А.О.Камінський, Є.Є.Курчаков, Ю.О.Чорноіван

ПРО КРАЙОВІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail:fract@inmech.kiev.ua

Abstract. The first fundamental problem for the nonlinear anisotropic body is stated in the covariant components of the displacement vector. The body contains an arbitrary crack with a prefracture zone ahead of its front. It is assumed that the body properties can be described by the tensor-linear governing equations. These equations are built from the proposed relations between the covariant components of the strain tensor and contravariant components of the stress tensor which are the generalized Reiner's relations. The equations are analyzed from the point of view of the first and second laws of thermodynamics. As a result, a connection between algebraic invariants of the stress and strain tensors from the governing equations is found. A system of equations is derived for the plane stress and discretized variables. A method is proposed to solve this system.

Key words: fracture mechanics, nonlinear anisotropic body, boundary problems.

Вступ.

Механіка руйнування нелінійного анізотропного тіла досі перебуває на стадії становлення [19, 22, 26]. Лише окремі роботи були присвячені розв'язанню крайових задач механіки руйнування нелінійного ортотропного тіла з тріщиною нормального відриву. Це, насамперед, роботи [7, 8, 28 – 30].

Сформулюємо в інваріантній формі першу основну задачу про рівновагу нелінійного анізотропного тіла з довільною тріщиною. При цьому врахуємо зону передруйнування біля фронту тріщини.

Докладно зупинимось на випадку плоского напруженого стану ортотропного тіла з тріщиною нормального відриву.

§1. Тензорно-лінійні визначальні рівняння.

Тіло називають лінійним чи нелінійним в залежності від того, лінійним чи нелінійним є для нього зв'язок компонент тензора деформацій з компонентами тензора напружень [15, 39].

Механіка нелінійного анізотропного тіла почала активно розвиватися в другій половині минулого століття. Особливий інтерес викликав випадок первісної анізотропії, яка виявляється за нескінченно малої деформації тіла з початкового стану [6]. Втім, важливішим питанням була побудова визначальних рівнянь [14]. На думку автора статті [14], визначальні рівняння належало будувати як такі, що узагальнюватимуть рівняння Генкі – Надаї [25, 34]. Ця ідея набула розвитку у роботі [13]. Автор, виходячи з фізичних міркувань, установив узагальнені девіатор деформацій і девіатор напружень, компоненти яких мали бути зв'язаними у тензорно-лінійних визначальних рівняннях. Згодом це було здійснено у роботах [10, 11]. Причому рівняння були побудовані в інваріантній формі.

Дотримуючись робіт [10, 11], віднесемо тіло до системи неортогональних криволінійних координат $x^1, x^2, x^3,$ визначеної фундаментальним метричним тензором $\boldsymbol{g}$ із коваріантними компонентами $g_{\lambda\mu}$ та контраваріантними компонентами $g^{\lambda\mu}$.

Відзначимо, що [9]

$$g^{\lambda\mu} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda\mu}}, \tag{1.1}$$

де $g = \det\left[g_{\lambda\mu}\right]$ – метричний визначник.

Обмежимось малими деформаціями. Як тензор деформацій $\boldsymbol{D}$, так і тензор напружень $\boldsymbol{S}$ є симетричними.

У визначальних рівняннях зв'яжемо коваріантні компоненти тензора деформацій $\boldsymbol{D}$ і контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$.

Уведемо тензори четвертого рангу $\boldsymbol{F}$ та $\boldsymbol{G}$, які характеризуватимуть анізотропію.

Вважатимемо, що початковий стан тіла збігається з його натуральним станом.

Також вважатимемо, що для околу початкового стану відомі залежності всіх коваріантних компонент тензора деформацій $\boldsymbol{D}$ від кожної контраваріантної компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$:

$$D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}(S^{\gamma\delta}). \tag{1.2}$$

Диференціюючи залежності (1.2) за компонентами $S^{\gamma\delta}$, одержуємо коваріантні компоненти тензора анізотропії $\boldsymbol{F}$:

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left.\frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial S^{\gamma\delta}}\right|_{S^{\gamma\delta}=0}. \tag{1.3}$$

Для вузького околу початкового стану матимемо лінійні визначальні рівняння, які пов'язуватимуть коваріантні компоненти тензора деформацій $\boldsymbol{D}$ з контраваріантними компонентами тензора напружень $\boldsymbol{S}$:

$$D_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta\gamma\delta}S^{\gamma\delta}. \tag{1.4}$$

Лінійні визначальні рівняння зв'язують контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$ з коваріантними компонентами тензора деформацій $\boldsymbol{D}$:

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta}D_{\gamma\delta}. \tag{1.5}$$

Підкреслимо, що тензори анізотропії $\boldsymbol{F}$ та $\boldsymbol{G}$ мають високу симетрію [32]. Тобто, у компонентах цих тензорів можна буде переставляти не лише індекси, які належать до будь-якої пари індексів, але й самі пари індексів.

Користуючись рівняннями (1.5), виведемо з рівнянь (1.4) контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$. Отже, коваріантні компоненти тензора анізотропії $\boldsymbol{F}$ та контраваріантні компоненти тензора анізотропії $\boldsymbol{G}$ мають задовольняти формули

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta}G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} = \delta_\gamma^\varepsilon\delta_\delta^\zeta \quad (\varepsilon,\zeta). \tag{1.6}$$

Над правими частинами формул (1.6) слід здійснити операцію симетрування за індексами ε,ζ.

Для символів Кронекера δ_η^ι маємо [9]:

$$\delta_\eta^\iota = \begin{cases} 1 \ (\eta = \iota); \\ 0 \ (\eta \ne \iota). \end{cases} \tag{1.7}$$

Якщо відомі коваріантні компоненти тензора анізотропії $\boldsymbol{F}$, то можна, беручи до уваги рівності (1.7), визначити за формулами (1.6) контраваріантні компоненти тензора анізотропії $\boldsymbol{G}$.

Для ізотропного тіла коваріантні компоненти тензора анізотропії $\boldsymbol{F}$ виражатимуться через дві константи (ν і ξ) [7]:

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \nu g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + \xi g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \ (\gamma, \delta). \tag{1.8}$$

Над правими частинами виразів (1.8) слід здійснити операцію симетрування за індексами γ, δ.

Виразимо контраваріантні компоненти тензора анізотропії $\boldsymbol{G}$ через константи ν і ξ.

Підставляючи до формул (1.6) компоненти $F_{\alpha\beta\gamma\delta}$ із виразів (1.8), дістаємо

$$\nu G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + \xi G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} = \delta_\gamma^\varepsilon \delta_\delta^\zeta \ (\varepsilon, \zeta). \tag{1.9}$$

Згортаючи формули (1.9) з компонентами $g^{\gamma\eta}$ і $g^{\delta\vartheta}$ та беручи до уваги рівності (1.7), встановлюємо

$$\nu G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} g_{\alpha\beta} g^{\eta\vartheta} + \xi G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} g_{\alpha.}^{\cdot\eta} g_{\beta.}^{\cdot\vartheta} = g^{\varepsilon\eta} g^{\zeta\vartheta} \ (\varepsilon, \zeta). \tag{1.10}$$

Для змішаних компонент фундаментального метричного тензора $\boldsymbol{g}$, а саме $g_{\gamma.}^{\cdot\iota}$, маємо [9]:

$$g_{\gamma.}^{\cdot\iota} = \begin{cases} 1 \ (\gamma = \iota); \\ 0 \ (\gamma \neq \iota). \end{cases} \tag{1.11}$$

Згідно з рівностями (1.11),

$$g_{\iota\kappa} g^{\iota\kappa} = 3 . \tag{1.12}$$

Беручи до уваги рівності (1.11), надаємо формулам (1.10) вигляду

$$\nu G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} g_{\alpha\beta} g^{\eta\vartheta} + \xi G^{\eta\vartheta\varepsilon\zeta} = g^{\varepsilon\eta} g^{\zeta\vartheta} \ (\varepsilon, \zeta). \tag{1.13}$$

Згортаючи формули (1.9) з компонентами $g^{\gamma\delta}$ та беручи до уваги рівності (1.12) і (1.7), встановлюємо

$$(3\nu + \xi) G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} g_{\alpha\beta} = g^{\varepsilon\zeta} . \tag{1.14}$$

Користуючись формулами (1.14), знаходимо

$$G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{3\nu + \xi} g^{\varepsilon\zeta} . \tag{1.15}$$

Звертаючись до формул (1.13) і (1.15), отримуємо

$$G^{\eta\vartheta\varepsilon\zeta} = \frac{1}{\xi} \left(g^{\varepsilon\eta} g^{\zeta\vartheta} - \frac{\nu}{3\nu + \xi} g^{\varepsilon\zeta} g^{\eta\vartheta} \right) \ (\varepsilon, \zeta). \tag{1.16}$$

Переписуємо вирази (1.16) так:

$$G^{\eta\vartheta\varepsilon\zeta} = \frac{1}{\xi} \left(g^{\eta\varepsilon} g^{\vartheta\zeta} - \frac{\nu}{3\nu + \xi} g^{\eta\vartheta} g^{\varepsilon\zeta} \right) \ (\varepsilon, \zeta). \tag{1.17}$$

Відповідно до виразів (1.17),

$$G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} = \frac{1}{\xi}\left(g^{\alpha\varepsilon} g^{\beta\zeta} - \frac{\nu}{3\nu + \xi} g^{\alpha\beta} g^{\varepsilon\zeta} \right) \; (\varepsilon,\, \zeta). \tag{1.18}$$

Для побудови визначальних рівнянь необхідно мати співвідношення між коваріантними компонентами тензора деформацій $\boldsymbol{D}$ і контраваріантними компонентами тензора напружень $\boldsymbol{S}$. Подаємо їх у вигляді

$$D_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta\gamma\delta}(\underset{0}{A} g^{\gamma\delta} + \underset{1}{A} S^{\gamma\delta} + \underset{2}{A} g_{\eta\vartheta} S^{\gamma\eta} S^{\delta\vartheta}), \tag{1.19}$$

де $\underset{0}{A}$, $\underset{1}{A}$, $\underset{2}{A}$ – деякі скаляри.

Звернемо увагу на те, що співвідношення (1.19) не мають тензорних аргументів третього і більш високих степенів. Пояснюється це тим, що зазначені аргументи не є незалежними, а можуть бути виражені через контраваріантні компоненти фундаментального метричного тензора $\boldsymbol{g}$ та тензорні аргументи першого і другого степенів [3].

Розкриваючи дужки, перетворюємо співвідношення (1.19) до вигляду

$$D_{\alpha\beta} = \underset{0}{A} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} + \underset{1}{A} F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} + \underset{2}{A} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\eta\vartheta} S^{\gamma\eta} S^{\delta\vartheta}. \tag{1.20}$$

Хай тіло є ізотропним.

Користуючись виразами (1.8) і рівністю (1.12), для членів $F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta}$ знаходимо:

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} = (3\nu + \xi)\, g_{\alpha\beta}. \tag{1.21}$$

Беручи до уваги вирази (1.8), для членів $F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta}$ одержуємо:

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} = \nu B g_{\alpha\beta} + \xi g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} S^{\gamma\delta}. \tag{1.22}$$

Тут

$$B = g_{\gamma\delta} S^{\gamma\delta}. \tag{1.23}$$

Використовуючи вирази (1.8), для членів $F_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\eta\vartheta} S^{\gamma\eta} S^{\delta\vartheta}$ отримуємо:

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\eta\vartheta} S^{\gamma\eta} S^{\delta\vartheta} = \nu \varGamma g_{\alpha\beta} + \xi g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} g_{\eta\vartheta} S^{\gamma\eta} S^{\delta\vartheta}. \tag{1.24}$$

Тут

$$\varGamma = g_{\gamma\delta} g_{\eta\vartheta} S^{\gamma\eta} S^{\delta\vartheta}. \tag{1.25}$$

Звертаючись до співвідношень (1.20) і формул (1.21), (1.22) та (1.24), встановлюємо

$$D_{\alpha\beta} = \underset{0}{\overset{*}{A}} g_{\alpha\beta} + \underset{1}{\overset{*}{A}} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} S^{\gamma\delta} + \underset{2}{\overset{*}{A}} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} g_{\eta\vartheta} S^{\gamma\eta} S^{\delta\vartheta}.$$

Тут

$$\underset{0}{\overset{*}{A}} = \underset{0}{A}(3\nu + \xi) + \underset{1}{A} \nu B + \underset{2}{A} \nu \varGamma; \quad \underset{1}{\overset{*}{A}} = \underset{1}{A} \xi; \quad \underset{2}{\overset{*}{A}} = \underset{2}{A} \xi.$$

Отже, маємо співвідношення Рейнера [39].

Зосередимось на співвідношеннях (1.20).

Останні складники у правих частинах співвідношень (1.20) відображають вторинні ефекти. Маємо на увазі ефект Пойнтінга [37, 38] і ефект Томсона [42]. Припустимо, що цими ефектами можна знехтувати. Отже, зважаючи на співвідношення (1.20), матимемо тензорно-лінійний зв’язок між коваріантними компонентами тензора деформацій $\boldsymbol{D}$ і контраваріантними компонентами тензора напружень $\boldsymbol{S}$:

$$D_{\alpha\beta} = \underset{0}{A} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} + \underset{1}{A} F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta}. \tag{1.26}$$

Зауважимо, що для початкового стану

$$\underset{0}{A}=0;\ \underset{1}{A}=1. \tag{1.27}$$

Спираючись на співвідношення (1.26), побудуємо тензорно-лінійні визначальні рівняння.

Застосовуючи метод Ріхтера [40], виразимо скаляри $\underset{0}{A}$, $\underset{1}{A}$ через алгебричні інваріанти тензора деформацій ***D*** і тензора напружень ***S***.

Згортаючи співвідношення (1.26) з компонентами $g^{\alpha\beta}$, одержуємо

$$E=\underset{0}{A}Z+\underset{1}{A}H. \tag{1.28}$$

Тут

$$E=g^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta};\ Z=F_{\alpha\beta\gamma\delta}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta};\ H=F_{\alpha\beta\gamma\delta}g^{\alpha\beta}S^{\gamma\delta}. \tag{1.29}$$

Нагадаємо, що в компонентах $F_{\alpha\beta\gamma\delta}$ можна переставляти пари індексів ($\alpha\beta$ і $\gamma\delta$).

Згортаючи співвідношення (1.26) з компонентами $S^{\alpha\beta}$ та зважаючи на третій із інваріантів (1.29), встановлюємо

$$I=\underset{0}{A}H+\underset{1}{A}K. \tag{1.30}$$

Тут

$$I=D_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta};\ K=F_{\alpha\beta\gamma\delta}S^{\alpha\beta}S^{\gamma\delta}. \tag{1.31}$$

Вважатимемо, що $Z\neq 0$.

Переписуємо рівняння (1.28) так:

$$\underset{0}{A}=\frac{E}{Z}-\underset{1}{A}\frac{H}{Z}. \tag{1.32}$$

Користуючись рівнянням (1.32), виводимо з рівняння (1.30) скаляр $\underset{0}{A}$. В результаті отримуємо рівняння першого степеня відносно скаляра $\underset{1}{A}$:

$$I-\frac{EH}{Z}=\underset{1}{A}\left(K-\frac{H^2}{Z}\right). \tag{1.33}$$

Розв'язок рівняння (1.33) буде таким:

$$\underset{1}{A}=\frac{I-\dfrac{EH}{Z}}{K-\dfrac{H^2}{Z}}. \tag{1.34}$$

Звертаючись до співвідношень (1.26), рівняння (1.32) і формули (1.34), дістаємо

$$D_{\alpha\beta}=\frac{E}{Z}F_{\alpha\beta\gamma\delta}g^{\gamma\delta}+\frac{I-\dfrac{EH}{Z}}{K-\dfrac{H^2}{Z}}\left(F_{\alpha\beta\gamma\delta}S^{\gamma\delta}-\frac{H}{Z}F_{\alpha\beta\gamma\delta}g^{\gamma\delta}\right). \tag{1.35}$$

Таким чином, маємо тензорно-лінійні визначальні рівняння, які пов'язують коваріантні компоненти тензора деформацій ***D*** з контраваріантними компонентами тензора напружень ***S***.

