

П.З.Луговий, Ю.В.Скосаренко

## КОЛИВАННЯ ШАРУВАТОЇ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: plugovu@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** Within the theory of shells, based on the Timoshenko hypotheses, the technique is developed for determining the stress-strain state of the ribbed orthotropic conical shell with asymmetric layers and attached masses under the action of nonstationary load. The motion equations for the shell are obtained in the displacements of the points of the middle surface using the Hamilton variational principle. The trigonometric series in spatial coordinates and explicit finite-difference in time scheme are used to solve the system of motion equations of the shell. On an example of a cylindrical layered shell, estimates of the accuracy of calculations by the finite-difference method depending on the number of steps in the time coordinate are obtained. Studies of the stress-strain state of a conical orthotropic shell with symmetric and asymmetric layers, longitudinal ribs, and masses under the action of short-term axisymmetric external load distributed on the part of the shell, the front of which moves from the smaller base to the larger.

**Key words:** vibration, multilayer orthotropic ribbed conical shell, attached masses, elastic base, method of trigonometric series on spatial coordinates, explicit finite-difference scheme in time, mechanical effects.

### Вступ.

Досліджено коливання і напружено-деформований стан замкнутої багат шарової ортотропної ребристої конічної оболонки під дією нестационарного у часі і просторі зовнішнього осесиметричного навантаження. Враховано несиметричну структуру шарів оболонки по її товщині, а також приєднані маси.

Задачі динаміки шаруватих оболонок розглядалися в багатьох дослідженнях. Відмітимо ряд робіт з даної тематики за останні роки [6, 11, 14, 20 – 23, 26]. В статтях [15, 25] проведений огляд літератури щодо статичного аналізу композитних оболонок та обчислювальних моделей для ламінованих сендвіч-панелей. Роботи [12, 13] присвячені експериментальним дослідженням динаміки тіл циліндричної, сферичної форм і шаруватих балок. Задачі нестационарної динаміки циліндричних, конічних, сферичних оболонок з підкріпленнями, стиковані і шаруваті оболонки досліджувались в статтях [2, 4, 5, 8, 9, 16 – 18, 24]. В [8] досліджено вплив несиметрії тришарових циліндричних оболонок з легким заповнювачем на їх напружено-деформований стан при нестационарних навантаженнях.

Як впливає з аналізу наведених публікацій, задачі динаміки шаруватих оболонок не втратили своєї актуальності і мають значні застосування.

### §1. Постановка задачі та метод розв'язування.

На основі лінійної теорії, що враховує деформації поперечного зсуву за моделлю Тимошенка [10], отримані, аналогічно [1], вирази для потенціальної і кінетичної енергій оболонки, шари якої в загальному випадку несиметричні відносно її серединної поверхні.

Прийнято, що пряма, попередньо нормальна до серединної поверхні всього пакету шарів, не деформується, але не залишається нормальною до серединної поверхні при деформуванні оболонки. На цій підставі нормальну і зсувні деформації оболонки представляємо у вигляді

$$e_3 = 0; \quad e_{13} = \hat{\psi}_1 = \psi_1 - \varphi_1; \quad e_{23} = \hat{\psi}_2 = \psi_2 - \varphi_2, \quad (1.1)$$

де  $\varphi_1 = 1/r (\partial w / \partial \xi)$ ;  $\varphi_2 = 1/(r b_\xi) ((\partial w / \partial w) - v)$ ;  $\psi_1, \psi_2$  – повні кути повороту нормалі навколо колової та поздовжньої координатних ліній, відповідно;  $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$  – кути зсуву, аналогічно;  $r$  – більший радіус конічної оболонки;  $b_\xi = 1 - \beta \xi$ ;  $\beta = \sin \beta_0$ ;  $\beta_0$  – кут між віссю та твірною оболонки;  $u, v, w$  – поздовжнє, колове та нормальне переміщення точок серединної поверхні оболонки;  $\xi = x/r, \theta = y/r$  – безрозмірні поздовжня та колова координати.

Прийнято також, що поперечний зсув і повні кути повороту поперечного перерізу ребер дорівнюють відповідним деформаціям оболонки на лініях її з'єднання з ребрами.

Виконавши перетворення, подібно до виконаних в [4], отримуємо вирази для потенціальної і кінетичної енергії конічної оболонки в переміщеннях точок її серединної поверхні

