

І. Ф. Киричок<sup>1</sup>, О. А. Чернюшок<sup>2</sup>

**ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА І ДОВГОВІЧНІСТЬ ГНУЧКОЇ  
НЕПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З П'ЄЗОАКТУАТОРАМИ  
ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАННЯХ**

<sup>1</sup>*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: term@inmech.kiev.ua;*  
<sup>2</sup>*Національний університет харчових технологій,  
вул. Володимирська, 68, 01601, Київ, Україна; e-mail: chernyshokolqa@ukr.net.*

**Abstract.** A statement of the problem on the thermomechanical behavior and durability of the hingedly fixed thermo-visco-elastic cylindrical shell with piezoelectric actuators during the forced resonant vibrations and dissipative heating with taking into account the geometrically nonlinearity. An influence of geometrical nonlinearity and heat exchange conditions on the surfaces on the amplitude- and temperature frequency characteristics of the forced vibrations of the shell and the thermal failure of the system is investigated. The capability of active damping of the flexural vibration mode by means of piezoactuators is studied.

**Key words:** resonance vibration, dissipative heating, inelastic material, piezoelectric actuators.

**Вступ.**

Тонкостінні циліндричні оболонки з непружних матеріалів є складовими елементами конструкцій в багатьох галузях сучасної техніки. Часто вони експлуатуються в умовах нестаціонарних, зокрема, гармонічних навантажень з високими амплітудами і частотами близькими до резонансних. Такі умови експлуатації вимагають аналізу механічного стану тонкостінного елемента при великих прогинах з врахуванням геометричної нелінійності і дисипативного розігріву, обумовленого внутрішніми втратами в матеріалі, а також розрахунку часу працездатності об'єкта. Для контролю вимушених резонансних коливань тонкостінних елементів часто при проектуванні використовують п'єзоелектричні включення, що виконують роль актуаторів, при підведенні до яких різниці електричних потенціалів з відповідною частотою і фазою можна збуджувати або гасити коливання, які обумовлені механічним навантаженням.

Досягнення в області активного керування стаціонарними і нестаціонарними коливаннями тонкостінних елементів конструкцій п'єзоелектричними актуаторами і сенсорами в ізотермічній постановці задачі відображені в монографіях [7, 17, 18] та багатьох наукових статтях вітчизняних і зарубіжних авторів [6, 12]. Дослідження впливу дисипативного розігріву на термомеханічну поведінку тонкостінних елементів конструкцій із непружних пасивних (без п'єзоефекта) і п'єзо-активних матеріалів представлені в монографіях [3, 4], а також в оглядових статтях [8, 11, 12]. Вплив температурної залежності матеріалів, деформацій поперечного зсуву, геометричної нелінійності на ефективність праці п'єзо-електричних актуаторів і сенсорів для демпфування за їх допомогою вимушених коливань тонкостінних балок, пластин і оболонок із пасивних в'язкопружних матеріалів досліджується в наукових статтях [10, 13 – 15], багато з яких аналізується в оглядах [9, 11].

В даній статті в рамках класичної теорії оболонок Кірхгофа – Лява при врахуванні геометричної нелінійності в квадратичному наближенні розглядається задача про термомеханічну поведінку і довговічність в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоактуаторами при осесиметричному моногармонічному механічному або електричному навантаженнях. На основі чисельних розрахунків досліджується вплив геометричної нелінійності та умов теплообміну на поверхнях оболонки на частотні залежності максимальних значень амплітуди прогинів і температури вібророзігріву шарнірно закріпленої оболонки з п'єзоактуатором. Оцінюється довговічність функціонування системи в умовах високих рівнів температур дисипативного розігріву.

### 1. Постановка задачі.

Розглянемо гнучку циліндричну оболонку з радіусом серединної поверхні  $R$ , довжиною  $l$  і товщиною  $h_3$ . Оболонка віднесена до циліндричної системи координат  $\alpha, \theta, z$  з початком товщинної координати  $z = 0$  на серединній поверхні та виготовлена з пасивного (без п'єзоєфекту) трансверсально ізотропного матеріалу. Поверхні  $z = \pm h_3/2$  жорстко скріплені з п'єзоелектричними шарами товщиною  $h_1$  і  $h_2$ , відповідно. П'єзошари, які виконують роль актуатора, виготовлені із поляризованої вздовж товщинної координати п'єзокераміки. Зовнішні поверхні і поверхні п'єзоактуатора, які контактують з пасивним шаром оболонки, покриті суцільними нескінченно тонкими електродами. Останні підтримуються при нульовому електричному потенціалі  $\varphi_{1,2}(\pm h_0/2) = 0$ . Електродовані зовнішні поверхні  $z = \mp H_{1,2}$  ( $H_{1,2} = h_3/2 + h_{1,2}$ ) вздовж твірної оболонки нескінченно тонкими кільцевими розрізами з координатами  $\alpha_1, \alpha_2$  ( $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq l$ ) розділені на окремі ділянки. Матеріали пасивного і п'єзоактивних шарів вважаємо в'язкопружними. Їх властивості описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності типу  $a \bullet b = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau$ , які для гармонічних процесів деформування зводяться до операцій множення комплексних величин  $a \bullet b = (a' + ib'')(b' + ib'')$ .