У рівняннях (1.35) фігурує інваріант I – сумісний алгебричний інваріант тензора деформацій ***D*** і тензора напружень ***S***. Це створює певні труднощі при оберненні даних рівнянь. Тому з них треба вивести інваріант I. Для цього виконаємо описані нижче перетворення.

Згортаючи співвідношення (1.26) з компонентами $G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta}$ та беручи до уваги формули (1.6) і рівності (1.7), одержуємо

$$G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} D_{\alpha\beta} = \underset{0}{A}\, g^{\varepsilon\zeta} + \underset{1}{A}\, S^{\varepsilon\zeta}. \tag{1.36}$$

Згортаючи співвідношення (1.36) з компонентами $D_{\varepsilon\zeta}$, здійснюючи заміну німих індексів та зважаючи на перший із інваріантів (1.29) і перший із інваріантів (1.31), встановлюємо

$$\varXi = \underset{0}{A}\, E + \underset{1}{A}\, I. \tag{1.37}$$

Тут

$$\varXi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \tag{1.38}$$

Користуючись рівняннями (1.37), (1.30) і (1.32), отримуємо неповне квадратне рівняння відносно скаляра $\underset{1}{A}$:

$$\varXi - \frac{E^2}{Z} = \underset{1}{A}^2 \left(K - \frac{H^2}{Z} \right). \tag{1.39}$$

Підкреслимо, що величини $\varXi - E^2/Z$ і $K - H^2/Z$ є додатними квадратичними формами. З огляду на це, розв'язок рівняння (1.39) буде таким:

$$\underset{1}{A} = \sqrt{\frac{\varXi - \dfrac{E^2}{Z}}{K - \dfrac{H^2}{Z}}}. \tag{1.40}$$

Зіставляючи формули (1.34) і (1.40), знаходимо

$$I - \frac{EH}{Z} = \sqrt{\left(\varXi - \frac{E^2}{Z} \right)\left(K - \frac{H^2}{Z} \right)}. \tag{1.41}$$

Беручи до уваги формулу (1.41), надаємо рівнянням (1.35) вигляду

$$D_{\alpha\beta} = \frac{E}{Z} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} + \sqrt{\frac{\varXi - \dfrac{E^2}{Z}}{K - \dfrac{H^2}{Z}}} \left(F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} - \frac{H}{Z} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} \right). \tag{1.42}$$

Згідно з рівняннями (1.42),

$$D_{\alpha\beta} - \frac{E}{Z} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} = \sqrt{\frac{\varXi - \dfrac{E^2}{Z}}{K - \dfrac{H^2}{Z}}} \left(F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} - \frac{H}{Z} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} \right). \tag{1.43}$$

Відзначимо, що різниці $D_{\alpha\beta} - (E/Z) F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta}$ і $F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} - (H/Z) F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta}$ є коваріантними компонентами узагальнених девіатора деформацій і девіатора напружень. Самі ці девіатори відомі за роботою [13].

Згортаючи компоненти $D_{\alpha\beta} - (E/Z) F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta}$ і $F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} - (H/Z) F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta}$ з компонентами $g^{\alpha\beta}$ та зважаючи на інваріанти (1.29), отримуємо нуль. Це означає, що названі компоненти лінійно залежні.

Введемо деяку скалярну змінну χ .

Нехай коваріантні компоненти тензора деформацій $\boldsymbol{D}$ будуть такими:

$$D_{\varepsilon\zeta} = F_{\varepsilon\zeta\eta\vartheta} g^{\eta\vartheta} \chi . \tag{1.44}$$

Згідно з формулами (1.44), зважаючи на другий із інваріантів (1.29), для першого із інваріантів (1.29) матимемо:

$$E = Z\chi. \tag{1.45}$$

Відповідно до формул (1.44), а також формул (1.6) і рівностей (1.7), зважаючи на другий із інваріантів (1.29), для інваріанта (1.38) матимемо:

$$\Xi = Z\chi^2. \tag{1.46}$$

Беручи до уваги формули (1.44) і (1.45), для компонент $D_{\alpha\beta} - (E/Z) F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta}$ встановлюємо:

$$D_{\alpha\beta} - \frac{E}{Z} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} = 0. \tag{1.47}$$

А враховуючи формули (1.45) і (1.46), для величини $\Xi - E^2/Z$ отримуємо:

$$\Xi - \frac{E^2}{Z} = 0. \tag{1.48}$$

Зазначимо, що рівність (1.48) можна вважати наслідком рівностей (1.47).

Отже, компоненти $D_{\alpha\beta} - (E/Z) F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta}$ і величина $\Xi - E^2/Z$ не залежать від коваріантних компонент тензора деформацій $\boldsymbol{D}$, для яких справедливі формули (1.44).

Нехай контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$ будуть такими:

$$S^{\varepsilon\zeta} = g^{\varepsilon\zeta} \chi. \tag{1.49}$$

Згідно з формулами (1.49), зважаючи на другий із інваріантів (1.29), для третього із інваріантів (1.29) матимемо:

$$H = Z\chi. \tag{1.50}$$

Відповідно до формул (1.49), зважаючи на другий із інваріантів (1.29), для другого із інваріантів (1.31) матимемо:

$$K = Z\chi^2. \tag{1.51}$$

Застосовуючи формули (1.49) і (1.50), для компонент $F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} - (H/Z) F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta}$ встановлюємо:

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} - \frac{H}{Z} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} = 0. \tag{1.52}$$

А беручи до уваги формули (1.50) і (1.51), для величини $K - H^2/Z$ отримуємо:

$$K - \frac{H^2}{Z} = 0. \tag{1.53}$$

Зазначимо, що рівність (1.53) можна вважати за наслідок рівностей (1.52).

Отже, компоненти $F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} - (H/Z) F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta}$ і величина $K - H^2/Z$ не залежать від контраваріантних компонент тензора напружень $\boldsymbol{S}$, для яких справедливі формули (1.49).

Інваріанти Z , E , H , Ξ , K , а також величини $\Xi - E^2/Z$ і $K - H^2/Z$ мають виразний фізичний смисл.

Так, інваріант Z є константа, обернена до модуля об’ємної пружності.

Вважатимемо, що коваріантні компоненти тензора деформацій $\boldsymbol{D}$ і контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$ пов’язані між собою лінійно.

Отже, інваріанти E і H являють собою зміну об'єму елемента тіла.

Виходить, величини E^2/Z і H^2/Z являтимуть собою (з точністю до $1/2$) енергію, що йде на зміну об'єму елемента тіла.

Далі, інваріанти Ξ і K являють собою (з точністю до $1/2$) енергію деформації елемента тіла.

Значить, величини $\Xi - E^2/Z$ і $K - H^2/Z$ являтимуть собою (з точністю до $1/2$) енергію деформації елемента тіла без зміни його об'єму. До речі, ця фізична інтерпретація величин $\Xi - E^2/Z$ і $K - H^2/Z$ ідентична фізичній інтерпретації інтенсивностей деформацій і напружень, наданій в роботі [17].

Встановимо рівняння, зворотні до рівнянь (1.43).

Переписуємо рівняння (1.43) у вигляді

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta}S^{\gamma\delta} - \frac{H}{Z}F_{\alpha\beta\gamma\delta}g^{\gamma\delta} = \sqrt{\frac{K - \dfrac{H^2}{Z}}{\Xi - \dfrac{E^2}{Z}}}\left(D_{\alpha\beta} - \frac{E}{Z}F_{\alpha\beta\gamma\delta}g^{\gamma\delta}\right). \tag{1.54}$$

Згортаючи рівняння (1.54) з компонентами $G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta}$ та враховуючи формули (1.6) і рівності (1.7), отримуємо

$$S^{\varepsilon\zeta} - \frac{H}{Z}g^{\varepsilon\zeta} = \sqrt{\frac{K - \dfrac{H^2}{Z}}{\Xi - \dfrac{E^2}{Z}}}\left(G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta}D_{\alpha\beta} - \frac{E}{Z}g^{\varepsilon\zeta}\right). \tag{1.55}$$

Надаємо рівнянням (1.55) вигляду

$$S^{\alpha\beta} - \frac{H}{Z}g^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{K - \dfrac{H^2}{Z}}{\Xi - \dfrac{E^2}{Z}}}\left(G^{\alpha\beta\gamma\delta}D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z}g^{\alpha\beta}\right). \tag{1.56}$$

Відповідно до рівнянь (1.56),

$$S^{\alpha\beta} = \frac{H}{Z}g^{\alpha\beta} + \sqrt{\frac{K - \dfrac{H^2}{Z}}{\Xi - \dfrac{E^2}{Z}}}\left(G^{\alpha\beta\gamma\delta}D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z}g^{\alpha\beta}\right). \tag{1.57}$$

Таким чином, маємо тензорно-лінійні визначальні рівняння, які зв'язують контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$ з коваріантними компонентами тензора деформацій $\boldsymbol{D}$.

§2. Тензорно-лінійні визначальні рівняння і закони термодинаміки.

У рівняннях (1.57) фігурують алгебричні інваріанти тензора напружень $\boldsymbol{S}$. Їх слід пов'язати з алгебричними інваріантами тензора деформацій $\boldsymbol{D}$.

Дотримуючись роботи [12], звернемось до першого та другого законів термодинаміки.

Застосуємо метод Гіббса – Гугенхейма [21, 23]. Як функцію стану виберемо внутрішню енергію *U*.

Відповідно до закону збереження енергії, приріст внутрішньої енергії *U* складається з приросту тепла *Q* і приросту енергії деформації *W*:

$$dU = dQ + dW. \tag{2.1}$$

Згідно з першим законом термодинаміки [24], для будь-якого процесу dU є повним диференціалом.

Згідно з другим законом термодинаміки [20], для оборотного процесу відношення приросту тепла Q до абсолютної температури T, тобто $(dQ)/T$, є повним диференціалом. Внаслідок цього, для ізотермічного процесу $(T = \text{const})$ dQ буде повним диференціалом. Але тоді, відповідно до лінійної диференціальної форми (2.1), dW також буде повним диференціалом.

Відзначимо, що dW дорівнює роботі компонент $S^{\alpha\beta}$ тензора напружень $\boldsymbol{S}$ на приростах компонент $D_{\alpha\beta}$ тензора деформацій $\boldsymbol{D}$:

$$dW = S^{\alpha\beta} dD_{\alpha\beta}. \tag{2.2}$$

Вносячи до формули (2.2) контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$ із рівнянь (1.57) та зважаючи на перший із інваріантів (1.29) і інваріант (1.38), встановлюємо

$$dW = \frac{H}{Z} dE + \sqrt{K - \frac{H^2}{Z}} d\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \tag{2.3}$$

Оскільки dW є повним диференціалом, маємо, відповідно до формули (2.3), таке диференціальне рівняння:

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial H}{\partial\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}} = \frac{\partial\sqrt{K - \frac{H^2}{Z}}}{\partial E}. \tag{2.4}$$

Можна припустити [18], що

$$H = E. \tag{2.5}$$

Згідно з формулою (2.5) загальний інтеграл рівняння (2.4) буде таким:

$$\sqrt{K - \frac{E^2}{Z}} = \varphi\left(\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}\right). \tag{2.6}$$

З'ясуємо, якою має бути функція $\varphi\left(\sqrt{\Xi - E^2/Z}\right)$.

Спираючись на формули (2.3) і (2.5), дістаємо

$$dW = \frac{E}{Z} dE + \sqrt{K - \frac{E^2}{Z}} d\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \tag{2.7}$$

Інтегруючи формулу (2.7), отримуємо

$$W = \frac{E^2}{2Z} + \int \sqrt{K - \frac{E^2}{Z}} d\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \tag{2.8}$$

Стала інтегрування дорівнює нулю, оскільки початковий стан тіла збігається з його натуральним станом.

В стані термодинамічної рівноваги енергія деформації W матиме мінімум. Тому друга варіація енергії деформації W має бути більшою за нуль.

Користуючись формулою (2.8), знаходимо

$$\delta^2 W = \frac{(\delta E)^2 + E\delta^2 E}{Z} + \delta\sqrt{K - \frac{E^2}{Z}} \delta\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}} + \sqrt{K - \frac{E^2}{Z}} \delta^2 \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \tag{2.9}$$

Для другої варіації інваріанта E (лінійного алгебричного інваріанта тензора деформацій $\boldsymbol{D}$) маємо:

$$\delta^2 E = 0. \tag{2.10}$$

Далі,

$$\delta\sqrt{K-\frac{E^2}{Z}} = \frac{d\sqrt{K-\frac{E^2}{Z}}}{d\sqrt{\varXi-\frac{E^2}{Z}}}\,\delta\sqrt{\varXi-\frac{E^2}{Z}}. \tag{2.11}$$

Використовуючи рівність (2.10) і формулу (2.11), перетворюємо формулу (2.9) до вигляду

$$\delta^2 W = \frac{(\delta E)^2}{Z} + \frac{d\sqrt{K-\frac{E^2}{Z}}}{d\sqrt{\varXi-\frac{E^2}{Z}}}\left(\delta\sqrt{\varXi-\frac{E^2}{Z}}\right)^2 + \sqrt{K-\frac{E^2}{Z}}\,\delta^2\sqrt{\varXi-\frac{E^2}{Z}}. \tag{2.12}$$

Очевидно, що

$$\delta^2\sqrt{\varXi-\frac{E^2}{Z}} = \frac{2\delta^2\left(\varXi-\frac{E^2}{Z}\right)\left(\varXi\frac{E^2}{Z}\right) - \left[\delta\left(\varXi-\frac{E^2}{Z}\right)\right]^2}{4\left(\varXi-\frac{E^2}{Z}\right)\sqrt{\varXi-\frac{E^2}{Z}}}. \tag{2.13}$$

Розглянемо чисельник дробу в формулі (2.13).

Введемо позначення

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}}{Z} \equiv \underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{2.14}$$

Зважаючи на перший із інваріантів (1.29) і інваріант (1.38) та враховуючи позначення (2.14), для величини $\varXi - E^2/Z$ знаходимо:

$$\varXi - \frac{E^2}{Z} = \underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \tag{2.15}$$

Користуючись формулою (2.15), одержуємо

$$\delta\left(\varXi-\frac{E^2}{Z}\right) = 2\underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta};\quad \delta^2\left(\varXi-\frac{E^2}{Z}\right) = 2\underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}\delta D_{\gamma\delta}. \tag{2.16}$$

Беручи до уваги формули (2.15) і (2.16), встановлюємо, що

$$2\delta^2\left(\varXi-\frac{E^2}{Z}\right)\left(\varXi-\frac{E^2}{Z}\right) - \left[\delta\left(\varXi-\frac{E^2}{Z}\right)\right]^2 =$$

$$= 4\left[(\underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}\delta D_{\gamma\delta})(\underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}) - (\underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta})^2\right]. \tag{2.17}$$

Квадратичні форми $\underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}\delta D_{\gamma\delta}$ і $\underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}$ є симетричними та додатними. Записуючи їх у канонічному вигляді та зважаючи на нерівність Коші – Шварца, дістаємо

$$(\underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}\delta D_{\gamma\delta})(\underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}) - (\underline{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta})^2 \geq 0. \tag{2.18}$$

Відповідно до формули (2.17) і нерівності (2.18), з формули (2.13) випливає, що

$$\delta^2\sqrt{\varXi-\frac{E^2}{Z}} \geq 0. \tag{2.19}$$

Зауважимо, що варіація інваріанта E і варіація величини $\sqrt{\Xi - E^2/Z}$ не можуть заразом дорівнювати нулю.

Будемо вважати, що варіація інваріанта E дорівнює нулю. При цьому формула (2.12) набуває вигляду

$$\delta^2 W = \frac{d\sqrt{K - \frac{E^2}{Z}}}{d\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}}\left(\delta\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}\right)^2 + \sqrt{K - \frac{E^2}{Z}}\,\delta^2\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \tag{2.20}$$

Якщо функція $\varphi(\sqrt{\Xi - E^2/Z})$ зростатиме, то, відповідно до формули (2.6), матимемо

$$\frac{d\sqrt{K - \frac{E^2}{Z}}}{d\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}} > 0.$$

У такому разі, спираючись на формули (2.19) і (2.20), доходимо висновку, що друга варіація енергії деформації W буде більшою за нуль.