$$\begin{aligned} U_o = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\xi_1} \left\{ C_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + C_{22} \left( \frac{\partial v}{b_\xi \partial \theta} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} u + \frac{w}{r_{2\xi}} \right)^2 + \right. \\ & + 2C_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial v}{b_\xi \partial \theta} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} u + \frac{w}{r_{2\xi}} \right) + C_{66} \left( \frac{\partial u}{b_\xi \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} v \right)^2 + \\ & + C_{13} \left( \bar{\psi}_1 - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + C_{23} \left( \bar{\psi}_2 - \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r_{2\xi}} \right)^2 + 2 \left[ \bar{K}_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right) + \right. \\ & + \bar{K}_{22} \left( \bar{\psi}_2 + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r_{2\xi}} \right) \left( -\frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} u - \frac{w}{r_{2\xi}^2} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} \bar{\psi}_1 \right) \left. + \right. \\ & + \bar{K}_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left( -\frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} u - \frac{w}{r_{2\xi}^2} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} \bar{\psi}_1 \right) \left. + \right. \\ & + \bar{K}_{12} \left( \frac{\partial v}{b_\xi \partial \theta} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} u + \frac{w}{r_{2\xi}} \right) \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right) \left. + \right. \\ & + \bar{K}_{66} \left( \frac{\partial u}{b_\xi \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} v \right) \left( \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \xi} - \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} \bar{\psi}_2 - \frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} v \right) \left. \right] + \\ & + \bar{D}_{11} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right)^2 + \bar{D}_{22} \left( -\frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} u - \frac{w}{r_{2\xi}^2} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} \bar{\psi}_1 \right)^2 + \\ & + 2\bar{D}_{12} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right) \left( -\frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} u - \frac{w}{r_{2\xi}^2} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \theta} + \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} \bar{\psi}_1 \right) \left. \right\} + \end{aligned}$$

$$+\bar{D}_{66} \left( \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \xi} - \frac{1}{b_\xi} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} \bar{\psi}_2 - \frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{b_\xi r_{2\xi}} \frac{\partial b_\xi}{\partial \xi} v \right)^2 \Big\} b_\xi d\theta d\xi; \quad (1.2)$$

$$V_o = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\xi_1} \left\{ r^2 C_\rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + 2r^2 \bar{K}_\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + r^2 \bar{D}_\rho \left[ \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} b_\xi d\xi d\theta, \quad (1.3)$$

де позначено:  $\xi_1 = L/r$ ;  $\bar{\psi}_1 = r\psi_1$ ;  $\bar{\psi}_2 = r\psi_2$ ;  $\bar{K}_{ij} = K_{ij}/r$ ;  $\bar{K}_\rho = K_\rho/r$ ;  $\bar{D}_{ij} = D_{ij}/r^2$ ;  $\bar{D}_\rho = D_\rho/r^2$ ;  $C_{ij}$ ;  $K_{ij}$ ;  $D_{ij}$ ;  $C_\rho$ ;  $K_\rho$ ;  $D_\rho$  – приведені характеристики жорсткості і щільності оболонки [1], складеної з ортотропних шарів з різними характеристиками.

Напружено-деформований стан поздовжніх ребер визначаємо через переміщення точок осі та повні кути повороту їх поперечного перерізу. З умови жорсткого з'єднання ребер з оболонкою [7] отримані такі співвідношення між переміщеннями точок осі ребер і точок серединної поверхні оболонки:

$$u_{i_1} = (u + \bar{h}_{i_1} \bar{\psi}_1); \quad v_{i_1} = (v + \bar{h}_{i_1} \bar{\psi}_2); \quad w_{i_1} = w; \quad \psi_{i_1} = \psi_1; \quad \varphi_{kri_1} = \psi_2, \quad (1.4)$$

де  $\bar{h}_{i_1} = h_{i_1}/r$ ;  $\bar{h}_{i_2} = h_{i_2}/r$ ;  $h_{i_1}, h_{i_2}$  – відстані від осей ребер до серединної поверхні оболонки. Прийнято, що система поздовжніх підкріплювальних ребер регулярна. Формули (1.4) дозволяють виразити деформації та внутрішні сили і напруження в ребрах через переміщення точок серединної поверхні оболонки.

Переміщення центрів мас, які приєднані до оболонки абсолютно жорсткою консолю, також представляємо через переміщення точок серединної поверхні. В точці контакту маси з оболонкою маємо

$$u_{m_i} = u + \bar{l}_{m_i} \bar{\psi}_1; \quad v_{m_i} = v + \bar{l}_{m_i} \bar{\psi}_2; \quad w_{m_i} = w, \quad (1.5)$$

де  $\bar{l}_{m_i} = l_{m_i}/r$ ;  $l_{m_i}$  – відстань між центром маси та серединною поверхнею оболонки.

На зосереджені маси накладається умова симетрії відносно початку колової координати.

З врахуванням (1.4), (15) вирази для енергій ребер і приєднаних мас через переміщення точок серединної поверхні оболонки мають вигляд