Механічні коливання оболонки збуджуються осесиметричним поверхневим тиском  $q_z = q_0 + q'_z(\alpha) \cos \omega t$  з постійною  $q_0$  складовою і складовою, що гармонічно змінюється за часом  $t$  з амплітудою  $q'_z$  і коловою частотою  $\omega$ , близькою до резонансної. Для підсилення або зниження амплітуди механічних коливань з тою ж частотою і фазою або протифазою, відповідно, до зовнішніх електродів актуатора на ділянках  $s^\pm = 2\pi R \Delta_\alpha$  ( $\Delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ) підводиться різниця електричних потенціалів з амплітудою  $\pm^{1,2} V_a$ . На ділянках  $\alpha < \alpha_1, \alpha > \alpha_2$  електроди закорочені ( $V_a = 0$ ). Вважаємо, що торці оболонки шарнірно закріплені, а на її поверхнях реалізуються умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем температури  $T_c$ .

Електротермомеханічна поведінка такої гнучкої оболонки описується нелінійною теорією шаруватих оболонок, що ґрунтується на справедливості для механічних змінних гіпотез Кірхгофа – Лява [1]. Відносно електричних величин в п'єзошарах приймаємо, що складовими  $D_\alpha, D_\theta$  вектора електричної індукції і  $E_\alpha, E_\theta$  вектора електричної напруженості можна знехтувати. При цьому з рівнянь електростатики витікає, що нормальна складова  $D_z = \text{const}$  не залежить від товщинної координати  $z$  [3]. Температуру дисипативного розігріву оболонки вважаємо постійною по товщині пакету шарів.

При врахуванні вищеприйнятих припущень тривимірні визначальні рівняння поляризованої вздовж осі  $z$  п'єзокераміки [3] для шарів актуатора приймають вигляд

$${}^m\sigma_\alpha = {}^m b_{11} \bullet e_\alpha + {}^m b_{12} \bullet e_\theta - {}^m b_{31} \bullet E_z; \quad {}^m\sigma_\theta = {}^m b_{12} \bullet e_\alpha + {}^m b_{11} \bullet e_\theta - {}^m b_{31} \bullet E_z; \quad (1)$$

$${}^m D_z = {}^m b_{31} \bullet (e_\alpha + e_\theta) + {}^m b_{33} \bullet {}^m E_z; \quad {}^m E_z = -\partial \varphi_{1,2} / \partial z \quad (m=1, 2, 3). \quad (2)$$

В залежностях (1), (2) позначено

$${}^m b_{11} = 1 / [{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E^2)]; \quad {}^m \nu_E = -{}^m s_{12}^E / {}^m s_{11}^E; \quad {}^m b_{12} = {}^m \nu_E {}^m b_{11};$$

$${}^m b_{31} = {}^m d_{31} / [{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E^2)]; \quad {}^m b_{33} = {}^m \varepsilon_{33}^T (1 - {}^m k_p^2); \quad {}^m k_p^2 = (2 {}^m b_{31} {}^m d_{31}) / {}^m \varepsilon_{33}^T; \quad (3)$$

${}^m s_{ik}^E = {}^m s_{ik}' (1 - i {}^m \delta_{ik}^s)$ ;  ${}^m d_{31} = {}^m d_{31}' (1 - i {}^m \delta_{31}^d)$ ;  ${}^m \varepsilon_{33}^T = {}^m \varepsilon_{33}' (1 - i {}^m \delta_{33}^e)$  – комплексні електро-механічні податливості, п'єзомодулі і діелектричні проникливості п'єзокераміки;  ${}^m E_z$  – нормальна складова вектора електричної напруженості. Для в'язкопружного матеріалу пасивного шару ( $m=3$ ) справедливі рівності (1), в яких необхідно прийняти  ${}^3 b_{31} = 0$ ;  ${}^3 b_{11} = E / (1 - \nu^2)$ ;  ${}^3 b_{12} = \nu E$ ;  ${}^3 \nu_E = \nu = \text{const}$ ;  $E$  і  $\nu$  – в'язкопружний модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона. Далі знак  $\bullet$  опускаємо.