Введемо такі позначення:

$$\sqrt{K - \frac{E^2}{Z}} \equiv \Phi;\ \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}} \equiv \Omega. \tag{2.21}$$

Беручи до уваги формули (2.5) і (2.6) та враховуючи друге із позначень (2.21), записуємо рівняння (1.57) у вигляді

$$S^{\alpha\beta} = \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} + \frac{\varphi(\Omega)}{\Omega}\left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta}\right). \tag{2.22}$$

Представимо функцію $\varphi(\Omega)$ так:

$$\varphi(\Omega) = \left[1 - \tilde{\varphi}(\Omega)\right]\Omega, \tag{2.23}$$

де $\tilde{\varphi}(\Omega)$ – зростаюча функція $\left(0 \le \tilde{\varphi}(\Omega) < 1\right)$.

Беручи до уваги формулу (2.23), надаємо рівнянням (2.22) вигляду

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega)\left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta}\right). \tag{2.24}$$

Хай тіло є ізотропним.

Згортаючи вирази (1.18) з компонентами $D_{\varepsilon\zeta}$, здійснюючи заміну німих індексів та зважаючи на перший із інваріантів (1.29), для членів $G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta}$ встановлюємо:

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} = \frac{1}{\xi}\left(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{\nu E}{3\nu + \xi} g^{\alpha\beta}\right). \tag{2.25}$$

Згортаючи вирази (1.21) з компонентами $g^{\alpha\beta}$ та беручи до уваги рівність (1.12), для другого із інваріантів (1.29) отримуємо:

$$Z = 3\left(3\nu + \xi\right). \tag{2.26}$$

Зауважимо, що константи ν і ξ зв'язані з константами Ламе (λ і μ) [16]:

$$-\nu = \frac{\lambda}{2\mu\left(3\lambda + 2\mu\right)};\ \ \xi = \frac{1}{2\mu}. \tag{2.27}$$

Згідно з формулами (2.26) і (2.27),

$$Z = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}.$$

Спираючись на цю формулу, для модуля об'ємної пружності, що дорівнює $1/Z$, знаходимо:

$$\frac{1}{Z} = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$

Остання формула відома з теорії пружності [16].

Згортаючи формули (2.25) з компонентами $D_{\alpha\beta}$ та зважаючи на перший із інваріантів (1.29), для інваріанта (1.38) одержуємо:

$$\Xi = \frac{1}{\xi}\left(O - \frac{\nu}{3\nu + \xi}E^2\right). \tag{2.28}$$

Тут

$$O = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \qquad 2.29)$$

Враховуючи друге із позначень (2.21) та беручи до уваги формули (2.26) і (2.28), для величини Ω встановлюємо:

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{\xi}\left(O - \frac{E^2}{3}\right)}. \tag{2.30}$$

Відповідно формулам (2.25) і (2.26) рівняння (2.24) набувають вигляду

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{\xi}\left[g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{\nu E}{3\nu + \xi} g^{\alpha\beta} - \tilde{\varphi}(\Omega)\left(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{3} g^{\alpha\beta}\right)\right]. \tag{2.31}$$

Рівняння (2.31) тотожні рівнянням Генкі – Надаї [25, 34] у вигляді, який був наданий їм Іллюшиним [5].

Залишається конкретизувати функцію $\tilde{\varphi}(\Omega)$ із рівнянь (2.24).

Встановимо функцію $\Phi = \varphi(\Omega)$ як зворотну до функції $\Omega = \omega(\Phi)$. Для цього виразимо функцію $\Omega = \omega(\Phi)$ через елементарні функції.

Нехай величина Φ належить до обмеженого замкненого інтервалу $[o, \tau]$ з частковими інтервалами $[o, \sigma]$ і $[\sigma, \tau]$ (рис. 1).

Нагадаємо, що початковий стан тіла збігається з його натуральним станом. Тому $\Omega\big|_{\Phi = o} = o$.

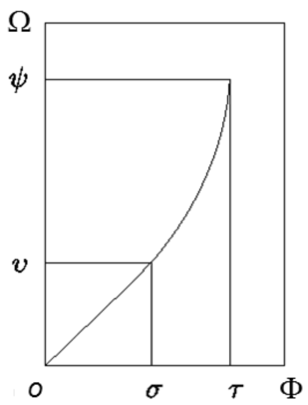


Рис. 1

Покладемо, що

$$\Omega\big|_{\Phi=\sigma} = \upsilon; \quad \Omega\big|_{\Phi=\tau} = \psi.$$

Отже, величина Ω належатиме до обмеженого замкненого інтервалу $[o, \psi]$ з частковими інтервалами $[o, \upsilon]$ і $[\upsilon, \psi]$ (рис. 1).

Дізнаємось, як у вузькому околі початкового стану пов'язані між собою інваріант (1.38) і другий із інваріантів (1.31).

Беручи до уваги рівняння (1.4), формули (1.6) і рівності (1.7), встановлюємо

$$\Xi = K.$$

При цьому, враховуючи позначення (2.21), матимемо

$$\Omega = \Phi.$$

Виражаючи функцію $\Omega = \omega(\Phi)$ через елементарні функції, будемо застосовувати рівності (1.27).

Нехай за умови, що величина Φ належить до часткового інтервалу $[o, \sigma]$, функція $\Omega = \omega(\Phi)$ є такою:

$$\Omega = \Phi. \tag{2.32}$$

За умови, що величина Ω належатиме до часткового інтервалу $[o, \upsilon]$, функція $\Phi = \varphi(\Omega)$ згідно з формулою (2.32) буде такою:

$$\Phi = \Omega. \tag{2.33}$$

Відповідно до формули (2.33),

$$\sigma = \upsilon. \tag{2.34}$$

Нехай за умови, що величина Φ належить до часткового інтервалу $[\sigma, \tau]$, функція $\Omega = \omega(\Phi)$ є такою:

$$\Omega = \Phi + a(\Phi - \sigma)^2 + b(\Phi - \sigma)^3. \tag{2.35}$$

Згідно з формулою (2.35) маємо неповне кубічне рівняння відносно зведеної величини $\Phi - \sigma + p$:

$$(\Phi - \sigma + p)^3 + q(\Phi - \sigma + p) + r = 0. \tag{2.36}$$

Тут

$$p = \frac{1}{3}\frac{a}{b};\ \ q = -\frac{1}{3}\frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{b};\ \ r = \frac{2}{27}\frac{a^3}{b^3} - \frac{1}{3}\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b}(\Omega - \sigma). \tag{2.37}$$

Беручи до уваги другу і третю із формул (2.37), отримуємо

$$\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 > 0.$$

Отже, рівняння (2.36) матиме, за Кардано, лише один дійсний корінь:

$$\Phi - \sigma + p = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{r}{2}}. \tag{2.38}$$

За умови, що величина Ω належатиме до часткового інтервалу $[\upsilon, \psi]$, функція $\Phi = \varphi(\Omega)$ згідно з формулою (2.38) і рівністю (2.34) буде

$$\Phi = \upsilon - p + \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{r}{2}}. \tag{2.39}$$

Спираючись на формули (2.23), (2.33) і (2.39), встановлюємо

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0 & (\Omega \in [o, \upsilon]); \\ \dfrac{\Omega - \upsilon + p - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{r}{2}}}{\Omega} & (\Omega \in [\upsilon, \psi]). \end{cases} \tag{2.40}$$

Нехай за умови, що величина Φ належить до часткового інтервалу $[\sigma, \tau]$, функція $\Omega = \omega(\Phi)$ є такою:

$$\Omega = \sigma + c\left\{\exp\left[d\left(\Phi - \sigma\right)\right] - 1\right\}. \tag{2.41}$$

Відповідно до формули (2.32),

$$\frac{d\Omega}{d\Phi} = 1. \tag{2.42}$$

Диференціюючи формулу (2.41) за величиною Φ, одержуємо

$$\frac{d\Omega}{d\Phi} = cd\exp\left[d\left(\Phi - \sigma\right)\right]. \tag{2.43}$$

Приймаючи, що $\Phi = \sigma$, та беручи до уваги рівність (2.42) і формулу (2.43), знаходимо

$$d = \frac{1}{c}. \tag{2.44}$$

Користуючись формулами (2.41) і (2.44), встановлюємо

$$\Omega = \sigma + c\left(\exp\frac{\Phi - \sigma}{c} - 1\right). \tag{2.45}$$

За умови, що величина Ω належатиме до часткового інтервалу $[\upsilon, \psi]$, функція $\Phi = \varphi(\Omega)$ згідно з формулою (2.45) і рівністю (2.34) буде:

$$\Phi = \upsilon + c\ln\left(\frac{\Omega - \upsilon}{c} + 1\right). \tag{2.46}$$

Спираючись на формули (2.23), (2.33) і (2.46), дістаємо

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0 & \left(\Omega \in [o, \upsilon]\right); \\ \dfrac{\Omega - \upsilon - c\ln\left(\dfrac{\Omega - \upsilon}{c} + 1\right)}{\Omega} & \left(\Omega \in [\upsilon, \psi]\right). \end{cases} \tag{2.47}$$

Згідно з формулою (2.23) та формулами (2.40) і (2.47), функція $\tilde{\varphi}(\Omega)$ відповідатиме умові термодинамічної рівноваги.

§3. Критерії нелінійності та міцності.

Якщо відома функція $\Phi = \varphi(\Omega)$, то можна сформулювати (в алгебричних інваріантах тензора деформацій $\boldsymbol{D}$) критерії нелінійності та міцності [12].

Застосовуючи формулу (2.6) та враховуючи друге із позначень (2.21), надаємо формулі (2.7) вигляду

$$dW = \frac{E}{Z}dE + \varphi(\Omega)d\Omega. \tag{3.1}$$

Поглянемо на складники у правій частині формули (3.1). Так, перший складник пов'язаний зі зміною об'єму елемента тіла. Отже, другий складник пов'язаний з деформацією елемента тіла без зміни його об'єму.

Вище було прийнято, що функція $\varphi(\Omega)$ є лінійною, якщо величина Ω менша за сталу υ або дорівнює їй, та нелінійною, якщо величина Ω більша за сталу υ. Внаслідок цього, зв'язок контраваріантних компонент тензора напружень $\boldsymbol{S}$ з коваріантними компонентами тензора деформацій $\boldsymbol{D}$ за рівняннями (2.22) стане нелінійним тоді, коли величина Ω перевищить сталу υ. Отже, критерій нелінійності можна записати так:

$$\Omega = \upsilon. \tag{3.2}$$

Хай при переході в нелінійний стан енергія, яка витрачається на деформацію елемента тіла без зміни його об'єму, буде Υ.

Для енергії Υ маємо:

$$\Upsilon = \int_{o}^{\upsilon} \varphi(\Omega)\, d\Omega. \tag{3.3}$$

Беручи до уваги формулу (2.33) та знаходячи визначений інтеграл у правій частині формули (3.3), отримуємо

$$\Upsilon = \frac{\upsilon^2}{2}.$$

Переходимо до критерію міцності.

Будемо виходити з того, що порушення міцності відбувається тоді, коли величина Ω зрівнюється зі сталою ψ. Отже, критерій міцності можна записати так:

$$\Omega = \psi. \tag{3.4}$$

Нехай при порушенні міцності енергія, яка витрачається на деформацію елемента тіла без зміни його об'єму, буде Ψ.

Для енергії Ψ маємо:

$$\Psi = \int_{o}^{\psi} \varphi(\Omega)\, d\Omega. \tag{3.5}$$

Користуючись формулами (2.33) і (2.46) та знаходячи визначений інтеграл у правій частині формули (3.5), отримуємо

$$\Psi = \upsilon\left(\psi - \frac{\upsilon}{2}\right) + c^2 \left\{ \left(\frac{\psi - \upsilon}{c} + 1 \right) \left[\ln\left(\frac{\psi - \upsilon}{c} + 1 \right) - 1 \right] + 1 \right\}.$$

Слід дещо зауважити щодо властивості сформульованих критеріїв.

Рівність (1.48) означає, що, згідно з другим із позначень (2.21), критеріям (3.2) та (3.4) не задовольнятимуть коваріантні компоненти тензора деформацій $\boldsymbol{D}$, для яких справедливі формули (1.44). В такому разі, елемент тіла не зможе ані перейти в нелінійний стан, ані зруйнуватися.

Якщо справедлива формула (2.30), то сформульовані критерії будуть тотожні критеріям Мізеса [33] та Мізеса – Генкі [25].

§4. Основні рівняння.

Поставимо крайову задачу про рівновагу нелінійного анізотропного тіла. Виконаємо постановку у коваріантних компонентах вектора переміщення $\boldsymbol{u}$. Як і у роботі [30], приділимо увагу першій основній задачі. На поверхні тіла задамо контраваріантні компоненти вектора напруження $\boldsymbol{P}$.

Для постановки крайової задачі використаємо тензорно-лінійні визначальні рівняння, які зв'язують контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$ з коваріантними компонентами тензора деформацій $\boldsymbol{D}$. Окрім того, звернемось до рівнянь рівноваги в контраваріантних компонентах тензора напружень $\boldsymbol{S}$ і до умов на поверхні тіла, які пов'язують контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$ з контраваріантними компонентами вектора напруження $\boldsymbol{P}$. Скористаємось також геометричними співвідношеннями між коваріантними компонентами тензора деформацій $\boldsymbol{D}$ і коваріантними компонентами вектора переміщення $\boldsymbol{u}$.

Рівняння рівноваги в контраваріантних компонентах тензора напружень $\boldsymbol{S}$ мають вигляд [15]

$$\nabla_\beta S^{\alpha\beta} = 0. \tag{4.1}$$

Тут

$$\nabla_\beta \cdot^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\sqrt{|g|}\cdot^{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2} g^{\alpha\zeta} \left(\frac{\partial g_{\zeta\beta}}{\partial x^\varepsilon} + \frac{\partial g_{\varepsilon\zeta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\varepsilon\beta}}{\partial x^\zeta} \right) \cdot^{\varepsilon\beta}. \tag{4.2}$$

Умови на поверхні тіла мають вигляд [15]

$$S^{\alpha\beta} n_\beta = P^\alpha, \tag{4.3}$$

де n_β – коваріантні компоненти одиничного вектора $\boldsymbol{n}$ зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

Геометричні співвідношення мають вигляд [15]

$$D_{\varepsilon\zeta} = \nabla_\zeta u_\varepsilon \left(\varepsilon, \zeta\right). \tag{4.4}$$

Тут

$$\nabla_\zeta \cdot_\varepsilon = \frac{\partial \cdot_\varepsilon}{\partial x^\zeta} - \frac{1}{2} g^{\iota\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\zeta}}{\partial x^\varepsilon} + \frac{\partial g_{\varepsilon\kappa}}{\partial x^\zeta} - \frac{\partial g_{\varepsilon\zeta}}{\partial x^\kappa} \right) \cdot_\iota . \tag{4.5}$$

Над правими частинами співвідношень (4.4) слід здійснити операцію симетрування за індексами ε, ζ .