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{k_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[ \frac{E_{i_1} F_{i_1}}{r} \frac{1}{a_\xi^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} + \frac{a_\xi}{r_{1\xi}} w \right)^2 + \frac{E_{i_1} I_{i_1\theta}}{r^3} \frac{1}{a_\xi^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{G_{i_1kr} I_{i_1kr}}{r^3} \frac{1}{a_\xi^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{k_{i_1} G_{i_1} F_{i_1}}{r} \left( \bar{\psi}_1 - \frac{1}{a_\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{r_{1\xi}} u \right)^2 \right] a_\xi d\xi \Big|_{\theta=\theta_{i_1}}; \quad (1.6)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i_1}^{k_1} \rho_{i_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ r F_{i_1} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{I_{i_1\theta}}{r} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{I_{i_1kr}}{r} \left( \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 \right\} a_\xi d\xi \Big|_{\theta=\theta_{i_1}}; \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
V_m = & \frac{1}{2} \sum_{i_m=1}^{k_m} \rho_{i_m} l_{i_m} F_{i_m} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{l_{i_m}}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial t} + \frac{l_{i_m}^2}{3r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial t} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - \frac{l_{i_m}}{r} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{b_\xi \partial \theta \partial t} + \frac{l_{i_m}^2}{3r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{b_\xi \partial \theta \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} \Big|_{\xi=\xi_{i_m}, \theta=\theta_{i_m}}. \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Рівняння руху даної механічної системи отримані з принципу стаціонарності дії, відповідно якому

$$\delta W = 0, \quad W = \int_{t_1}^{t_2} (V - U) dt - \text{дія за Гамільтоном}. \quad (1.9)$$

Повна потенціальна енергія даної механічної системи у відхиленому стані  $U$  в переміщеннях точок серединної поверхні оболонки та кутах зсуву представляється сумою потенціальних енергій оболонки і поздовжніх ребер; кінетична енергія  $V$  – сумою кінетичних енергій оболонки, ребер і приєднаних мас.

Після перетворень у відповідності з (1.9), використовуючи інтегрування по частинам, отримуємо систему п'яти інтегро-диференціальних рівнянь в переміщеннях точок серединної поверхні оболонки, яка описує рух оболонки, та природні граничні умови. Для механічних систем, симетричних відносно початку колової координати, переміщення точок серединної поверхні оболонки за просторовими координатами апроксимуємо скінченною сумою добутків тригонометричних функцій, коефіцієнти при яких залежні від часу

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M u_{1nm}(t) \cos n\theta \cos d_m \xi; \quad v = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{2nm}(t) \sin n\theta \sin d_m \xi; \\
w &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M u_{3nm}(t) \cos n\theta \sin d_m \xi; \quad \bar{\psi}_1 = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M u_{4nm}(t) \cos n\theta \cos d_m \xi; \\
\bar{\psi}_2 &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{5nm}(t) \sin n\theta \sin d_m \xi, \quad (1.10)
\end{aligned}$$

де  $d_m = m\pi(r/L)$ ,  $m, n$  – параметри хвилеутворення в поздовжньому і коловому напрямках.

Після підстановки (1.10) в систему рівнянь руху виконуємо перетворення за просторовими координатами і отримуємо систему звичайних диференціальних неоднорідних рівнянь другого порядку відносно невідомих коефіцієнтів рядів (1.10)  $u_{1nm}(t), u_{2nm}(t), \dots, u_{5nm}(t)$ . Структура системи має вигляд

$$\begin{aligned}
& b_{11m\bar{n}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{1mn}}{\partial t^2} + a_{11m\bar{n}\bar{n}} u_{1mn} + a_{12m\bar{n}\bar{n}} u_{2mn} + a_{13m\bar{n}\bar{n}} u_{3mn} + \\
& + b_{14m\bar{n}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{4mn}}{\partial t^2} + a_{14m\bar{n}\bar{n}} u_{4mn} + a_{15m\bar{n}\bar{n}} u_{5mn} = q_{1\bar{n}\bar{n}}; \\
& a_{21m\bar{n}\bar{n}} u_{1mn} + b_{22m\bar{n}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{2mn}}{\partial t^2} + a_{22m\bar{n}\bar{n}} u_{2mn} + a_{23m\bar{n}\bar{n}} u_{3mn} + \\
& + a_{24m\bar{n}\bar{n}} u_{4mn} + b_{25m\bar{n}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{5mn}}{\partial t^2} + a_{25m\bar{n}\bar{n}} u_{5mn} = q_{2\bar{n}\bar{n}}; \\
& a_{31m\bar{n}\bar{n}} u_{1mn} + a_{32m\bar{n}\bar{n}} u_{2mn} + b_{33m\bar{n}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{3mn}}{\partial t^2} + a_{33m\bar{n}\bar{n}} u_{3mn} + \\
& + b_{34m\bar{n}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{4mn}}{\partial t^2} + a_{34m\bar{n}\bar{n}} u_{4mn} + a_{35m\bar{n}\bar{n}} u_{5mn} = q_{3\bar{n}\bar{n}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_{41m\bar{m}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{1mn}}{\partial t^2} + a_{41m\bar{m}\bar{n}} u_{1mn} + a_{42m\bar{m}\bar{n}} u_{2mn} + b_{43m\bar{m}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{3mn}}{\partial t^2} + a_{43m\bar{m}\bar{n}} u_{3mn} + \\
& + b_{44m\bar{m}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{4mn}}{\partial t^2} + a_{44m\bar{m}\bar{n}} u_{4mn} + a_{45m\bar{m}\bar{n}} u_{5mn} = 0; \\
& a_{51m\bar{m}\bar{n}} u_{1mn} + b_{52m\bar{m}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{2mn}}{\partial t^2} + a_{52m\bar{m}\bar{n}} u_{2mn} + a_{53m\bar{m}\bar{n}} u_{3mn} + \\
& + a_{54m\bar{m}\bar{n}} u_{4mn} + b_{55m\bar{m}\bar{n}} \frac{\partial^2 u_{5mn}}{\partial t^2} + a_{55m\bar{m}\bar{n}} u_{5mn} = 0.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Тут позначено:  $a_{11m\bar{m}\bar{n}}, a_{12m\bar{m}\bar{n}}, \dots, a_{55m\bar{m}\bar{n}}$  – величини, залежні від параметрів жорсткості і геометрії оболонки і поздовжніх ребер;  $b_{11m\bar{m}\bar{n}}, b_{14m\bar{m}\bar{n}}, \dots, b_{55m\bar{m}\bar{n}}$  – величини, залежні від інерційних і геометричних параметрів оболонки, поздовжніх ребер і приєднаних мас. Параметри  $\bar{m}, \bar{n}$  – визначають кількість рівнянь системи (1.11) і приймають ті ж значення, що і  $m, n$ ;  $q_{1\bar{m}\bar{n}}, q_{2\bar{m}\bar{n}}, q_{3\bar{m}\bar{n}}$  – величини, що залежні від поверхневого навантаження.

