Для даної пластини рівняння (2.3) мають вигляд

$$n = n_* + \left[\frac{\pi}{4} \right]^{q-2} \frac{\left[\cos \left(\frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right) \right]^{2\eta}}{\left(1 + \frac{1}{q} \right) D (\sigma_Y)^{q-2}} \int_{r+\ell_0}^{r+\ell(n)} \frac{1}{\left[\tilde{\sigma}_a f \left(\frac{h}{w}; \frac{r}{w}; \frac{r+\ell}{w} \right) \right]^2} d\ell; \quad (2.8)$$

$$f \left[\frac{h}{w}; \frac{r}{w}; \frac{r+\ell}{w} \right] = 0,96 + 1,18 \left[\frac{2(r+\ell)}{w} \right] - 4,49 \left[\frac{2(r+\ell)}{w} \right]^2 + 5,6 \left[\frac{2(r+\ell)}{w} \right]^3,$$

у якій коефіцієнти полінома, що задає функцію $f(\cdot)$, визначені за результатами апроксимації дискретних значень відношень коефіцієнтів інтенсивності напружень K/K_∞ , наведених у роботі [14].

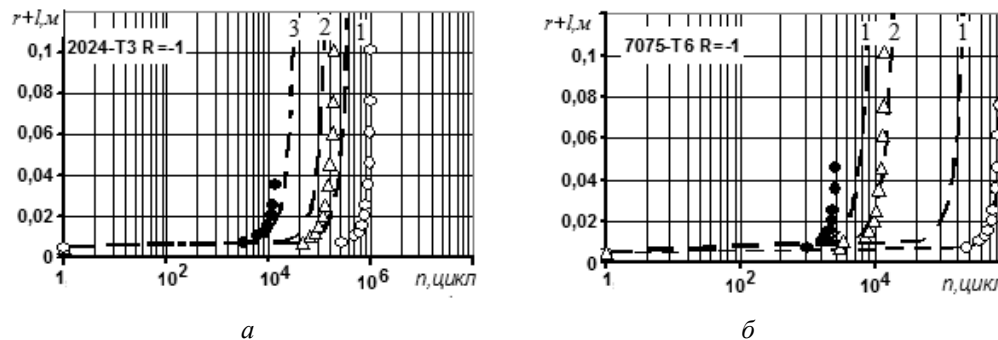


Рис. 6

На рис. 6 надано результати розрахунків залежності довжини тріщини втоми $r + \ell$ від числа циклів навантаження n при варіюванні величини амплітуди σ_a при симетричному циклі $R = -1$ ($\sigma_m = 0$) для пластин з алюмінієвих сплавів 2024-Т3 (рис. 6, а – $\sigma_a = 42$ МПа (лінія 1, \circ), 69 МПа (лінія 2, Δ); 138 МПа (лінія 3, \bullet)) і 7075-Т6 (рис. 6, б – $\sigma_a = 42$ МПа (лінія 1, \circ); 138 МПа (лінія 2, Δ); 207 МПа (лінія 3, \bullet)). Лініями (1, 2, 3) позначені результати розрахунків, крапками (\circ , \bullet , Δ) позначені експериментальні дані, що запозичені з роботи [12].

На рис. 7 представлено розрахункові й експериментальні [13] дані залежності довжини втомної тріщини $r + \ell$ від числа циклів навантаження n при віднульовому ($R = 0$) асиметричному циклі в алюмінієвих сплавах 2024-T3 (рис. 7, *a*) і 7075-T6 (рис. 7, *б*); $\sigma_a = \sigma_m = 34$ МПа (лінія 1, Δ), 69 МПа (лінія 2, \circ), 103 МПа (лінія 3, \diamond).

§3. Обговорення результатів.

У роботі отримано розв'язок задачі розрахунку тривалості інкубаційної стадії й кінетики росту тріщин втоми у тонких ізотропних пластинах скінченних розмірів з концентраторами напружень при одновісному симетричному і асиметричному розтягу-стиску. Як концентратори напружень розглянуті центральні гладкі кругові отвори та центральні кругові отвори з двома надрізами.

Аналіз отриманих результатів наведено на прикладі руйнування пластин із алюмінієвих сплавів 2024-T3 і 7075-T6, які застосовують в елементах конструкцій авіаційної й космічної техніки. Результати розрахунків за двохстадійною моделлю розповсюдження тріщини втоми порівняно з даними експериментів, запозичених з літератури.