Відповідно до співвідношень (4.4) перший із інваріантів (1.29) і інваріант (1.38) будуть:

$$E = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha ; \;\; \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\beta u_\alpha \nabla_\delta u_\gamma . \tag{4.6}$$

Вносячи до рівнянь (2.24) коваріантні компоненти тензора деформацій $\boldsymbol{D}$ із співвідношень (4.4), дістаємо

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\delta u_\gamma - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\delta u_\gamma - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \tag{4.7}$$

Підставляючи до рівнянь (4.1) контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$ із рівнянь (4.7), встановлюємо

$$\nabla_\beta \left[G^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\delta u_\gamma - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\delta u_\gamma - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right) \right] = 0. \tag{4.8}$$

Підставляючи до умов (4.3) контраваріантні компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$ із рівнянь (4.7), отримуємо

$$\left[G^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\delta u_\gamma - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\delta u_\gamma - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right) \right] n_\beta = P^\alpha. \tag{4.9}$$

Звичайно, рівняння (4.8) і умови (4.9) вельми складні, бо передбачають коваріантне диференціювання за довільною метрикою. Проте вони стають значно простішими у випадку ортогональних координат, для яких

$$g_{\lambda\mu} = 0 \;\; \left(\lambda \neq \mu\right). \tag{4.10}$$

Дійсно, відповідно до рівностей (4.10) формули (4.2) набувають вигляду

$$\nabla_\beta \cdot^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\sqrt{|g|} \cdot^{\alpha\beta} \right) + g^{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta} \cdot^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^\alpha} \cdot^{\beta\beta} \right), \tag{4.11}$$

а формули (4.5) – вигляду

$$\nabla_\zeta \cdot_\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\partial \cdot_\zeta}{\partial x^\zeta} - g^{\zeta\zeta} \dfrac{\partial g_{\zeta\zeta}}{\partial x^\zeta} \cdot_\zeta + \dfrac{1}{2} g^{\eta\eta} \dfrac{\partial g_{\zeta\zeta}}{\partial x^\eta} \cdot_\eta & \left(\varepsilon = \zeta\right); \\ \dfrac{\partial \cdot_\varepsilon}{\partial x^\zeta} - g^{\varepsilon\varepsilon} \dfrac{\partial g_{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x^\zeta} \cdot_\varepsilon \;\; \left(\varepsilon, \zeta\right) & \left(\varepsilon \neq \zeta\right). \end{cases} \tag{4.12}$$

Зазначимо, що інтегрування рівнянь (4.8) за умов (4.9) можна здійснити, застосовуючи метод послідовних наближень Іллюшина [5]. Для цього нелінійні члени в рівняннях (4.8) і нелінійні члени в умовах (4.9) буде потрібно перенести у праві частини.

Причому в першому наближенні їх слід прирівняти до нуля, а в кожному подальшому наближенні – обчислити за результатами попереднього наближення.

Зона передруйнування поблизу фронту тріщини буде врахована пізніше.

Нехай система координат $x^1, x^2, x^3,$ до якої віднесено тіло, є прямокутною системою Декарта. Значить [9],

$$g_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & (\lambda = \mu); \\ 0 & (\lambda \neq \mu). \end{cases} \tag{4.13}$$

Згідно з формулами (1.1) і рівностями (4.13),

$$g^{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & (\lambda = \mu); \\ 0 & (\lambda \neq \mu). \end{cases} \tag{4.14}$$

Відповідно до рівностей (4.14) другий із інваріантів (1.29) буде

$$Z = F_{1111} + F_{2222} + F_{3333} + 2\left(F_{1122} + F_{1133} + F_{2233}\right).$$

Вважатимемо, що компоненти $g_{\mu\mu}$ не залежать від координат x^1, x^2, x^3. При цьому формули (4.11) спрощуються до вигляду

$$\nabla_\beta \cdot^{\alpha\beta} = \frac{\partial \cdot^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}, \tag{4.15}$$

а формули (4.12) – до вигляду

$$\nabla_\zeta \cdot_\varepsilon = \frac{\partial \cdot_\varepsilon}{\partial x^\zeta}. \tag{4.16}$$

Згідно з формулами (4.16) інваріанти (4.6) будуть:

$$E = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}; \;\; \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta}. \tag{4.17}$$

Відповідно до формул (4.16) рівняння (4.7) набирають вигляду

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega)\left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta}\right). \tag{4.18}$$

Беручи до уваги формули (4.15) і (4.16), переписуємо рівняння (4.8) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega)\left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta}\right)\right] = 0. \tag{4.19}$$

Застосовуючи формули (4.16), переписуємо умови (4.9) у вигляді

$$\left[G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega)\left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta}\right)\right] n_\beta = P^\alpha. \tag{4.20}$$

Нехай тіло є ортотропним.

Вважатимемо, що головні напрямки збігаються з осями x^1, x^2, x^3.

Уведемо такі позначення:

$$\begin{gathered} G^{1111} \equiv \kappa^{aa}; \; G^{1122} \equiv \kappa^{ad}; \; G^{1133} \equiv \kappa^{af}; \\ G^{1212} \equiv \kappa^{bb}; \; G^{1313} \equiv \kappa^{cc}; \; G^{2222} \equiv \kappa^{dd}; \\ G^{2233} \equiv \kappa^{df}; \; G^{2323} \equiv \kappa^{ee}; \; G^{3333} \equiv \kappa^{ff}. \end{gathered} \tag{4.21}$$

Зупинимось на випадку плоского напруженого стану.

Нехай компоненти тензора напружень $\boldsymbol{S}$, які не дорівнюють нулю, лежать у площині $x^1 x^2$. Значить,

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \ \left(\alpha = 1, 2, \ \beta = 1, 2\right); \qquad (4.22)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \ \left(\alpha = 1, 2, \beta = 3; \ \alpha = 3, \beta = 1, 2; \ \alpha = 3, \beta = 3\right). \qquad (4.23)$$

Зрозуміло, що при цьому частинна похідна від компоненти u_3 за координатою x^3 не дорівнюватиме нулю.

Беручи до уваги рівності (4.14), для першого із інваріантів (4.17) одержуємо:

$$E = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \qquad (4.24)$$

Укажемо, що, згідно з рівняннями (4.18), рівностями (4.14), інваріантом (4.24) і формулами (4.22), частинні похідні від компонент u_1, u_2 за координатами x^1, x^2 та частинна похідна від компоненти u_3 за координатою x^3 будуть функціями координат x^1, x^2.

Нагадаємо, що $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$. Отже, спираючись на рівняння (4.18), відповідно до рівностей (4.14) і перших чотирьох із рівностей (4.23), матимемо

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \ \left(\gamma = 1, 2, \ \delta = 3; \ \gamma = 3, \ \delta = 1, 2\right). \qquad (4.25)$$

Беручи до уваги рівності (4.25) та враховуючи позначення (4.21), для другого із інваріантів (4.17) одержуємо:

$$\Xi = \kappa^{aa} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\kappa^{ad} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{dd} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{bb} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) +$$

$$+ \left(2\kappa^{af} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\kappa^{df} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{ff} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \qquad (4.26)$$

Звернемось до рівнянь (4.19). Беручи до уваги рівності (4.14) та зважаючи на інваріант (4.24) і враховуючи позначення (4.21), встановлюємо

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \kappa^{aa} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \kappa^{ad} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{af} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\kappa^{aa} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\kappa^{ad} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \left(\kappa^{af} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} + \\
+ \kappa^{bb} \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] = 0; \\
\kappa^{bb} \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] + \\
+ \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \kappa^{da} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \kappa^{dd} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{df} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\kappa^{da} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\kappa^{dd} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \left(\kappa^{df} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} = 0.
\end{gathered} \qquad (4.27)$$

Звернемось до умов (4.20). Беручи до уваги рівності (4.14) та зважаючи на інваріант (4.24) і враховуючи позначення (4.21), отримуємо

$$\left\{ \kappa^{aa} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \kappa^{ad} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \kappa^{af} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\kappa^{aa} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\kappa^{ad} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \left(\kappa^{af} - \frac{1}{Z} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\} n_1 +$$

$$+\kappa^{bb}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}-\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right]n_2=P^1;$$

$$\kappa^{bb}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}-\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right]n_1+ \tag{4.28}$$

$$+\left\{\kappa^{da}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\kappa^{dd}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\kappa^{df}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}-\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\kappa^{da}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\kappa^{dd}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\left(\kappa^{df}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]\right\}n_2=P^2.$$

Використаємо рівняння (4.18). Беручи до уваги рівності (4.14) та зважаючи на інваріант (4.24) і враховуючи позначення (4.21), для компоненти S^{33} тензора напружень $\boldsymbol{S}$ дістаємо:

$$S^{33}=\kappa^{fa}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\kappa^{fd}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\kappa^{ff}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}-$$

$$-\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\kappa^{fa}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\kappa^{fd}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\left(\kappa^{ff}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]. \tag{4.29}$$

Дорівнюючи до нуля праву частину рівняння (4.29), для частинної похідної від компоненти u_3 за координатою x^3 знаходимо:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x^3}=$$

$$=\frac{1}{\kappa^{ff}}\left\{\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\kappa^{fa}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\kappa^{fd}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\left(\kappa^{ff}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]-\kappa^{fa}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}-\kappa^{fd}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right\}. \tag{4.30}$$

Введемо ось такі позначення:

$$\kappa^{aa}-\frac{\kappa^{af}}{\kappa^{ff}}\kappa^{fa}\equiv\underline{\kappa}^{aa};\ \kappa^{ad}-\frac{\kappa^{af}}{\kappa^{ff}}\kappa^{fd}\equiv\underline{\kappa}^{ad};\ \kappa^{da}-\frac{\kappa^{df}}{\kappa^{ff}}\kappa^{fa}\equiv\underline{\kappa}^{da};\ \kappa^{dd}-\frac{\kappa^{df}}{\kappa^{ff}}\kappa^{fd}\equiv\underline{\kappa}^{dd};$$

$$1-\frac{\kappa^{af}}{\kappa^{ff}}\equiv\alpha;\ 1-\frac{\kappa^{df}}{\kappa^{ff}}\equiv\delta. \tag{4.31}$$

Підставляючи до рівнянь (4.27) частинну похідну від компоненти u_3 за координатою x^3 із виразу (4.30) та враховуючи позначення (4.31) і переносячи нелінійні члени в праві частини, встановлюємо

$$\underline{\kappa}^{aa}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1\partial x^1}+(\underline{\kappa}^{ad}+\kappa^{bb})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1\partial x^2}+\kappa^{bb}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2\partial x^2}=Q^1;$$

$$\kappa^{bb}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1\partial x^1}+(\kappa^{bb}+\underline{\kappa}^{da})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1\partial x^2}+\underline{\kappa}^{dd}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2\partial x^2}=Q^2. \tag{4.32}$$

Тут

$$Q^1=\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{aa}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{ad}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]\right\}+\kappa^{bb}\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right];$$

$$Q^2=\kappa^{bb}\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{da}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{dd}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\delta}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]\right\}. \tag{4.33}$$

Підставляючи до умов (4.28) частинну похідну від компоненти u_3 за координатою x^3 із виразу (4.30) та враховуючи позначення (4.31) і переносячи нелінійні члени в праві частини, отримуємо

$$\begin{aligned}
&\left(\underline{\kappa}^{aa}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\underline{\kappa}^{ad}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right)n_1+\kappa^{bb}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)n_2=P^1+R^1;\\
&\kappa^{bb}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)n_1+\left(\underline{\kappa}^{da}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\underline{\kappa}^{dd}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right)n_2=P^2+R^2.
\end{aligned}\tag{4.34}$$

Тут

$$\begin{aligned}
R^1&=\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{aa}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{ad}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]n_1+\kappa^{bb}\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)n_2;\\
R^2&=\kappa^{bb}\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)n_1+\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{da}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{dd}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\delta}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]n_2.
\end{aligned}\tag{4.35}$$

Торкнемось питання обчислення, зокрема, нормальних компонент тензора напружень $\boldsymbol{S}$.

Використаємо рівняння (4.18). Беручи до уваги рівності (4.14) та зважаючи на інваріант (4.24) і враховуючи позначення (4.21), для компонент S^{11}, S^{22} тензора напружень $\boldsymbol{S}$ дістаємо:

$$\begin{aligned}
&S^{11}=\kappa^{aa}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\kappa^{ad}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\kappa^{af}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}-\\
&-\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\kappa^{aa}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\kappa^{ad}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\left(\kappa^{af}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right];\\
&S^{22}=\kappa^{da}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\kappa^{dd}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\kappa^{df}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}-\\
&-\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\kappa^{da}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\kappa^{dd}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}+\left(\kappa^{df}-\frac{1}{Z}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right].
\end{aligned}\tag{4.36}$$

Вносячи до рівнянь (4.36) частинну похідну від компоненти u_3 за координатою x^3 із виразу (4.30) та враховуючи позначення (4.31), одержуємо

$$\begin{aligned}
S^{11}&=\underline{\kappa}^{aa}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\underline{\kappa}^{ad}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{aa}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{ad}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right];\\
S^{22}&=\underline{\kappa}^{da}\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\underline{\kappa}^{dd}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{da}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{dd}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\delta}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right].
\end{aligned}\tag{4.37}$$

Якщо відомі частинні похідні

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}\quad(\alpha=1,2;\ \beta=1,2;\ \alpha=3,\ \beta=3),$$

то за рівняннями (4.37) можна обчислити компоненти S^{11}, S^{22} тензора напружень $\boldsymbol{S}$.

§5. Модель зони передруйнування.

Численні експерименти свідчать, що біля фронту тріщини виникає зона передруйнування. Як правило, вона має вид вузької області, у якій спостерігаються мікроскопічні тріщини, пори та розшарування [31]. Згадану зону належить враховувати при постановці крайових задач механіки руйнування, що спричиняє чималі труднощі. Їх можна уникнути, використовуючи ту чи іншу модель зони передруйнування [2]. Наприклад, межі зони передруйнування можна уявити як поверхні розкритого розрізу, до яких прикладені протилежні вектори напруження [8, 27, 29]. При цьому компоненти векторів напруження в точках на протилежних поверхнях розрізу слід зв'язати, користуючись адекватними рівняннями стану, з компонентами вектора зміщення відносно одна одної цих точок. Розв'язуючи крайову задачу, слід стежити, щоб у точках на фронті зони передруйнування додержувався критерій міцності [27].

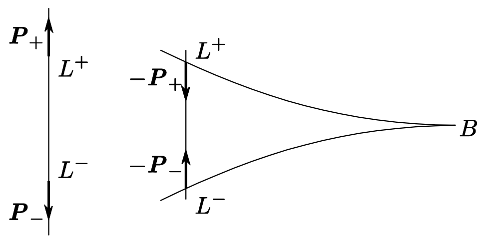
Побудові згаданих рівнянь стану присвячено багато робіт [36]. Висуваючи різноманітні гіпотези, автори будували, переважно, рівняння стану для зони передруйнування біля фронту тріщини нормального відриву та поперечного зсуву. Найбільш відомі роботи [35, 43]. В даних роботах отримано чимало важливих результатів, але у цілому питання побудови шуканих рівнянь залишилось відкритим.

Виходячи з положень загального характеру, побудуємо рівняння стану для зони передруйнування біля фронту довільної тріщини [1]. Здійснимо це аналітично. Сформулюємо також критерій локального руйнування.

Уявимо зону передруйнування у вигляді розкритого розрізу, до поверхонь якого приєднані прямолінійні елементи з нескінченно малою площею поперечного перетину.

Виділимо перед фронтом тріщини точку L, яка переходить внаслідок деформації тіла у точки L^+ і L^- на поверхнях розрізу.

Тепер видалимо прямолінійний елемент, приєднаний до поверхонь розрізу у точках L^+ і L^-. Потім до цього елемента прикладемо вектори напруження $\boldsymbol{P}_+$ і $\boldsymbol{P}_-$ (рис. 2, *а*), а до тіла – вектори напруження $-\boldsymbol{P}_+$ і $-\boldsymbol{P}_-$ (рис. 2, *б*). Кожні з цих векторів є протилежними.



а б

Рис. 2

Нехай відомі вектори $\overrightarrow{LL^+} \equiv \boldsymbol{u}^+$ та $\overrightarrow{LL^-} \equiv \boldsymbol{u}^-$, які зображають переміщення точок L^+ і L^- відносно точки L.

Утворимо вектор $\boldsymbol{v}^{+-}$ $(\boldsymbol{v}^{+-} = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-)$, який зображатиме зміщення точки L^+ відносно точки L^-, і вектор $\boldsymbol{v}^{-+}$ $(\boldsymbol{v}^{-+} = \boldsymbol{u}^- - \boldsymbol{u}^+)$, який зображатиме зміщення точки L^- відносно точки L^+.

Зосередимо увагу на видаленому елементі. Для описання стану цього елемента можна обрати вектор напруження $\boldsymbol{P}_+$ і вектор зміщення $\boldsymbol{v}^{+-}$ або вектор напруження $\boldsymbol{P}_-$ і вектор зміщення $\boldsymbol{v}^{-+}$. Обрані вектори будемо записуваним як $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{v}$.

Важливо підкреслити, що вектори напруження $\boldsymbol{P}$ і зміщення $\boldsymbol{v}$ є колінеарними та однаково спрямованими.

Нехай маємо координатний базис, складений з векторів $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, та взаємний координатний базис, складений з векторів $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$.