Відмітимо, що коли система (1.11) симетрична (наприклад для циліндричної оболонки з симетричними шарами відносно серединної поверхні оболонки), її розв'язок можна отримати методом розкладення за формами власних коливань з використанням інтегралу Дюамеля [10,19]. В цьому випадку точність розв'язку залежить тільки від кількості утримуваних членів в рядах (1.10).

В загальному випадку необхідно використовувати наближений чисельний метод розв'язування задачі у часі, а саме, явну скінченно-різницеву схему при заданих початкових умовах [3].

## §2. Результати досліджень.

На прикладі тришарової циліндричної оболонки з симетрично розташованими шарами та вісьмома поздовжніми ребрами, яка знаходиться під дією короткочасного імпульсу зовнішнього тиску, досліджена збіжність явної різницевої схеми при нульових початкових умовах. Розміри оболонки: висота  $H = 0,25$  м, радіус  $r = 0,25$  м. Зовнішні шари оболонки мають однакові параметри:  $h^{(1)} = h^{(3)} = 0,4 \cdot 10^{-3}$  м;  $\nu_1^{(1)} = \nu_2^{(1)} = \nu_1^{(3)} = \nu_2^{(3)} = 0,3$ ;  $E_1^{(1)} = E_2^{(1)} = E_1^{(3)} = E_2^{(3)} = 0,7 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>;  $G_{12}^{(1)} = G_{13}^{(1)} = G_{23}^{(1)} = G_{12}^{(3)} = G_{13}^{(3)} = G_{23}^{(3)} = 0,26 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>;  $\rho^{(1)} = \rho^{(3)} = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Параметри середнього шару:  $h^{(2)} = 0,2 \cdot 10^{-3}$  м;  $\nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} = 0,3$ ;  $E_1^{(2)} = E_2^{(2)} = 0,4 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>;  $G_{12}^{(2)} = G_{13}^{(2)} = G_{23}^{(2)} = 0,2 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>;  $\rho^{(2)} = 1,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Момент інерції поперечного перерізу всіх ребер однаковий і дорівнює  $I_\theta = 0,827 \cdot 10^{-10}$  м<sup>4</sup>.

Наведені на рис. 1 результати, обчислені при утриманні 17 членів ( $n = 0,8, \dots, 128$ ) рядів по коловій та 11 членів ( $m = 1,3, \dots, 21$ ) рядів по поздовжній координатам. На