У пластинах із центральним гладким круговим отвором тривалість інкубаційної стадії, як видно з наведених на рис. 2 результатів розрахунків, істотно залежить як від геометрії пластини, так і від ступеня асиметрії циклу напружень. Зокрема, зі збільшенням відношення $2r/w$ тривалість інкубаційної стадії n_* при фіксованому значенні коефіцієнта асиметрії R зменшується, також зменшується тривалість n_* зі збільшенням коефіцієнта асиметрії R при фіксованому значенні відношення $2r/w$ (рис 2, *a*). Зі збільшенням амплітуди циклу напружень σ_a величина n_* також знижується як при симетричному, так і при асиметричному циклі (рис. 2, *б*). При фіксованому значенні величини σ_a тривалість інкубаційної стадії знижується зі збільшенням відношення $2r/w$.

Процес розповсюдження тріщин втоми у пластинах із центральним гладким круговим отвором прискорюється зі збільшенням коефіцієнта асиметрії циклу напружень R при фіксованому значенні відношення $2r/w$ (рис 3, *a*), а тривалість стадії росту тріщини втоми n_ℓ та, відповідно, втомна довговічність n_R знижуються (рис. 4, *a*). Інтенсифікується процес росту тріщин втоми і при збільшенні відношення $2r/w$ при фіксованому значенні коефіцієнта асиметрії R (рис. 3, *б*). Тривалість стадії росту тріщини втоми n_ℓ і, відповідно, втомна довговічність n_R при цьому також знижуються (рис. 4, *б*).

В цілому отримано задовільне узгодження результатів розрахунку залежності тривалості інкубаційної стадії від максимального напруження циклу навантаження σ_{\max} (рис 5, *a*) в межах одного порядку. Найбільші розбіжності з експериментом (рис 5, *a*) отримано при високих рівнях навантаження $\sigma_{\max} = 276$ МПа. Це можливо пояснити тим, що за моделлю інкубаційний період закінчується, коли на контурі концентратора виконується умова руйнування $\omega(r, n_*) = 1$, а в наведених експеримен-

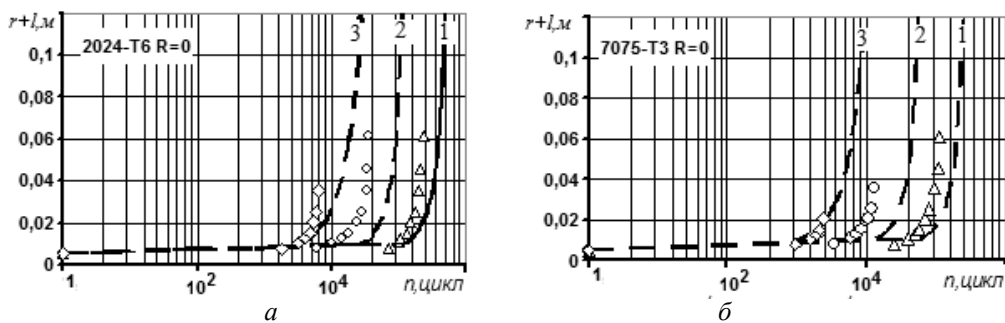


Рис. 7

тальних даних закінчення інкубаційної стадії фіксується в момент виникнення з контуру отвору тріщини довжиною $l_0 = 0,76 \cdot 10^{-3}$ м. Для залежності довжини тріщини втоми від числа циклів навантаження (рис. 5, б; 6, 7) найбільша розбіжність розрахунків з експериментом не перевищує 30%.

У пластинах із центральним круговим отвором та двома надрізами тривалість інкубаційної стадії n_* , як це видно зі структури рівняння (2.7), залежить тільки від механічних властивостей матеріалу і не залежить ні від рівня прикладених напружень, ні від початкової довжини тріщини втоми. Не впливають на величину n_* розміри пластини й характер концентратора напружень. Ця особливість рівняння (2.7) пов'язана з обраною моделлю пластичної зони (1.6), яка дозволила одержати рівняння моделі в аналітичному вигляді.

Висновки.

В роботі експериментально апробовано модель розповсюдження тріщин втоми, побудовану на сумісному розгляді концепцій механіки руйнування та механіки неперервного пошкодження. Визначено тривалість інкубаційної стадії та тривалість стадії розповсюдження тріщин втоми в тонких пластинах з центральним круговим отвором та круговим отвором з двома надрізами при варіюванні параметрів геометрії пластин та коефіцієнта асиметрії циклу напружень. Встановлено, що зі збільшенням відношення діаметра отвору до ширини пластини, коефіцієнта асиметрії циклу та максимального напруження циклу навантаження тривалість інкубаційної стадії і тривалість стадії розповсюдження тріщини та, відповідно, втомна довговічність пластини з тріщиною зменшуються. Отримано задовільне узгодження результатів розрахунків для пластин із алюмінієвих сплавів 2024-T3 і 7075-T6 з експериментальними даними.