Укажемо, що [9]

$$\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = g_{\alpha\beta}; \ \boldsymbol{e}^\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = g^{\alpha\beta}. \tag{5.1}$$

До того ж,

$$\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = \delta_\alpha^\beta \tag{5.2}$$

Формули (5.2) містять символи Кронекера δ_α^β [10]:

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 \ (\alpha = \beta); \\ 0 \ (\alpha \neq \beta). \end{cases} \tag{5.3}$$

В подальшому будемо користатися правом заміни німих індексів.

Виражаємо вектор напруження $\boldsymbol{P}$ через його контраваріантні компоненти:

$$\boldsymbol{P} = P^\gamma \boldsymbol{e}_\gamma. \tag{5.4}$$

Для модуля $|\boldsymbol{P}| \equiv P$ вектора напруження $\boldsymbol{P}$ маємо:

$$P = \sqrt{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}}. \tag{5.5}$$

Згідно з формулою (5.4) і першими з формул (5.1), скалярний добуток $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}$ буде:

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} = g_{\alpha\beta} P^{\alpha} P^{\beta}. \tag{5.6}$$

Виражаємо вектор зміщення $\boldsymbol{v}$ через його коваріантні компоненти:

$$\boldsymbol{v} = v_{\gamma} \boldsymbol{e}^{\gamma}. \tag{5.7}$$

Для модуля $|\boldsymbol{v}| \equiv v$ вектора зміщення $\boldsymbol{v}$ маємо:

$$v = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}. \tag{5.8}$$

Згідно з формулою (5.7) і другими з формул (5.1), скалярний добуток $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ буде:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = g^{\alpha\beta} v_{\alpha} v_{\beta}. \tag{5.9}$$

У рівняннях стану зв'яжемо контраваріантні компоненти вектора напруження $\boldsymbol{P}$ і коваріантні компоненти вектора зміщення $\boldsymbol{v}$.

Оскільки вектор напруження $\boldsymbol{P}$ і вектор зміщення $\boldsymbol{v}$ є колінеарними, то

$$\boldsymbol{P} = X\boldsymbol{v}, \tag{5.10}$$

де X – деякий скаляр.

Складемо скалярні добутки $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}^{\alpha}$.

Згідно зі співвідношеннями (5.10),

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}^{\alpha} = X\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^{\alpha}. \tag{5.11}$$

Відповідно до формули (5.4), а також формул (5.2) і рівностей (5.3) скалярні добутки $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}^{\alpha}$ будуть:

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}^{\alpha} = P^{\alpha}. \tag{5.12}$$

Згідно з формулою (5.7) і другими з формул (5.1) скалярні добутки $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^{\alpha}$ будуть:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} v_{\beta}. \tag{5.13}$$

З урахуванням формул (5.12) і (5.13) співвідношення (5.11) набувають вигляду

$$P^{\alpha} = X g^{\alpha\beta} v_{\beta}. \tag{5.14}$$

Виразимо скаляр X через модулі P і v.

Згортаючи співвідношення (5.14) з компонентами v_{α}, встановлюємо

$$P^{\alpha} v_{\alpha} = X g^{\alpha\beta} v_{\alpha} v_{\beta}. \tag{5.15}$$

Зі згортки $P^{\alpha} v_{\alpha}$ слід вивести компоненти v_{α}. Заради цього будуть потрібні співвідношення, обернені до співвідношень (5.14).

Спираючись на співвідношення (5.14), дістаємо

$$g_{\alpha\gamma} P^{\gamma} = X g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} v_{\beta}. \tag{5.16}$$

Зауважимо, що згідно з першими з формул (5.1), формулами (5.2) і рівностями (5.3),

$$\boldsymbol{e}_{\alpha} = g_{\alpha\gamma} \boldsymbol{e}^{\gamma}. \tag{5.17}$$

Складемо скалярні добутки $\boldsymbol{e}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}^{\beta}$.

Відповідно до формул (5.17) і других з формул (5.1),

$$\boldsymbol{e}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}^{\beta} = g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}. \tag{5.18}$$

Враховуючи формули (5.18), надаємо формулам (5.2) вигляду

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \tag{5.19}$$

Застосовуючи формули (5.19) і рівності (5.3), записуємо співвідношення (5.16) у вигляді

$$g_{\alpha\gamma}P^{\gamma} = Xv_{\alpha}.$$

Звідси маємо

$$g_{\alpha\beta}P^{\beta} = Xv_{\alpha}. \tag{5.20}$$

Зі співвідношень (5.20) випливає

$$v_{\alpha} = \frac{g_{\alpha\beta}P^{\beta}}{X}. \tag{5.21}$$

З врахуванням співвідношень (5.21) згортка $P^{\alpha}v_{\alpha}$ буде

$$P^{\alpha}v_{\alpha} = \frac{g_{\alpha\beta}P^{\alpha}P^{\beta}}{X}. \tag{5.22}$$

Користуючись формулою (5.22), перетворюємо формулу (5.15) до вигляду

$$g_{\alpha\beta}P^{\alpha}P^{\beta} = X^{2}g^{\alpha\beta}v_{\alpha}v_{\beta}. \tag{5.23}$$

Оскільки вектор напруження ***P*** і вектор зміщення ***v*** не лише колінеарні, але й однаково спрямовані, то скаляр X має бути додатним.

Враховуючи формули (5.6), (5.5) і (5.9), (5.8) та беручи до уваги формулу (5.23), знаходимо

$$X = \frac{P}{v}. \tag{5.24}$$

Спираючись на співвідношення (5.14) і формулу (5.24), встановлюємо

$$P^{\alpha} = \frac{P}{v}g^{\alpha\beta}v_{\beta}. \tag{5.25}$$

Отже, маємо шукані рівняння.

Зв'язок контраваріантних компонент вектора напруження ***P*** з коваріантними компонентами вектора зміщення ***v*** за рівняннями (5.25) буде визначений, якщо відома функціональна залежність модуля P від модуля v (рис. 3).

Приймемо, що $P\big|_{v=o} = P_o$.

Дотримуючись роботи [45], вважатимемо, що функціональна залежність модуля P від модуля v є такою:

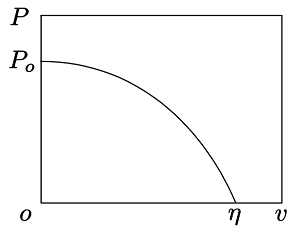


Рис. 3

$$P = P_o f(v), \tag{5.26}$$

де $f(v)$ – функція, яка спадає в обмеженому замкненому інтервалі $[o, \eta]$.

Матимемо на увазі, що значення $v = \eta$ модуля v має залежати від орієнтації видаленого елемента відносно тріщини.

Будемо вимагати, щоб функція $f(v)$ задовольняла таким умовам:

$$f(v)\big|_{v=o} = 1; \quad \frac{d}{dv}f(v)\bigg|_{v=o} = 0; \quad f(v)\big|_{v=\eta} = 0; \quad \frac{d}{dv}f(v)\bigg|_{v=\eta} = m. \tag{5.27}$$

Для багатьох застосувань функція $f(v)$ може бути апроксимована многочленом

$$f(v) = 1 - b_{k_1}v^{k_1} - b_{k_2}v^{k_2}, \tag{5.28}$$

де k_1, k_2 – цілі числа ($1 < k_1 < k_2$).

Підкреслимо, формула (5.28) вже задовольняє першій та другій із умов (5.27). З огляду на це, коефіцієнти b_{k_1} і b_{k_2} знайдемо, звертаючись до третьої та четвертої із умов (5.27).

Диференціюючи формулу (5.28) за модулем v, одержуємо

$$\frac{d}{dv} f(v) = -k_1 b_{k_1} v^{k_1 - 1} - k_2 b_{k_2} v^{k_2 - 1}. \tag{5.29}$$

Звертаючись до третьої та четвертої з умов (5.27), на основі формул (5.28) і (5.29) знаходимо

$$b_{k_1} = \frac{k_2 + m\eta}{(k_2 - k_1)\eta^{k_1}}; \; b_{k_2} = \frac{k_1 + m\eta}{(k_1 - k_2)\eta^{k_2}}. \tag{5.30}$$

Для формули (5.26) згідно з формулою (5.28) маємо

$$P = P_o(1 - b_{k_1} v^{k_1} - b_{k_2} v^{k_2}). \tag{5.31}$$

Користуючись рівняннями (5.25), формулою (5.31) і формулами (5.30), можна обчислити контраваріантні компоненти вектора напруження $\boldsymbol{P}$. А знаючи їх, буде просто знайти контраваріантні компоненти вектора напруження – $\boldsymbol{P}$.

Надаємо функції $f(v)$ вигляду

$$f(v) = 1 - \tilde{f}(v), \tag{5.32}$$

де $\tilde{f}(v)$ – функція, яка зростає в обмеженому замкненому інтервалі $[o, \eta]$.

Зіставляючи формули (5.28) і (5.32), побачимо, що

$$\tilde{f}(v) = b_{k_1} v^{k_1} + b_{k_2} v^{k_2}. \tag{5.33}$$

Беручи до уваги формули (5.26) і (5.32), перетворюємо рівняння (5.25) до вигляду

$$P^{\alpha} = P_o\left[1 - \tilde{f}(v)\right]\frac{g^{\alpha\beta} v_{\beta}}{v}. \tag{5.34}$$

Опишемо залежність значення $v = \eta$ модуля v від орієнтації видаленого елемента відносно тріщини.

Нехай маємо попарно перпендикулярні орти $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$, зведені до загального початку.

Вважатимемо, що орти $\boldsymbol{i}_1$ і $\boldsymbol{i}_2$ лежать у площині, перпендикулярній дотичній до фронту тріщини.

Кути між вектором зміщення $\boldsymbol{v}$ та ортами $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ позначимо так: $\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{i}_1} \equiv \vartheta_1$, $\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{i}_2} \equiv \vartheta_2$, $\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{i}_3} \equiv \vartheta_3$.

Введемо напрямні косинуси вектора зміщення $\boldsymbol{v}$: $\cos\vartheta_1$, $\cos\vartheta_2$, $\cos\vartheta_3$.

Відзначимо, що

$$\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 + \cos^2\vartheta_3 = 1. \tag{5.35}$$

Залежність сталої η від напрямних косинусів вектора зміщення $\boldsymbol{v}$ записуємо у вигляді

$$\eta = \sum_{p=1}^{3} \mathcal{K}_p \cos^2\vartheta_p + \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} \mathcal{K}_{pq} \cos^2\vartheta_p \cos^2\vartheta_q. \tag{5.36}$$

Припустимо, що коефіцієнти $\mathcal{K}_{pq}$ такі:

$$\mathcal{K}_{pq} = 0 \; (p = q); \; \mathcal{K}_{pq} = \mathcal{K}_{qp} \; (p \neq q). \tag{5.37}$$

Для тріщини нормального відриву та поперечного зсуву $\vartheta_3 = \pi/2$. Тому, згідно з рівностями (5.37), формула (5.36) буде

$$\eta = \mathcal{K}_1 \cos^2\vartheta_1 + \mathcal{K}_2 \cos^2\vartheta_2 + 2\mathcal{K}_{12} \cos^2\vartheta_1 \cos^2\vartheta_2. \tag{5.38}$$

При $\vartheta_3 = \pi/2$ з формули (5.35) маємо

$$\cos^2\vartheta_2 = 1 - \cos^2\vartheta_1. \tag{5.39}$$

Враховуючи формулу (5.39), надаємо формулі (5.38) вигляду

$$\eta = \mathcal{K}_2 + \left[\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2 + 2\mathcal{K}_{12}(1-\cos^2\vartheta_1)\right]\cos^2\vartheta_1. \tag{5.40}$$

Торкнемось питання обчислення коефіцієнтів $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ і $\mathcal{K}_{12}$.

Приймемо, що

$$\eta\big|_{\vartheta_1=\vartheta_1^{(1,0)},\,\vartheta_1^{(0,2)},\,\vartheta_1^{(1,2)}} = \eta^{(1,0)}, \eta^{(0,2)}, \eta^{(1,2)}. \tag{5.41}$$

Користуючись формулою (5.40), відповідно до умов (5.41) встановлюємо

$$\begin{aligned}
\eta^{(1,0)} &= \mathcal{K}_2 + \left[\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2 + 2\mathcal{K}_{12}(1-\cos^2\vartheta_1^{(1,0)})\right]\cos^2\vartheta_1^{(1,0)};\\
\eta^{(0,2)} &= \mathcal{K}_2 + \left[\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2 + 2\mathcal{K}_{12}(1-\cos^2\vartheta_1^{(0,2)})\right]\cos^2\vartheta_1^{(0,2)};\\
\eta^{(1,2)} &= \mathcal{K}_2 + \left[\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2 + 2\mathcal{K}_{12}(1-\cos^2\vartheta_1^{(1,2)})\right]\cos^2\vartheta_1^{(1,2)}.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Зупинимось на окремому випадку. Вважаючи, що $\vartheta_1^{(1,0)} = 0$, $\vartheta_1^{(0,2)} = \pi/2$, $\vartheta_1^{(1,2)} = \pi/4$, для формул (5.42) отримуємо

$$\eta^{(1,0)} = \mathcal{K}_1;\; \eta^{(0,2)} = \mathcal{K}_2;\; \eta^{(1,2)} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_{12}\right).$$

Звідси маємо

$$\mathcal{K}_1 = \eta^{(1,0)};\; \mathcal{K}_2 = \eta^{(0,2)};\; \mathcal{K}_{12} = 2\eta^{(1,2)} - \eta^{(1,0)} - \eta^{(0,2)}.$$

Зазначимо, що $\eta^{(1,0)}$, $\eta^{(0,2)}$ і $\eta^{(1,2)}$ підлягають визначенню в експерименті.

Сформулюємо критерій локального руйнування [1].

Підкреслимо, що при руйнуванні видаленого елемента модуль P вектора напруження $\boldsymbol{P}$ зрівнюється з нулем. Це відбувається тоді, коли модуль v вектора зміщення $\boldsymbol{v}$ зрівнюється зі сталою η. Таким чином, маємо критерій локального руйнування

$$v = \eta. \tag{5.43}$$

Критерій (5.43) є узагальненням критерію Веллса – Савіна – Камінського [41, 44], сформульованого для зони передруйнування біля фронту тріщини нормального відриву.

Визначимо енергію J, яка витрачається на руйнування видаленого елемента.

Будемо виходити з того, що приріст енергії J дорівнює роботі компонент P^α вектора напруження $\boldsymbol{P}$ на приростах компонент v_α вектора зміщення $\boldsymbol{v}$:

$$dJ = P^\alpha dv_\alpha. \tag{5.44}$$

Користуючись рівняннями (5.25), записуємо формулу (5.44) у вигляді

$$dJ = P\frac{g^{\alpha\beta}dv_\alpha v_\beta}{v}. \tag{5.45}$$

Враховуючи формули (5.9) і (5.8), переписуємо формулу (5.45):

$$dJ = Pdv. \tag{5.46}$$

Відповідно до формули (5.46),

$$J = \int_o^\eta Pdv. \tag{5.47}$$

Використовуючи формулу (5.31) та знаходячи визначений інтеграл у правій частині формули (5.47), матимемо

$$J = P_o\left(1 - \frac{b_{k_1}}{k_1+1}\eta^{k_1} - \frac{b_{k_2}}{k_2+1}\eta^{k_2}\right)\eta. \tag{5.48}$$

Беручи до уваги формули (5.30), надаємо формулі (5.48) вигляду

$$J = P_o\frac{\left(k_1k_2 - m\eta\right)\eta}{\left(k_1+1\right)\left(k_2+1\right)}. \tag{5.49}$$

Згідно з формулою (5.49), для будь-якого значення сталої η енергія J буде тим більшою, чим більшими будуть числа k_1, k_2 та чим меншим буде параметр m .

§6. Допоміжні рівняння.

Розглянемо прямокутне тіло з центральною тріщиною.

Поперечні осі симетрії тіла сумістимо з осями x^1, x^2 прямокутної системи координат x^1, x^2, x^3.

Зосередимось на випадку плоского напруженого стану. З огляду на це, розмір тіла вздовж осі x^3 вважатимемо нескінченно малим.