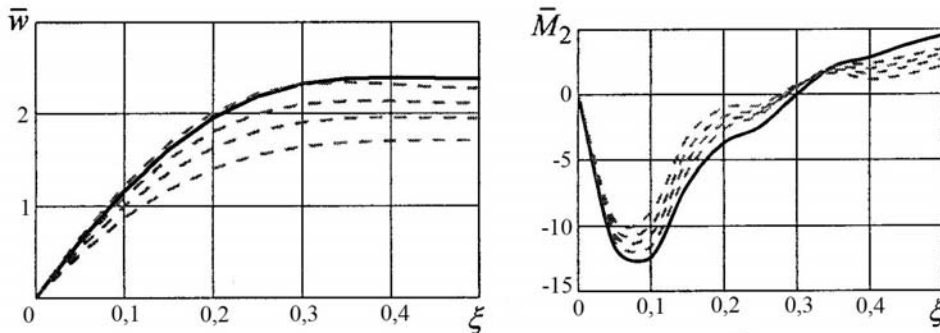


Рис. 1

рисунокх рисою позначено безрозмірні значення прогину  $\bar{w}$  і згинальних моментів  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ ,  $\bar{\xi} = x/L$ . Суцільні лінії – результат розрахунку методом розкладення розв'язку за формами власних коливань, штрихові лінії – при використанні явної різницевої схеми за часом. Як видно із графіків, результати, які отримано за різницевою схемою, наближаються до результатів, отриманих методом розкладення за формами власних коливань. Різниця між максимальними значеннями прогину на лінії з'єднання оболонки з ребром при крокові за часом  $\Delta t = t_{\text{зад}}/10$  становить 18,3%; при  $\Delta t = t_{\text{зад}}/20$  – 10,8%; при  $\Delta t = t_{\text{зад}}/40$  – 6,1%; при  $\Delta t = t_{\text{зад}}/160$  – 2,2%; між максимальними значеннями колового згинального моменту  $\bar{M}_2$ , відповідно, 18,4%, 13,6%, 9,9%, 6,8%. Таким чином, маємо оцінку точності результатів розрахунку за різницевою схемою.

Проведені розрахунки напруженого стану замкнутої тришарової шарнірно обпертої конічної оболонки, підкріпленої вісьмома поздовжніми ребрами, у якої радіус меншої основи  $r_1 = 0,175$  м. Інші параметри такі, як і наведені вище для циліндричної оболонки. Крім того, виконані розрахунки напруженого стану оболонки з несиметричними шарами і оболонки з масами. Оболонка з несиметричними шарами має відмінні від наведених вище параметри зовнішнього шару, а саме:  $E_1^{(3)} = E_2^{(3)} = 2,1 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>;  $G_{12}^{(3)} = G_{13}^{(3)} = G_{23}^{(3)} = 0,81 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>;  $\rho^{(3)} = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. У оболонки з симетричними шарами і масами останні розташовувались на кожному ребрі в точках  $\xi_{i_m} = 0,5L/r$ . Величина кожної маси дорівнювала  $m_{i_m} = m_{\text{об}}/8$  при  $l_{i_m} = 0$ .

Оболонка знаходиться під дією зовнішнього тиску, фронт якого переміщується вздовж її осі зі сторони меншої основи. Розрахунки проведені для п'яти положень фронту хвилі тиску, а саме:  $0,2H$  ( $\bar{\xi} = x/L = 0,8$ );  $0,4H$  ( $\bar{\xi} = 0,6$ );  $0,6H$  ( $\bar{\xi} = 0,4$ );  $0,8H$  ( $\bar{\xi} = 0,2$ );  $H$  ( $\bar{\xi} = 0$ ). Навантаження в часі змінюється по ступінчастому закону і діє протягом часу  $t_n$ , поки фронт хвилі переміщується вздовж осі оболонки. Вказаним вище положенням фронту хвилі тиску при швидкості переміщення 340 м/с відповідають значення часу дії тиску  $t_n = 0,147 \cdot 10^{-3}$  с;  $0,294 \cdot 10^{-3}$  с;  $0,441 \cdot 10^{-3}$  с;  $0,588 \cdot 10^{-3}$  с;  $0,735 \cdot 10^{-3}$  с. Як і для розрахунку циліндричної оболонки, по коловій координаті утримувались члени з  $n = 0, 8, \dots, 128$ , а по поздовжній координаті – члени з  $m = 0, 1, 2, \dots, 21$  для переміщень  $u, \psi_1$  та члени з  $m = 1, 2, \dots, 21$  для переміщень  $v, w, \psi_2$ .

Розрахунки виконано методом скінченних різниць за явною схемою в часі при нульових початкових умовах і крокові  $\Delta t = t/160$ , де  $t$  – момент часу, в який визначається напружений стан оболонки.

На рис. 2 наведено форми деформування оболонки з симетричними шарами вздовж лінії контакту ребер з оболонкою (а) і вздовж лінії, розташованій по середині