Матеріальні константи моделі визначаються за результатами обробки даних стандартних випробувань гладких циліндричних зразків на статичний розтяг і на втому при симетричному і віднульовому циклах.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Р Е З Ю М Е . Отримано розв'язок задачі прогнозування кінетики розповсюдження тріщин втоми в тонких ізотропних пластинах скінченних розмірів з концентраторами напружень при одноісному асиметричному розтягу – стиску. Як концентратори напружень розглянуто центральні гладкий круговий отвір та круговий отвір з надрізами. Аналітичний розв'язок задачі отримано на основі моделі розповсюдження тріщини втоми, яка поєднує концепції механіки тріщин та механіки неперервного пошкодження. Вважається, що накопичення пошкоджень від втоми є рушійною силою розповсюдження тріщини втоми. Розраховано тривалість інкубаційного періоду тріщини та залежність довжини тріщини втоми від кількості циклів навантаження. Результати розрахунків за моделлю задовільно узгоджуються з експериментальними даними.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тонкі ізотропні пластини скінченних розмірів, центральний круговий отвір, одноісний розтяг – стиск, асиметричне циклічне навантаження, кінетика розповсюдження тріщини втоми.

1. Болотин В.В. Объединенные модели в механике разрушения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1984. – № 3. – С. 127 – 137.
2. Болотин В.В. Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1983. – № 4. – С. 153 – 160.
3. Голуб В.П., Пельх В.Н., Погребняк А.Д. Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении-сжатии методом эквивалентных напряжений // Вісн. нац. техн. ун-ту України «КПІ». Машинобудування. – 2010. – № 58. – С. 177 – 182.

4. *Саврук М.П.* Механика разрушения и прочность материалов: в 2-х томах. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 618 с.
5. *Crews Jr.J.H.* The role of stress concentrations in structural fatigue // Dissertation, Virginia Polytechnic Institute, N 69-41185, TMX-61969, May 1969. – 155 p.
6. *Crews J.H., White N.H.* Fatigue crack growth from a circular hole with and without high prior loading // NASA TN D-6899. – 1972. – 34 p.
7. *Golub V.P., Krizhanovskii V.I.* Evaluation of the limiting state of materials under an asymmetric multicycle load // Strength of Materials. – 1994. – **26**, N 4. – P. 243 – 252.
8. *Golub V.P., Plashchinskaya A.V.* Fatigue Fracture Model for Thin Isotropic Plates with Cracks in Axial Loading // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, N 7. – P. 520 – 529.
9. *Golub V.P., Plashchinskaya A.V.* On the Theory of Growth of Fatigue Mode I Cracks in Thin Isotropic Plates of Finite Size under Uniaxial Tension-Compression// Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 188 – 206.
10. *Grover H.J., Hyler W.S., Kuhn P., Landers C.B., Hawell F.N.* Axial-load fatigue properties of 24S-T and 75S-T aluminum alloys as determined in several laboratories // NASA TN 2928. – 1953. – 64 p.
11. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture / Failure Mechanics: On the Occasion of 50th Anniversary of Research (Review). II // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 3. – P. 239 – 295.
12. *Illg W., McEvily Jr.A.J.* The rate of fatigue-crack propagation for two aluminum alloys under completely reversed loading // NASA TN D-52. – 1959. – 19 p.
13. *Illg W., McEvily Jr.A.J.* The rate of fatigue-crack propagation for two aluminum alloys // NASA TN 4394. – 1958. – 47 p.
14. *Newman J.C., Jr.* An approved method of collocation for the stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries // NASA TN D-6376, 1971. – 45 p.
15. *Paris P.C., Erdogan F.* A critical analysis of crack propagation laws // Trans. ASME. Ser. D. J. of Basic Engng. – 1963. – **85**, N 4. – P. 528 – 534.
16. *Paris P.C., Gomez M.P., Anderson W.E.* A rational analytic theory of fatigue // The Trend in Engng. – 1961. – **13**, N 1. – P. 9 – 14.
17. *Pelykh V.N.* Solving Fatigue Problems for Combined Loading by Static Torsion and Reversed Cyclic Bending // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 1. – P. 103 – 109.
18. *Peterson R.E.* Stress Concentration Factors. Charts and Relations Useful in Making Strength Calculations for Machine Parts and Structural Elements. – New York: J. Wiley, 1974. – 302 p.

Надійшла 02.03.2021

Затверджена до друку 09.12.2021