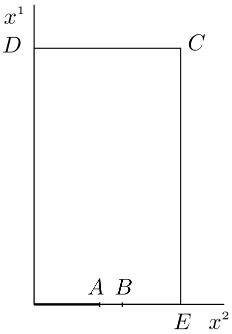


Рис. 4

Нехай компоненти векторів напруження $\boldsymbol{P}$ у протилежних точках на поверхнях тіла задані симетрично відносно осей x^1, x^2. Тому можна розглянути лише четверту частину тіла (рис. 4).

У подальшому буде потрібна ще одна група рівнянь для компонент вектора переміщення $\boldsymbol{u}$ [4].

З симетрії відносно осей x^1, x^2 випливає

$$\begin{aligned} &u_1(x^1, -x^2) - u_1(x^1, +x^2) = 0;\; u_2(x^1, -x^2) + u_2(x^1, +x^2) = 0;\\ &u_1(-x^1, x^2) + u_1(+x^1, x^2) = 0;\; u_2(-x^1, x^2) - u_2(+x^1, x^2) = 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Хай кінцями тріщини і розрізу будуть точки *A* і *B*.

З симетрії відносно осі x^2 для компоненти u_1 вектора переміщення $\boldsymbol{u}$ в точці *B* маємо:

$$u_1 = 0. \tag{6.2}$$

Дістанемо рівняння для компоненти u_2 вектора переміщення $\boldsymbol{u}$ в точці *B*.

Виділимо поблизу точки *B* точку *F* з координатами f^1, f^2.

Будемо вважати, що $u_2(x^1, x^2)$ – дійсна функція, яка має в околі точки *F* усі неперервні частинні похідні (до другого порядку включно) за координатами x^1, x^2.

Координати x^1, x^2 точки *B* записуємо у вигляді сум: $f^1 + \varepsilon^1, f^2 + \varepsilon^2$.

Складаємо кратний ряд Тейлора, упорядкований за степенями $\varepsilon^1, \varepsilon^2$:

$$u_2 = u_2\big|_{(f^1, f^2)} + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial u_2}{\partial x^\beta}\bigg|_{(f^1, f^2)}\varepsilon^\beta + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\bigg|_{(f^1, f^2)}\varepsilon^\beta\varepsilon^\gamma. \tag{6.3}$$

Відповідно до ряду (6.3) маємо

$$u_2 - u_2\big|_{(f^1, f^2)} - \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\bigg|_{(f^1, f^2)}\varepsilon^1 - \frac{\partial u_2}{\partial x^2}\bigg|_{(f^1, f^2)}\varepsilon^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1}\right|_{\left(f^1,f^2\right)} \varepsilon^1\varepsilon^1 + 2\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2}\right|_{\left(f^1,f^2\right)} \varepsilon^1\varepsilon^2 + \left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2}\right|_{\left(f^1,f^2\right)} \varepsilon^2\varepsilon^2\right) = 0. \tag{6.4}$$

Зазначимо, що $\angle DCE$ є лінійним кутом двогранного кута, утвореного верхньою та бічною поверхнями тіла.

Розглянемо точку C (вершину $\angle DCE$).

Дістанемо рівняння для компонент u_α $(\alpha = 1, 2)$ вектора переміщення $\boldsymbol{u}$ в точці C.

Виділимо поблизу точки C точку G з координатами g^1, g^2.

Будемо вважати, що $u_\alpha(x^1, x^2)$ – дійсні функції, які мають в околі точки G усі неперервні частинні похідні (до другого порядку включно) за координатами x^1, x^2.

Координати x^1, x^2 точки C записуємо у вигляді сум: $g^1 + \zeta^1, g^2 + \zeta^2$.

Складаємо кратні ряди Тейлора, розташовані за степенями ζ^1, ζ^2:

$$u_\alpha = u_\alpha\Big|_{\left(g^1,g^2\right)} + \sum_{\beta=1}^{2}\left.\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{\left(g^1,g^2\right)} \zeta^\beta + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{\gamma=1}^{2}\left.\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\right|_{\left(g^1,g^2\right)} \zeta^\beta\zeta^\gamma. \tag{6.5}$$

Згідно з рядами (6.5) маємо

$$u_\alpha - u_\alpha\Big|_{\left(g^1,g^2\right)} - \left.\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^1}\right|_{\left(g^1,g^2\right)} \zeta^1 - \left.\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^2}\right|_{\left(g^1,g^2\right)} \zeta^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^1 \partial x^1}\right|_{\left(g^1,g^2\right)} \zeta^1\zeta^1 + 2\left.\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^1 \partial x^2}\right|_{\left(g^1,g^2\right)} \zeta^1\zeta^2 + \left.\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2 \partial x^2}\right|_{\left(g^1,g^2\right)} \zeta^2\zeta^2\right) = 0. \tag{6.6}$$

Зауважимо, що задля простоти прирости $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ координат f^1, f^2 та прирости ζ^1, ζ^2 координат g^1, g^2 можна вважати однаковими за абсолютною величиною.

§7. Розв'язкові рівняння.

Дотримуючись роботи [30], дискретизуємо змінні.

Утворимо сітку координат $\underset{i}{x^1}$, $\underset{j}{x^2}$ (рис. 5):

$$\underset{i}{x^1} = (i-2)h \ \ (i = 1, \ldots, d); \qquad \underset{j}{x^2} = (j-2)h \ \ (j = 1, \ldots, e), \tag{7.1}$$

де h – крок сітки.

Введемо позначення

$$u_1\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right) \equiv y_s; \ u_2\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right) \equiv y_t. \tag{7.2}$$

Тут

$$s = 2\left[(i-1)e + j - b\right] + 1; \ t = 2\left[(i-1)e + j - b\right] + 2. \tag{7.3}$$

Розв'язкові рівняння відносно невідомих $y_1, \ldots, y_n$ дістанемо, звертаючись до рівнянь (4.32) і умов (4.34). Скористаємося також рівняннями (6.1), (6.2), (6.4) і (6.6).

Розписуючи умови (4.34) і формули (4.35), будемо використовувати значення компонент n_1, n_2

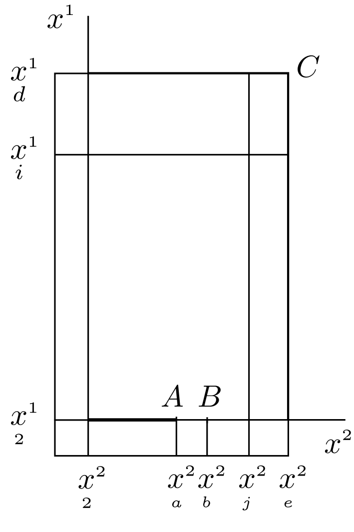


Рис. 5

одиничного вектора $\boldsymbol{n}$ зовнішньої нормалі до поверхонь тіла, а також до верхньої поверхні тріщини і розрізу. Зауважимо, що для верхньої поверхні тіла $n_1 = 1, n_2 = 0$, а для бічної поверхні тіла $n_1 = 0, n_2 = 1$. Для верхньої поверхні тріщини і розрізу $-n_1 = 1$, $n_2 = 0$.

Вважатимемо, що $-\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = \zeta^1 = \zeta^2 = h$.

Враховуючи позначення (7.2) й апроксимуючи (у точках $\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right)$ $(i = 2, \dots, d$, $j = 2, \dots, e)$) частинні похідні від компонент $u_\alpha (\alpha = 1, 2)$ за координатами $x^\beta (\beta = 1, 2)$ відповідними різницевими відношеннями, дістаємо n лінійних рівнянь з невідомими $y_1, \dots, y_n$:

$$
\begin{gathered}
A_{ss} y_s + A_{ss+2e} y_{s+2e} + A_{ss-2e} y_{s-2e} + \\
+ A_{st+2(e+1)} y_{t+2(e+1)} + A_{st+2(e-1)} y_{t+2(e-1)} + A_{st-2(e-1)} y_{t-2(e-1)} + A_{st-2(e+1)} y_{t-2(e+1)} + \\
+ A_{ss+2} y_{s+2} + A_{ss-2} y_{s-2} \approx B_s; \\
A_{tt} y_t + A_{tt+2e} y_{t+2e} + A_{tt-2e} y_{t-2e} + \\
+ A_{ts+2(e+1)} y_{s+2(e+1)} + A_{ts+2(e-1)} y_{s+2(e-1)} + A_{ts-2(e-1)} y_{s-2(e-1)} + A_{ts-2(e+1)} y_{s-2(e+1)} + \\
+ A_{tt+2} y_{t+2} + A_{tt-2} y_{t-2} \approx B_t \\
\left(i = 2,\ j = b+1, \dots, e-1; i = 3, \dots, d-1,\ j = 2, \dots, e-1\right); \\
A_{ss} y_s + A_{ss-2e} y_{s-2e} + A_{ss-4e} y_{s-4e} + A_{st+2} y_{t+2} + A_{st-2} y_{t-2} \approx B_s; \\
A_{tt} y_t + A_{tt-2e} y_{t-2e} + A_{tt-4e} y_{t-4e} + A_{ts+2} y_{s+2} + A_{ts-2} y_{s-2} \approx B_t \\
\left(i = d,\ j = 2, \dots, e-1\right); \\
A_{ss} y_s + A_{ss-2} y_{s-2} + A_{ss-4} y_{s-4} + A_{st+2e} y_{t+2e} + A_{st-2e} y_{t-2e} \approx B_s; \\
A_{tt} y_t + A_{tt-2} y_{t-2} + A_{tt-4} y_{t-4} + A_{ts+2e} y_{s+2e} + A_{ts-2e} y_{s-2e} \approx B_t \\
\left(i = 2, \dots, d-1,\ j = e\right); \qquad (7.4) \\
A_{ss} y_s + A_{ss+2e} y_{s+2e} + A_{ss+4e} y_{s+4e} + A_{st+2} y_{t+2} + A_{st-2} y_{t-2} \approx B_s; \\
A_{tt} y_t + A_{tt+2e} y_{t+2e} + A_{tt+4e} y_{t+4e} + A_{ts+2} y_{s+2} + A_{ts-2} y_{s-2} \approx B_t \\
\left(i = 2,\ j = 2, \dots, a-1\right); \\
A_{ss} y_s + A_{ss+2e} y_{s+2e} + A_{ss+4e} y_{s+4e} + A_{st+2} y_{t+2} + A_{st-2} y_{t-2} \approx B_s; \\
A_{tt} y_t + A_{tt+2e} y_{t+2e} + A_{tt+4e} y_{t+4e} + A_{ts+2} y_{s+2} + A_{ts-2} y_{s-2} \approx B_t \\
\left(i = 2,\ j = a, \dots, b-1\right); \\
A_{s-2s-2} y_{s-2} + A_{s-2s+2} y_{s+2} = B_{s-2};\ A_{t-2t-2} y_{t-2} + A_{t-2t+2} y_{t+2} = B_{t-2} \\
\left(i = 2, \dots, d,\ j = 2\right); \\
A_{s-2es-2e} y_{s-2e} + A_{s-2es+2e} y_{s+2e} = B_{s-2e};\ A_{t-2et-2e} y_{t-2e} + A_{t-2et+2e} y_{t+2e} = B_{t-2e} \\
\left(i = 2, j = b, \dots, e\right); \\
A_{ss} y_s = B_s; \\
A_{tt} y_t + A_{tt+2e} y_{t+2e} + A_{tt-2} y_{t-2} + A_{tt+2(e-1)} y_{t+2(e-1)} +
\end{gathered}
$$

$$+A_{tt+4e}y_{t+4e}+A_{tt-4}y_{t-4}+A_{tt+4(e-1)}y_{t+4(e-1)}\approx B_t$$

$$(i=2,\ j=b);$$

$$A_{ss}y_s+A_{ss-2e}y_{s-2e}+A_{ss-2}y_{s-2}+A_{ss-2(e+1)}y_{s-2(e+1)}+$$

$$+A_{ss-4e}y_{s-4e}+A_{ss-4}y_{s-4}+A_{ss-4(e+1)}y_{s-4(e+1)}\approx B_s;$$

$$A_{tt}y_t+A_{tt-2e}y_{t-2e}+A_{tt-2}y_{t-2}+A_{tt-2(e+1)}y_{t-2(e+1)}+$$

$$+A_{tt-4e}y_{t-4e}+A_{tt-4}y_{t-4}+A_{tt-4(e+1)}y_{t-4(e+1)}\approx B_t$$

$$(i=d,\ j=e).$$

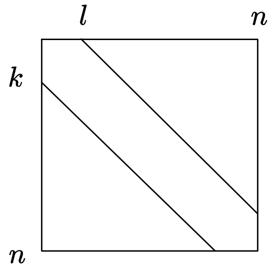


Рис. 6

Нагадаємо, що, згідно з формулами (7.3), індекси *s, t* пов’язані з індексами *i, j*.

Як бачимо, матриця системи (7.4) є стрічковою (рис. 6).

Зазначимо, що

$$k=4e+5;\ l=4e+1;\ n=2(de-b+1).$$

Ширина стрічки ($k+l-1$) складає $8e+5$.

Для коефіцієнтів і вільних членів лінійних рівнянь із системи (7.4) маємо

$$-A_{ss}=8(\underline{\kappa}^{aa}+\kappa^{bb});\ A_{ss+2e}=4\underline{\kappa}^{aa};\ A_{ss-2e}=4\underline{\kappa}^{aa};$$

$$A_{st+2(e+1)}=\underline{\kappa}^{ad}+\kappa^{bb};\ -A_{st+2(e-1)}=\underline{\kappa}^{ad}+\kappa^{bb};\ -A_{st-2(e-1)}=\underline{\kappa}^{ad}+\kappa^{bb};\ A_{st-2(e+1)}=\underline{\kappa}^{ad}+\kappa^{bb};$$

$$A_{ss+2}=4\kappa^{bb};\ A_{ss-2}=4\kappa^{bb};\qquad B_s=4h^2Q^1\left(\underset{i}{x^1},\underset{j}{x^2}\right);$$

$$-A_{tt}=8(\kappa^{bb}+\underline{\kappa}^{dd});\ A_{tt+2e}=4\kappa^{bb};\ A_{tt-2e}=4\kappa^{bb};$$

$$A_{ts+2(e+1)}=\kappa^{bb}+\underline{\kappa}^{da};\ -A_{ts+2(e-1)}=\kappa^{bb}+\underline{\kappa}^{da};\ -A_{ts-2(e-1)}=\kappa^{bb}+\underline{\kappa}^{da};\ A_{ts-2(e+1)}=\kappa^{bb}+\underline{\kappa}^{da};$$

$$A_{tt+2}=4\underline{\kappa}^{dd};\ A_{tt-2}=4\underline{\kappa}^{dd};\quad B_t=4h^2Q^2\left(\underset{i}{x^1},\underset{j}{x^2}\right)$$

$$(i=2,\ j=b+1,\ldots,e-1;\, i=3,\ldots,d-1,\ j=2,\ldots,e-1);$$

$$A_{ss}=3\underline{\kappa}^{aa};\ -A_{ss-2e}=4\underline{\kappa}^{aa};\ A_{ss-4e}=\underline{\kappa}^{aa};\ A_{st+2}=\underline{\kappa}^{ad};\ -A_{st-2}=\underline{\kappa}^{ad};$$

$$B_s=2h\left[P^1\left(\underset{i}{x^1},\underset{j}{x^2}\right)+R^1\left(\underset{i}{x^1},\underset{j}{x^2}\right)\right];$$

$$A_{tt}=3\kappa^{bb};\ -A_{tt-2e}=4\kappa^{bb};\ A_{tt-4e}=\kappa^{bb};\ A_{ts+2}=\kappa^{bb};\ -A_{ts-2}=\kappa^{bb};$$

$$B_t=2h\left[P^2\left(\underset{i}{x^1},\underset{j}{x^2}\right)+R^2\left(\underset{i}{x^1},\underset{j}{x^2}\right)\right]\quad(i=d,\ j=2,\ldots,e-1);$$

$$A_{ss}=3\kappa^{bb};\ -A_{ss-2}=4\kappa^{bb};\ A_{ss-4}=\kappa^{bb};\ A_{st+2e}=\kappa^{bb};\ -A_{st-2e}=\kappa^{bb};$$

$$B_s=2h\left[P^1\left(\underset{i}{x^1},\underset{j}{x^2}\right)+R^1\left(\underset{i}{x^1},\underset{j}{x^2}\right)\right];$$