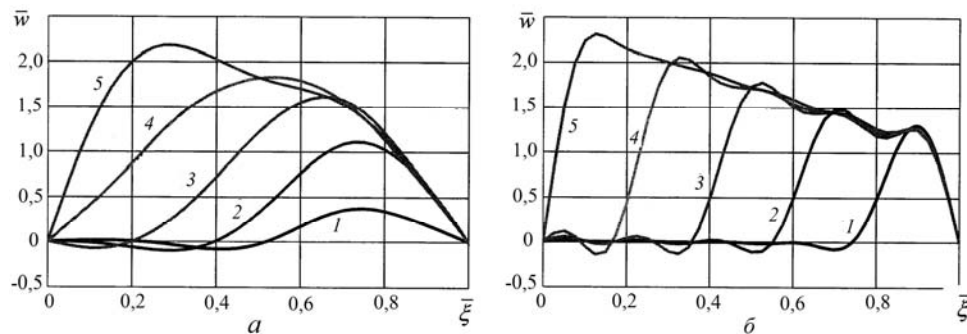


Рис. 2

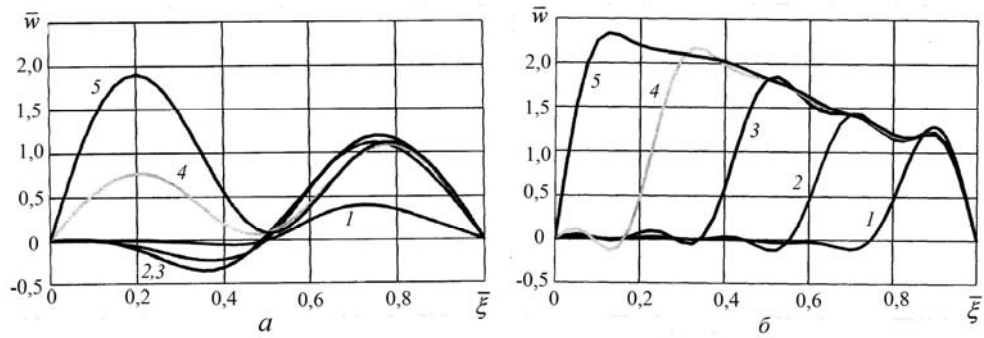


Рис. 3

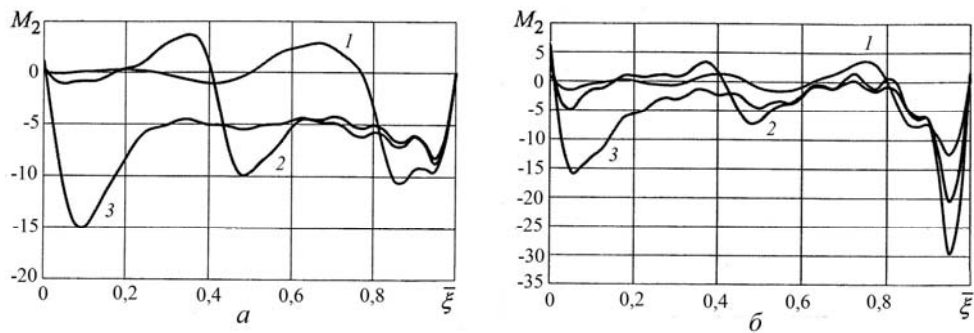


Рис. 4

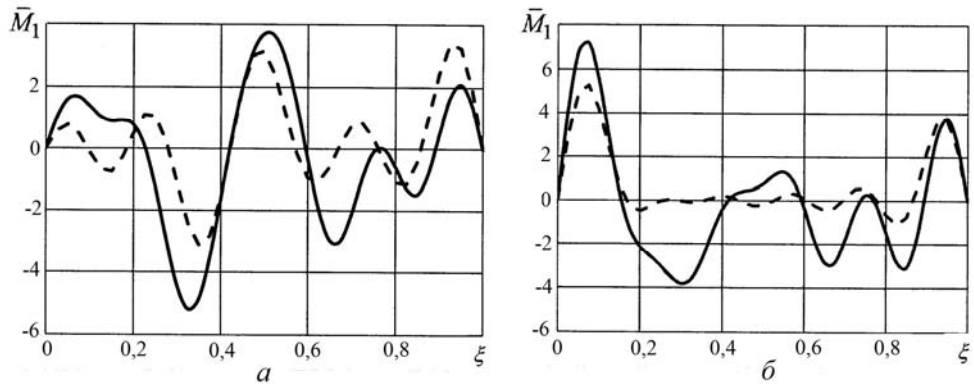


Рис. 5

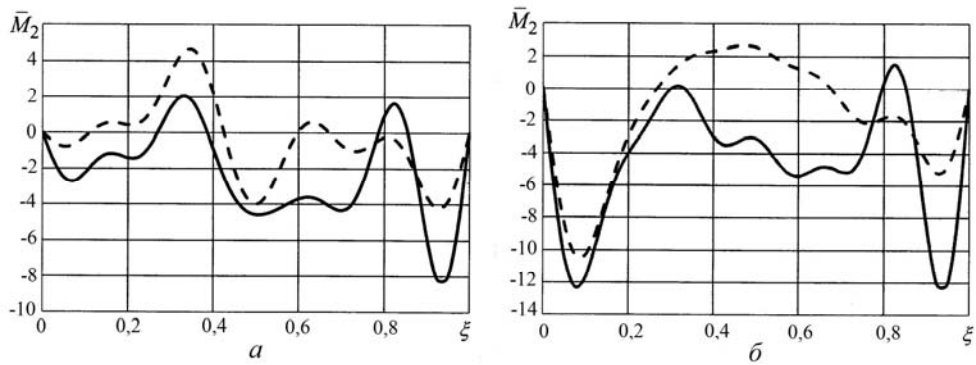


Рис. 6

між ребрами (б) в момент часу  $t = 0,147 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ . При цьому криві 1 – 5 відповідають вказаним вище п'яти положенням фронту хвилі ( $0,2H - H$ ).

Як видно з наведених кривих, максимальний прогин зміщується від меншої основи до більшої відповідно з рухом хвилі тиску. На частині оболонки, куди хвиля тиску не дійшла, прогин оболонки в заданий момент часу незначний. У випадку несиметричного розташування шарів оболонки форма її деформування близька до наведеної вище.