$$A_{tt}=3\underline{\kappa}^{dd};\ -A_{tt-2}=4\underline{\kappa}^{dd};\ A_{tt-4}=\underline{\kappa}^{dd};\ A_{ts+2e}=\underline{\kappa}^{da};\ -A_{ts-2e}=\underline{\kappa}^{da};$$

$$B_t = 2h\left[P^2\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right) + R^2\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right)\right] \quad (i = 2, \dots, d-1,\ j = e);$$

$$A_{ss} = 3\underline{\kappa}^{aa};\ -A_{ss+2e} = 4\underline{\kappa}^{aa};\ A_{ss+4e} = \underline{\kappa}^{aa};\ -A_{st+2} = \underline{\kappa}^{ad};\ A_{st-2} = \underline{\kappa}^{ad};$$

$$B_s = 2h\left[P^1\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right) + R^1\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right)\right];$$

$$A_{tt} = 3\kappa^{bb};\ -A_{tt+2e} = 4\kappa^{bb};\ A_{tt+4e} = \kappa^{bb};\ -A_{ts+2} = \kappa^{bb};\ A_{ts-2} = \kappa^{bb};$$

$$B_t = 2h\left[P^2\left(\underset{\mathrm{i}}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right) + R^2\left(\underset{\mathrm{i}}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right)\right] \quad (i = 2,\ j = 2, \dots, a-1);$$

$$A_{ss} = 3\underline{\kappa}^{aa};\ -A_{ss+2e} = 4\underline{\kappa}^{aa};\ A_{ss+4e} = \underline{\kappa}^{aa};\ -A_{st+2} = \underline{\kappa}^{ad};\ A_{st-2} = \underline{\kappa}^{ad};$$

$$B_s = 2h\left[P^1\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right) + R^1\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right)\right];$$

$$A_{tt} = 3\kappa^{bb};\ -A_{tt+2e} = 4\kappa^{bb};\ A_{tt+4e} = \kappa^{bb};\ -A_{ts+2} = \kappa^{bb};\ A_{ts-2} = \kappa^{bb};$$

$$B_t = 2h\left[P^2\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right) + R^2\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right)\right] \quad (i = 2,\ j = a, \dots, b-1); \tag{7.5}$$

$$A_{s-2s-2} = 1;\ -A_{s-2s+2} = 1;\ B_{s-2} = 0;\ A_{t-2t-2} = 1;\ A_{t-2t+2} = 1;\ B_{t-2} = 0$$
$$(i = 2, \dots, d,\ j = 2);$$

$$A_{s-2es-2e} = 1; A_{s-2es+2e} = 1;\ B_{s-2e} = 0;\ A_{t-2et-2e} = 1; -A_{t-2et+2e} = 1;\ B_{t-2e} = 0$$
$$(i = 2,\ j = b, \dots, e);$$

$$A_{ss} = 1;\ B_s = 0;\ A_{tt} = 3;\ -A_{tt+2e} = 4;\ -A_{tt-2} = 4;\ A_{tt+2(e-1)} = 4;$$

$$A_{tt+4e} = 1;\ A_{tt-4} = 1;\ -A_{tt+4(e-1)} = 1;\ B_t = 0 \quad (i = 2,\ j = b);$$

$$A_{ss} = 3;\ -A_{ss-2e} = 4;\ -A_{ss-2} = 4;\ A_{ss-2(e+1)} = 4;$$

$$A_{ss-4e} = 1;\ A_{ss-4} = 1;\ -A_{ss-4(e+1)} = 1;\ B_s = 0;$$

$$A_{tt} = 3;\ -A_{tt-2e} = 4;\ -A_{tt-2} = 4;\ A_{tt-2(e+1)} = 4;$$

$$A_{tt-4e} = 1;\ A_{tt-4} = 1;\ -A_{tt-4(e+1)} = 1;\ B_t = 0 \quad (i = d,\ j = e).$$

Заради обчислення компонент $Q^\alpha\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right)$ і $R^\alpha\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right)$, які фігурують в окремих із формул (7.5), будуть потрібні, згідно з формулами (4.33) і (4.35), значення функції $\tilde{\varphi}(\Omega)$ у точках $\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right)$ $(i = 2, \dots, d,\ j = 2, \dots, e)$. Визначимо їх, враховуючи друге із позначень (2.21), за третьою із формул (2.37) і формулою (2.40) або за формулою (2.47). При цьому будемо зважати на інваріанти (4.24) і (4.26) та використаємо вираз (4.30).

Зазначимо, що з симетрії відносно осей x^1, x^2 випливає

$$\left[\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right]\Bigg|_{\left(\underset{i}{x^1},\, \underset{1}{x^2}\right)}+\left[\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right]\Bigg|_{\left(\underset{i}{x^1},\, \underset{3}{x^2}\right)}=0;$$

$$\left\{\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{da}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{dd}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\delta}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]\right\}\Bigg|_{\left(\underset{i}{x^1},\, \underset{1}{x^2}\right)}-$$

$$-\left\{\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{da}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{dd}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\delta}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]\right\}\Bigg|_{\left(\underset{i}{x^1},\, \underset{3}{x^2}\right)}=0$$

$$(i=3,\ldots,d-1); \qquad (7.6)$$

$$\left\{\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{aa}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{ad}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]\right\}\Bigg|_{\left(\underset{1}{x^1},\, \underset{j}{x^2}\right)}-$$

$$-\left\{\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{aa}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{ad}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]\right\}\Bigg|_{\left(\underset{3}{x^1},\, \underset{j}{x^2}\right)}=0;$$

$$\left[\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right]\Bigg|_{\left(\underset{1}{x^1},\, \underset{j}{x^2}\right)}+\left[\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right]\Bigg|_{\left(\underset{3}{x^1},\, \underset{j}{x^2}\right)}=0$$

$$(j=b+1,\ldots,e-1).$$

При обчисленні компонент $Q^{\alpha}\left(\underset{i}{x^1}, \underset{j}{x^2}\right)$ слід шукати частинні похідні

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{aa}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{ad}-\frac{\alpha}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]\right\}\Bigg|_{\left(\underset{i}{x^1},\, \underset{j}{x^2}\right)};$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right]\Bigg|_{\left(\underset{i}{x^1},\, \underset{j}{x^2}\right)}; \quad \frac{\partial}{\partial x^1}\left[\tilde{\varphi}(\Omega)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right]\Bigg|_{\left(\underset{i}{x^1},\, \underset{j}{x^2}\right)};$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\tilde{\varphi}(\Omega)\left[\left(\underline{\kappa}^{da}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x^1}+\left(\underline{\kappa}^{dd}-\frac{\delta}{Z}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x^2}-\frac{\delta}{Z}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right]\right\}\Bigg|_{\left(\underset{i}{x^1},\, \underset{j}{x^2}\right)}$$

$$(i=2,\ j=b+1,\ldots,e-1;\ i=3,\ldots,d-1,\ j=2,\ldots,e-1).$$

Для цього апроксимуємо їх, беручи до уваги рівності (7.6), відповідними різницевими відношеннями.

Звернемо увагу на те, що для верхньої поверхні тіла $\underset{i}{x^1}=\underset{d}{x^1},\ \underset{2}{x^2}\le\underset{j}{x^2}\le\underset{e}{x^2}$, а для бічної поверхні тіла $\underset{2}{x^1}\le\underset{i}{x^1}\le\underset{d}{x^1},\ \underset{j}{x^2}=\underset{e}{x^2}$ (рис. 5).

Вектор напруження $\boldsymbol{P}$ у точках на поверхнях тіла записуємо так:

$$\boldsymbol{P}\left(\underset{i}{x}^1,\underset{j}{x}^2\right)\equiv\begin{cases}P_{(1)}\left(\underset{i}{x}^1,\underset{j}{x}^2\right) & \left(\underset{i}{x}^1=\underset{d}{x}^1,\underset{2}{x}^2\le\underset{j}{x}^2<\underset{e}{x}^2\right);\\ P_{(2)}\left(\underset{i}{x}^1,\underset{j}{x}^2\right) & \left(\underset{2}{x}^1\le\underset{i}{x}^1<\underset{d}{x}^1,\underset{j}{x}^2=\underset{e}{x}^2\right).\end{cases}$$

Для модулів $P_{(i)}\left(\underset{i}{x}^1,\,\underset{j}{x}^2\right)$ векторів напруження $\boldsymbol{P}_{(i)}\left(\underset{i}{x}^1,\,\underset{j}{x}^2\right)$ маємо:

$$P_{(i)}\left(\underset{i}{x}^1,\underset{j}{x}^2\right)=\sqrt{g_{\alpha\beta}P^{\alpha}_{(i)}\left(\underset{i}{x}^1,\underset{j}{x}^2\right)P^{\beta}_{(i)}\left(\underset{i}{x}^1,\underset{j}{x}^2\right)}\ \ (i=1,2). \qquad (7.7)$$

Вважатимемо, що компонента $P^2_{(1)}\left(\underset{i}{x}^1,\,\underset{j}{x}^2\right)$ вектора напруження $\boldsymbol{P}_{(1)}\left(\underset{i}{x}^1,\,\underset{j}{x}^2\right)$ і компонента $P^1_{(2)}\left(\underset{i}{x}^1,\,\underset{j}{x}^2\right)$ вектора напруження $\boldsymbol{P}_{(2)}\left(\underset{i}{x}^1,\,\underset{j}{x}^2\right)$ дорівнюють нулю. При цьому вектори напруження $\boldsymbol{P}_{(1)}\left(\underset{i}{x}^1,\,\underset{j}{x}^2\right)$ і $\boldsymbol{P}_{(2)}\left(\underset{i}{x}^1,\,\underset{j}{x}^2\right)$ являтимуть собою поперечне і поздовжнє (відносно тріщини) навантаження на тіло.

Нехай згадані вектори не залежать від координат $\underset{i}{x}^1,\,\underset{j}{x}^2$.

Отже,

$$P^2_{(1)}=0;\ P^1_{(2)}=0. \qquad (7.8)$$

Спираючись на рівності (4.13) і (7.8), записуємо формули (7.7) так:

$$P_{(1)}=\sqrt{P^1_{(1)}P^1_{(1)}};\quad P_{(2)}=\sqrt{P^2_{(2)}P^2_{(2)}}. \qquad (7.9)$$

Звичайно, компоненти $P^1_{(1)}$ і $P^2_{(2)}$ можуть бути як додатними, так і від'ємними. Тому формулам (7.9) слід надати вигляду

$$P_{(1)}=\left|P^1_{(1)}\right|;\ P_{(2)}=\left|P^2_{(2)}\right|.$$

Вважатимемо, що вектор напруження $\boldsymbol{P}$ у точках на верхній поверхні тріщини є нульовим, тобто $P^1=0;\ P^2=0$.

Застосовуючи першу із умов (4.3), для компоненти S^{11} тензора напружень $\boldsymbol{S}$ у точках на верхній поверхні розрізу $(-n_1=1, n_2=0)$ отримуємо:

$$-S^{11}=P^1. \qquad (7.10)$$

Якщо поблизу кінця тріщини існує зона передруйнування, слід скористатися рівняннями (5.34).

Згідно з рівняннями (5.34), для компонент P^{α} вектора напруження $-\boldsymbol{P}$ маємо:

$$P^{\alpha}=P_o\left[\tilde{f}(v)-1\right]\frac{g^{\alpha\beta}v_{\beta}}{v}. \qquad (7.11)$$

Для тріщини нормального відриву компоненти v_1, v_2, v_3 вектора зміщення $\boldsymbol{v}$ у точках на верхній поверхні розрізу будуть:

$$v_1\ge 0; \qquad (7.12)$$

$$v_2=0;\ v_3=0. \qquad (7.13)$$

Звертаючись до формул (5.9) і (5.8), рівностей (4.14), а також нерівності (7.12) і рівності (7.13), встановлюємо

$$v = v_1. \tag{7.14}$$

Через симетрію відносно осі x^2 компонента v_1 вектора зміщення $\boldsymbol{v}$ буде:

$$v_1 = 2u_1. \tag{7.15}$$

Спираючись на рівняння (7.11) та беручи до уваги рівності (4.14), а також рівності (7.13) і формулу (7.14), для компонент P^1, P^2, P^3 вектора напруження $-\boldsymbol{P}$ отримуємо:

$$P^1 = P_o\left[\tilde{f}(v) - 1\right]; \tag{7.16}$$

$$P^2 = 0;\ P^3 = 0. \tag{7.17}$$

Користуючись рівнянням (7.16), надаємо умові (7.10) вигляду

$$S^{11} = P_o\left[1 - \tilde{f}(v)\right]. \tag{7.18}$$

У точці B, згідно з формулами (7.14) і (7.15) та рівнянням (6.2),

$$v = 0. \tag{7.19}$$

Відповідно до формули (5.33) і рівності (7.19) умова (7.18) буде

$$S_B^{11} = P_o. \tag{7.20}$$

Якщо біля кінця тріщини немає зони передруйнування, то точки A і B будуть збігатися.

§8. Модифікований метод виключення.

Нагадаємо, що розв'язкові рівняння з невідомими $y_1, \ldots,\ y_n$ складають систему (7.4). Представимо цю систему так:

$$\sum_{v=1}^{n} A_{uv} y_v = B_u \quad (u = 1, \ldots, n). \tag{8.1}$$

У подальшому будуть потрібні матриця $\boldsymbol{A}$ системи (8.1) і стовпчик $\boldsymbol{B}$ вільних членів. Як було відзначено вище, матриця $\boldsymbol{A}$ є стрічковою (рис. 6). Отже, маємо розширену матрицю, утворену матрицею $\boldsymbol{A}$ (стрічковою) і стовпчиком $\boldsymbol{B}$.

Дотримуючись роботи [30], перетворимо матрицю $\boldsymbol{A}$ на матрицю $\dot{\boldsymbol{A}}$ з елементами

$$\dot{A}_{u\bar{v}} = A_{uv} \quad (u = 1, \ldots, n,\ v = 1, \ldots, n).$$

Тут

$$\bar{v} = \begin{cases} v & (u \le k); \\ v - u + k & (u > k). \end{cases}$$

Таким чином, матрицю $\boldsymbol{A}$ розміру $n \times n$ перетворено на матрицю $\dot{\boldsymbol{A}}$ розміру $n \times (k + l - 1)$.

Відзначимо, що матриця $\dot{\boldsymbol{A}}$ і стовпчик $\boldsymbol{B}$ утворюють компактну розширену матрицю. Стосовно цієї матриці модифікуємо метод Гаусса.

Прямий хід включатиме чотири етапи.