У оболонки з масами зміна прогину вздовж ребер (рис. 3, а) суттєво відрізняється від випадку оболонки без мас. В місці розташування маси виникає вузол форми деформування (прогин близький до нуля). В той же час, прогин оболонки вздовж лінії, яка розташована по середині між ребрами, не має такої особливості (рис. 3, б).

Форми деформування оболонки, отримані при кількох інших значеннях часу протікання, відрізняються від наведених на рис. 2, але максимальні значення прогину змінюються незначно і тенденція зміщення максимуму прогину в сторону руху хвилі тиску зберігається.

На рис. 4 для оболонки з несиметричними шарами представлені згинальні моменти  $M_2$  на лінії контакту ребер з оболонкою в моменти часу  $t = 0,147 \cdot 10^{-3} \text{ с}$  (а) і  $t = 0,735 \cdot 10^{-3} \text{ с}$  (б). Криві 1 – 3 відповідають положенню фронту хвилі, відповідно,  $\xi = 0,8; 0,4; 0$ . Як видно з наведених графіків, в місцях знаходження фронту хвилі в обох випадках має місце збільшення моменту  $M_2$ , але при  $t = 0,735 \cdot 10^{-3} \text{ с}$  максимального значення цей момент досягає в зоні крайового ефекту біля меншої основи.

У оболонки з симетричним розташуванням шарів залежність колового моменту  $M_2$  від  $\xi$  подібна до наведених на рис. 4, але його максимальні значення менші приблизно в 1,5 рази.

Далі, на рис. 5, 6 наведено дані для згинальних моментів  $M_1, M_2$  в оболонці з симетричними шарами без маси (пунктирні криві) і з масами (суцільні криві). На рис. 5, а та 6, а результати отримані в момент часу  $t = 0,441 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ; на рис. 5, б та 6, б – в момент часу  $t = 0,735 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ . Порівняння отриманих кривих показує, що на відміну від переміщень, які в місцях розташування мас зменшуються, згинальні моменти в оболонці з масами суттєво більші, ніж в оболонці без мас.

### Висновки.

В рамках теорії оболонок, на базі гіпотез Тимошенка, розроблена методика визначення напружено-деформованого стану ребристих ортотропних конічних оболонок з несиметричними шарами і приєднаними масами під дією нестационарних навантажень. Рівняння руху оболонки в переміщеннях точок середньої поверхні отримані з допомогою варіаційного принципу Гамільтона. Для розв'язування рівнянь руху використані тригонометричні ряди за просторовими координатами і явна скінченно-різницева схема у часі.

На прикладі циліндричної шаруватої оболонки виконано порівняння результатів, отриманих за допомогою явної скінченно-різницевої схеми з точним розв'язком задачі у часі методом його розкладення за формами власних коливань. Отримані оцінки точності обчислень чисельним методом в залежності від кількості кроків за часовою координатою.

Проведені дослідження напружено-деформованого стану конічної оболонки з симетричними і несиметричними шарами, поздовжніми ребрами, масами, під дією короткочасного осесиметричного зовнішнього навантаження, розподіленого на частині оболонки, фронт якого переміщується від меншої основи оболонки до більшої. Отримано, що максимальний прогин оболонки зміщується від меншої основи до більшої відповідно з рухом хвилі тиску. На частині оболонки, куди хвиля тиску не дійшла, прогин оболонки в заданий початковий момент часу незначний. Як при симетричному, так і при несиметричному розташуванні шарів, форма деформування оболонки незначно відрізняються одна від одної. У оболонки з масами зміна прогину вздовж



ребер, в середньому перерізі яких розташовані маси, суттєво відрізняється від випадку оболонки без мас. В місці розташування маси виникає вузол форми деформування (прогин близький до нуля). В той же час, прогин оболонки вздовж лінії, яка розташована по середині між ребрами, де маса відсутня, мало відрізняється від прогину оболонки без мас.

В оболонках як з симетричними, так і з несиметричними шарами в місцях знаходження фронту хвилі має місце збільшення колового згинального моменту  $M_2$  на ребрах. Максимальної величини цей момент при деяких значеннях поточкового часу досягає в зоні крайового ефекту біля меншої основи. При симетричному розташуванні шарів максимальні значення  $M_2$  менші в порівнянні з розглянутим варіантом несиметричної оболонки приблизно в 1,5 рази.

На відміну від переміщень, які в місцях розташування мас зменшуються, згинальні моменти в оболонці з масами суттєво більші, ніж в оболонці без мас.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** В рамках теорії оболонок на базі гіпотез Тимошенка розроблена методика визначення характеру коливань і напружено-деформованого стану ребристих ортотропних конічних оболонок з несиметричними шарами, які взаємодіють з масами, під дією динамічних навантажень. Рівняння коливань оболонки в переміщеннях точок серединної поверхні отримані за допомогою варіаційного принципу Гамільтона. Для розв'язування системи рівнянь руху оболонки використані тригонометричні ряди за просторовими координатами і явна скінченно-різницева схема за часом. На прикладі циліндричної шаруватої оболонки отримані оцінки точності обчислень скінченно-різницевою методом в залежності від кількості кроків за часом. Досліджено напружено-деформований стан конічної ортотропної оболонки з симетричними і несиметричними шарами, поздовжніми ребрами, масами, під дією короткочасного осесиметричного зовнішнього навантаження, розподіленого на частині оболонки, фронт якого переміщується від меншої основи оболонки до більшої.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** коливання, багат шарова ортотропна ребриста конічна оболонка, приєднані маси, пружна основа, метод тригонометричних рядів за просторовими координатами, явна скінченно-різницева схема у часі, механічні ефекти.

1. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных оболочек. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 384 с.
2. *Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках (под ред. Гузя А.Н.) – Киев: Изд.-полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
3. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – Москва: Наука, 1978. – 512 с.
4. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – Киев: Изд.-полиграф. центр “Киевский ун-т”, 2005. – 536 с.
5. *Луговой П.З., Скосаренко Ю.В., Орленко С.П.* Применение метода сплайн-коллокации для решения задач статики и динамики конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек // Доп. НАН України – 2019. – № 8. – С. 25 – 33.
6. *Мейш Ю.А.* До розрахунку вимушених осесиметричних коливань тришарових конічних оболонок при дії нестационарного навантаження // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. – 2004. – 32, № 3. – С. 154 – 160.
7. *Методы расчета оболочек* (Под общей ред. Гузя А.Н.): В 5-и томах. Т. 2. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Теория ребристых оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 368 с.
8. *Орленко С.П.* Вплив несиметрії тришарових циліндричних оболонок з легким заповнювачем на їх напружено-деформований стан при нестационарних навантаженнях // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – № 31. – С. 42 – 52.
9. *Орленко С.П.* Чисельне моделювання коливань тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним неоднорідним заповнювачем // Доп. НАН України. – 2020. – № 8. – С. 35 – 42.
10. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – Москва: Машиностроение, 1985. – 472 с.

11. *Успехи механики* (под общей ред. Гузя А.Н.): В 6-и томах. Т. 3. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. – Киев: «А.С.К.», 2007. – С. 141 – 175.
12. *Anik'ev I.I., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A.* Dynamic Loading of Cylindrical and Spherical Bodies Interacting with a Shock Wave // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 12. – P. 1405 – 1410.
13. *Banerjee J.R., Cheung C.W., Morishima R., Perera M., Njuguna J.* Free vibration of a three – layered sandwich beam using the dynamic stiffness method and experiment // *Int. J. of Solids Struct.* – 2007. – **44**, N 22. – P.7543 – 7563.
14. *Carrera E.* On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells // *Computers and Struct.* – 2004. – **82**, N 7-8. – P. 541 – 554.
15. *Kreja I.* A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. // *Cent. Eur. J. Engng., Published Online.* – 2011 – **1**, N 1 – P. 59 – 80.
16. *Lugovoi P.Z., Gaidaichuk V.V., Skosarenko Yu.V., Kotenko K.E.* Stress–Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core Under Nonstationary Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2021 – **57**, N 4. – P. 395 – 404.
17. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P.* Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution under Nonstationary Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 1. – P. 22 – 32.
18. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Orlenko S.P.* Numerical Simulation of the Dynamics of Spherical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Ribs Under a Shockwave // *Int. Appl. Mech.* – 2020 – **56**, N 5. – P. 590 – 598.
19. *Lugovoi P.Z., Sirenko V.N., Skosarenko Yu.V., Batutina, T.Ya.* Mathematical Modeling of Cylindrical Adapter Dynamics under the Action of Local Momentary Loads // *Sci. and Innovation.* – 2016. – **12**, N 3. – P. 35 – 42.
20. *Lugovoi P.Z., Skosarenko Yu.V., Orlenko S.P., Shugailo A.P.* Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 5. – P. 524 – 533.
21. *Meish V.F., Meish Yu.A., Arnaut N.V.* Numerical Analysis of Nonstationary Vibrations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Different Geometry // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 4. – P. 426 – 433.
22. *Meish V.F., Meish Yu. A., Pavlyuk A.V.* Dynamics of a Three-Layer Elliptic Cylindrical Shell Reinforced with Discrete Rings // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 2. – P. 172 – 179.
23. *Pagano N.J., Hatfield S.J.* Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites // *AIAA J.* – 1972. – **10**. – P. 931 – 933.
24. *Qatu M.S.* *Vibration of Laminated Shells and Plates.* – New York: Academic Press, 2004. – 426 p.
25. *Qatu M.S., Asadi E., Wang W.* Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000 – 2100 // *Open J. Composite Materials.* – 2012. – **2**, N 3. – P. 61 – 86.
26. *Shul'ga N.A., Meish V.F., Khamrenko Yu.A.* Nonstationary Oscillations of Three-Layer Cylindrical Shells under Axisymmetric Loading // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 8. – P. 751 – 758.

Надійшла 27.05.2021

Затверджена до друку 31.05.2022