Перший етап $(u = 1, \ldots, k,\ v = u + 1, \ldots, l + u - 1)$:

$$\dot{A}_{uv}^{(u)} = \frac{\dot{A}_{uv}^{(u-1)}}{\dot{A}_{uu}^{(u-1)}};\ B_u^{(u)} = \frac{B_u^{(u-1)}}{\dot{A}_{uu}^{(u-1)}} \quad (w = u + 1, \ldots, k);$$

$$\dot{A}_{wv}^{(u)} = \dot{A}_{wv}^{(u-1)} - \dot{A}_{uv}^{(u)} \dot{A}_{wu}^{(u-1)};\ B_w^{(u)} = B_w^{(u-1)} - B_u^{(u)} \dot{A}_{wu}^{(u-1)} \quad (w = k + 1, \ldots, k + u - 1);$$

$$\dot{A}^{(u)}_{wv-w+k} = \dot{A}^{(u-1)}_{wv-w+k} - \dot{A}^{(u)}_{uv}\dot{A}^{(u-1)}_{wu-w+k};\ B^{(u)}_{w} = B^{(u-1)}_{w} - B^{(u)}_{u}\dot{A}^{(u-1)}_{wu-w+k}. \tag{8.2}$$

Другий етап $\left(u = k+1, \dots, n-k,\ v = u+1, \dots, l+u-1\right)$:

$$\dot{A}^{(u)}_{uv-u+k} = \frac{\dot{A}^{(u-1)}_{uv-u+k}}{\dot{A}^{(u-1)}_{uk}};\ B^{(u)}_{u} = \frac{B^{(u-1)}_{u}}{\dot{A}^{(u-1)}_{uk}}\quad \left(w = u+1, \dots, k+u-1\right);$$

$$\dot{A}^{(u)}_{wv-w+k} = \dot{A}^{(u-1)}_{wv-w+k} - \dot{A}^{(u)}_{uv-u+k}\dot{A}^{(u-1)}_{wu-w+k};\ B^{(u)}_{w} = B^{(u-1)}_{w} - B^{(u)}_{u}\dot{A}^{(u-1)}_{wu-w+k}. \tag{8.3}$$

Третій етап $\left(u = n-k+1, \dots, n-l,\ v = u+1, \dots, l+u-1\right)$:

$$\dot{A}^{(u)}_{uv-u+k} = \frac{\dot{A}^{(u-1)}_{uv-u+k}}{\dot{A}^{(u-1)}_{uk}};\ B^{(u)}_{u} = \frac{B^{(u-1)}_{u}}{\dot{A}^{(u-1)}_{uk}}\quad \left(w = u+1, \dots, n\right);$$

$$\dot{A}^{(u)}_{wv-w+k} = \dot{A}^{(u-1)}_{wv-w+k} - \dot{A}^{(u)}_{uv-u+k}\dot{A}^{(u-1)}_{wu-w+k};\ B^{(u)}_{w} = B^{(u-1)}_{w} - B^{(u)}_{u}\dot{A}^{(u-1)}_{wu-w+k}. \tag{8.4}$$

Четвертий етап $\left(u = n-l+1, \dots, n, v = u+1, \dots, n\right)$:

$$\dot{A}^{(u)}_{uv-u+k} = \frac{\dot{A}^{(u-1)}_{uv-u+k}}{\dot{A}^{(u-1)}_{uk}};\ B^{(u)}_{u} = \frac{B^{(u-1)}_{u}}{\dot{A}^{(u-1)}_{uk}}\quad \left(w = u+1, \dots, n\right);$$

$$\dot{A}^{(u)}_{wv-w+k} = \dot{A}^{(u-1)}_{wv-w+k} - \dot{A}^{(u)}_{uv-u+k}\dot{A}^{(u-1)}_{wu-w+k};\ B^{(u)}_{w} = B^{(u-1)}_{w} - B^{(u)}_{u}\dot{A}^{(u-1)}_{wu-w+k}. \tag{8.5}$$

Здійснивши перетворення за формулами (8.2) – (8.5), отримаємо вільний член $B^{(n)}_{n}$.

Зазначимо, що невідоме y_n дорівнюватиме вільному члену $B^{(n)}_{n}$.

Зворотний хід включатиме три етапи.

Перший етап $\left(u = n-1, \dots, n-l+1\right)$:

$$y_u = B^{(u)}_{u} - \sum_{v=u+1}^{n} \dot{A}^{(u)}_{uv-u+k} y_v. \tag{8.6}$$

Другий етап $\left(u = n-l, \dots, k+1\right)$:

$$y_u = B^{(u)}_{u} - \sum_{v=u+1}^{l+u-1} \dot{A}^{(u)}_{uv-u+k} y_v. \tag{8.7}$$

Третій етап $\left(u = k, \dots, 1\right)$:

$$y_u = B^{(u)}_{u} - \sum_{v=u+1}^{l+u-1} \dot{A}^{(u)}_{uv} y_v. \tag{8.8}$$

Здійснивши обчислення за формулами (8.6) – (8.8), знайдемо невідомі $y_{n-1}, \dots, y_1$.

§9. Узагальнений метод послідовних наближень.

Будемо розв'язувати зворотну крайову задачу, вважаючи довжину розрізу і модуль $P_{(2)}$ вектора напруження $\boldsymbol{P}_{(2)}$ відомими. Величину P_o і модуль $P_{(1)}$ вектора напруження $\boldsymbol{P}_{(1)}$ визначатимемо, розв'язуючи указану задачу. При цьому будемо вимагати, щоб компонента S^{11} тензора напружень $\boldsymbol{S}$ у точці B задовольняла рівності (7.20). Окрім того, будемо стежити, щоб у точці B додержувався критерій (3.4).

Спочатку величину P_o і модуль $P_{(1)}$ вектора напруження $\boldsymbol{P}_{(1)}$ задамо довільно.

Скориставшись системою (7.4), знайдемо невідомі $y_1, \ldots, y_n$. Виконаємо це узагальненим методом послідовних наближень [28].

В першому наближенні вважатимемо, що $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$ і $\tilde{f}(v) = 0$.

Зазначимо, що при $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$, згідно з формулами (4.33) і (4.35), матимемо

$$Q^\alpha\left(\underset{i}{x}^1,\, \underset{j}{x}^2\right) = 0; \quad R^\alpha\left(\underset{i}{x}^1,\, \underset{j}{x}^2\right) = 0.$$

В кожному подальшому наближенні функцію $\tilde{\varphi}(\Omega)$, компоненти $Q^\alpha\left(\underset{i}{x}^1,\, \underset{j}{x}^2\right)$ і $R^\alpha\left(\underset{i}{x}^1,\, \underset{j}{x}^2\right)$та функцію $\tilde{f}(v)$ обчислимо на основі невідомих $y_1, \ldots, y_n$, знайдених у попередньому наближенні. Задля цього скористаємось, враховуючи позначення (7.2), відповідними різницевими апроксимаціями частинних похідних (у точках $\left(\underset{i}{x}^1,\, \underset{j}{x}^2\right)$ $(i = 2, \ldots, d,\, j = 2, \ldots, e)$) від компонент $u_\alpha\,(\alpha = 1{,}2)$ за координатами $x^\beta\,(\beta = 1{,}2)$ та використаємо вираз (4.30).

Потім на основі невідомих $y_1, \ldots, y_n$, знайдених в останньому наближенні, обчислимо за першим із рівнянь (4.37) компоненту S^{11} тензора напружень $\boldsymbol{S}$ у точці B. Якщо ця компонента не задовольнятиме рівності (7.20), то величину P_o змінимо та знову розв'яжемо указану задачу.

Тільки-но компонента S^{11} тензора напружень $\boldsymbol{S}$ у точці B задовольнить рівності (7.20), перевіримо, чи додержується у цій точці критерій (3.4). Якщо це буде не так, модуль $P_{(1)}$ вектора напруження $\boldsymbol{P}_{(1)}$ змінимо та знову розв'яжемо вказану задачу.

Повторюючи описану процедуру, знайдемо невідомі $y_1, \ldots, y_n$. Разом із цим зафіксуємо значення індексів i, j, при яких величина Ω ставатиме більшою або меншою за сталу υ. Це надасть змогу обчислити, користуючись формулами (7.1), координати $\underset{i}{x}^1,\, \underset{j}{x}^2$ точок, які належатимуть до межі зони нелінійності.

На закінчення відзначимо, що систему (7.4) було апробовано у кількох роботах. Найбільш вагомі результати отримано у роботах [28, 29]. Так, у роботі [28] встановлено закономірності еволюції зони передруйнування при навантаженні тіла. А у роботі [29] виявлено область пасивної деформації, яка оточує тріщину.

Висновки.

В коваріантних компонентах вектора переміщень запропоновано постановку першої основної задачі про рівновагу нелінійного анізотропного тіла з довільною тріщиною, біля фронту якої є зона передруйнування.

Для постановки використано, зокрема, тензорно-лінійні визначальні рівняння, які зв'язують контраваріантні компоненти тензора напружень з коваріантними компонентами тензора деформацій. Ці рівняння побудовано на основі запропонованих співвідношень між згаданими компонентами. При цьому застосовано метод Ріхтера. З'ясовано фізичний сенс алгебраїчних інваріантів тензора напружень і тензора деформацій. В результаті аналізу побудованих рівнянь з позицій законів термодинаміки встановлено, яким чином зв'язані між собою вказані алгебраїчні інваріанти тензора напружень і тензора деформацій. Сформульовано критерії нелінійності та міцності.

З урахуванням положень загального характеру побудовано рівняння стану для зони передруйнування. Запропоновано також критерій локального руйнування як узагальнення критерію Веллса – Савіна – Камінського.

Особливу увагу приділено випадку плоского напруженого стану. Частинні похідні від компонент вектора переміщення за координатами, що фігурують в основних рівняннях, апроксимовано відповідними різницевими відношеннями. Завдяки цьому отримано систему зі стрічковою матрицею. Стосовно цієї матриці модифіковано метод виключення Гаусса.

Розроблено метод розв’язування крайової задачі як узагальнення методу послідовних наближень Іллюшина.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. В коваріантних компонентах вектора переміщення сформульовано першу основну задачу для нелінійного анізотропного тіла з довільною тріщиною, біля фронту якої існує зона передруйнування. Прийнято, що тіло описується тензорно-лінійним визначальним рівнянням. Ці рівняння побудовано на основі запропонованих співвідношень між коваріантними компонентами тензора деформацій і контраваріантними компонентами тензора напружень, які узагальнюють співвідношення Рейнера. Згадані рівняння проаналізовано з позицій першого та другого законів термодинаміки. В результаті зв’язані між собою алгебраїчні інваріанти тензора напружень і тензора деформацій, що фігурують у визначальних рівняннях. Для випадку плоского напруженого стану встановлено систему відносно дискретизованих змінних. Запропоновано метод розв’язання цієї системи.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: механіка руйнування, нелінійне анізотропне тіло, крайові задачі.

1. *Богданова О.С., Каминский А.А., Курчаков Е.Е.* О зоне предразрушения возле фронта произвольной трещины в твердом теле // Доп. НАН України. – 2017. – № 5. – С. 25 – 33.
2. *Гузь А.Н., Каминский А.А., Назаренко В.М.* Механика разрушения. – Киев: “АСК”, 1996. – 340 с.
3. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. – Москва: ГТИ, 1948. – 408 с.
4. *Дмитриева Е.А., Каминский А.А., Курчаков Е.Е.* О влиянии продольной растягивающей нагрузки на деформацию нелинейного упругого анизотропного тела с трещиной нормального отрыва // Доп. НАН України. – 2020. – № 5. – С. 17 – 30.
5. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – Москва: ГТИ, 1948. – 376 с.
6. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
7. *Каминский А.А., Курчаков Е.Е.* О состоянии предельного равновесия нелинейного анизотропного тела с трещиной // Доп. НАН України. – 2015. – № 11. – С. 52 – 60.
8. *Каминский А.А., Курчаков Е.Е.* Об эволюции зоны предразрушения у вершины трещины в нелинейном анизотропном теле // Доп. НАН України. – 2018. – № 10. – С. 44 – 55.
9. *Кильчевский Н.А.* Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. – Киев: Наук. думка, 1972. – 148 с.
10. *Курчаков Е.Е.* Исследование связи деформаций с напряжениями для нелинейной анизотропной среды // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 9. – С. 19 – 24.
11. *Курчаков Е.Е.* Тензорно-линейные определяющие уравнения для нелинейной упругой анизотропной среды // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 4. – С. 65 – 68.
12. *Курчаков Е.Е.* Термодинамическое обоснование определяющих уравнений для нелинейного анизотропного тела // Доп. НАН України. – 2015. – № 9. – С. 46 – 53.
13. *Ломакин В.А.* О теории нелинейной упругости и пластичности анизотропных сред // Известия АН СССР, ОТН. – 1960. – № 4. – С. 60 – 64.
14. *Работнов Ю.Н.* Малые пластические деформации как проблема механики // Известия АН СССР, ОТН. – 1954. – № 7. – С. 97 – 104.
15. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – Москва: Изд-во «Наука», 1973. – 536 с.
16. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. – Москва: Физматгиз, 1969. – 364 с.
17. *Хенки Х.* Развитие и современное состояние теории пластичности // Прикл. математика и механика. – 1940. – **4**, № 3. – С. 31 – 36.
18. *Bridgman P.* The compressibility of thirty metals as a function of pressure and temperature // Proc. of Academy of Arts and Sci. – 1923. – **58**, N 5. – P. 166 – 242.
19. *Clayton J.D.* Nonlinear Fracture Mechanics. In: *Altenbach H., Öchsner A.* Encyclopedia of Continuum Mechanics. – Berlin: Springer, 2020. – P. 1840 – 1846.
20. *Clausius R.* Ueber eine veranderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Warmetheorie // Annalen der Physik und Chemie. – 1854. – **93**, N 12. – S. 481 – 506.

21. *Gibbs W.* On the equilibrium of heterogeneous substances // Transactios of the Connecticut Academy. – 1875. – N 3. – P. 108 – 248.
22. *Gross D.* Path Independent Integrals and Crack Growth Parameters in Nonlinear Fracture Mechanics // Nonlinear Fract. Mech. – 1990. – P. 123 – 141.
23. *Guggenheim E.* Modern Thermodynamics by the Methods of Gibbs. – London: Edition by Methuen, 1933. – 188 p.
24. *Helmholtz H.* Ueber die Erhaltung der Kraft // Wissenschaftliche Abhandlungen. – 1847. – 1, N 1. – S. 12 – 75.
25. *Hencky H.* Zur Theorie der Plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen // ZAMM. – 1924. – **4**, N 4. – S. 323 – 334.
26. *Jin Z.H., Paulino G.H., Dodds R.H.* Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials // Engng. Fract. Mech. – 2003. – **70**, N 14. – P. 1885 – 1912.
27. *Kaminsky A.A., Bogdanova O.S.* Long-Term Crack-Resistance of Orthotropic Viscoelastic Plate under Biaxial Loading // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, N 9. – P. 747 – 753.
28. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Fracture Process Zone at the Tip of a Mode I Crack in a Nonlinear Elastic Orthotropic Material // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 1. – P. 23 – 40.
29. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Mechanism of Development of the Area of Passive Deformation in a Nonlinear Elastic Orthotropic Body with a Crack // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 402 – 414.
30. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E., Gavrilov G.N.* Study of the Plastic Zone Near a Crack in an Anisotropic Body // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 7. – P. 749 – 764.
31. *Kurchakov E.E.* Experimental Study of the Plastic Zone at the Front of a Mode I Crack // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 213 – 219.
32. *Love A.* Treatise on Mathematical Theory of Elasticity. – Cambridge: University Press, 1927. – 674 p.
33. *Mises R.* Mechanik der festen Korper im plastisch deformablen Zustand // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. – 1913. – № 4. – S. 582 – 592.
34. *Nadai A.* Plasticity. – New York: Edition by McGraw, 1931. – 280 p.
35. *Needleman A*. A continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding // J. Appl. Mech. – 1987. – **54**, N 3. – P. 525 – 531.
36. *Park K., Paulino G.H.* Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces // Appl. Mech. Reviews. – 2011. – **64**, N 11. – P. 1 – 20.
37. *Poynting J.* On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears and on the lengthening of loaded wires when twisted // Proc. of the Royal Soc., Mathematical and Physical Sci. – 1909. – N 82. – P. 546 – 559.
38. *Poynting J.* On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted and on the pressure of distortional waves in steel // Proc. of the Royal Soc., Mathematical and Physical Sci. – 1912. – N 86. – P. 534 – 561.
39. *Reiner M.* A mathematical theory of dilatancy // American J. of Mathematics. – 1945. – **67**, № 3. – P. 350 – 362.
40. *Richter H.* Das isotrope Elastizitatsgesetz // ZAMM. – 1948. – **28**, № 7. – S. 205 – 209.
41. *Savin G.N., Kaminskii A.A.* The growth of cracks during the failure of hard polymers // Sov. Appl. Mech. – 1967. – **3**, N 9. – P. 22 – 25.
42. *Thomson W., Tait P.* Treatise on Natural Philosophy. – Cambridge: At the University Press, 1890. – 527 p.
43. *Tvergaard V., Hutchinson J.W.* The Influence of Plasticity on Mixed Mode Interface Toughness // J. Mech. Phys. Solids. – 1993. – **41**, N 6. – P. 1119 – 1135.
44. *Wells A.A.* Critical tip opening displacement as fracture criterion // Proc. Crack Propagation Symp. Cranfield. – 1961. – **1**. – P. 210 – 221.
45. *Wittmann F.H., Rokugo K., Bruehwiler E., Mihashi H., Simonin P.* Fracture Energy and Strain Softening of Concrete as Determined by Means of Compact Tension Specimens // Mater. Struct. – 1988. – **21**, N 1. – P. 21 – 32.

Надійшла 09.06.2021 Затверджена до друку 31.05.2022