Залежності між амплітудними значеннями деформацій і переміщень мають вигляд [1]

$$e_\alpha = \varepsilon_\alpha + z \kappa_\alpha; \quad e_\theta = \varepsilon_\theta + z \kappa_\theta;$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{du}{d\alpha} + \frac{1}{2} g_\alpha^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}; \quad \kappa_\alpha = \frac{d g_\alpha}{d\alpha}; \quad g_\alpha = -\frac{dw}{d\alpha}; \quad \kappa_\theta = -\frac{\varepsilon_\theta}{R}, \quad (4)$$

де  $u$  і  $w$  – поздовжнє і поперечне переміщення.

Після інтегрування рівностей (1), (2), (4) за координатою  $z$  з врахуванням прийнятих гіпотез і електростатичних граничних умов знаходимо вирази для електричних складових

$${}^m D_z = -{}^m b_{33} {}^m V_a / h_m + {}^m b_{31} [\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\theta \mp \tilde{h}_m (\kappa_\alpha + \kappa_\theta)];$$

$${}^m E_z = -{}^m V_a / h_m + {}^m \gamma_{31} (\mp \tilde{h}_m - z) (\kappa_\alpha + \kappa_\theta) \quad (m=1, 2). \quad (5)$$

Визначальні співвідношення для зусиль і моментів записуються у вигляді:

$$N_\alpha = C_{11} \varepsilon_\alpha + \tilde{C}_{12} \varepsilon_\theta + K_{11} \kappa_\alpha + N_E;$$

$$N_\theta = C_{12} \varepsilon_\alpha + \tilde{C}_{11} \varepsilon_\theta + K_{12} \kappa_\alpha + N_E;$$

$$M_\alpha = K_{11} \varepsilon_\alpha + \tilde{K}_{12} \varepsilon_\theta + D_{11} \kappa_\alpha + M_E;$$

$$M_\theta = K_{12} \varepsilon_\alpha + \tilde{K}_{11} \varepsilon_\theta + D_{12} \kappa_\alpha + M_E. \quad (6)$$

В залежностях (5), (6) позначено

$$C_{1j} = \sum_{m=1}^3 {}^m b_{1j} h_m; \quad K_{1j} = \sum_{m=1}^2 {}^m b_{1j} h_{m2}; \quad D_{1j} = \sum_{m=1}^3 {}^m b_{1j} h_{m3} + \frac{1}{12} \sum_{m=1}^2 {}^m \gamma_{33} h_m^3;$$

$$\tilde{C}_{1j} = C_{1j} - K_{1j} / R; \quad \tilde{K}_{1j} = K_{1j} - D_{1j} / R \quad (j=1, 2); \quad {}^m \gamma_{31} = {}^m b_{31} / {}^m b_{33};$$

$${}^m \gamma_{33} = {}^m \gamma_{31} {}^m b_{31}; \quad h_{12} = -h_1 (h_1 + h_3); \quad h_{22} = h_2 (h_2 + h_3); \quad \tilde{h}_{1,2} = (h_3 + h_{1,2}) / 2; \quad (7)$$

$$h_{j3} = (4h_j^3 + 6h_j^2 h_3 + 3h_j h_3^2) \quad (j=1, 2); \quad h_{33} = h_3^3 / 4;$$

$$N_E = {}^1 b_{31} {}^1 V_a + {}^2 b_{31} {}^2 V_a; \quad N_E = -\tilde{h}_1 {}^1 b_{31} {}^1 V_a + \tilde{h}_2 {}^2 b_{31} {}^2 V_a.$$

При врахуванні інерційних членів згідно принципу Даламбера нелінійні рівняння осесиметричних коливань гнучкої циліндричної оболонки мають вигляд [1]:

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} = \rho_\bullet \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{N_\theta}{R} + \rho_\bullet \omega^2 w + q_z = 0; \quad \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} - \tilde{Q}_\alpha - N_\alpha \mathcal{G}_\alpha = 0 \quad (8)$$

з граничними умовами шарнірного закріплення торців

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_\alpha = 0 \quad (\alpha = 0, l). \quad (9)$$

В рівняннях (8) позначено:  $\tilde{Q}_\alpha = Q_\alpha - N_\alpha \mathcal{G}_\alpha$ ;  $\rho_\bullet = \rho_1 h_1 + \rho_1 h_1 + \rho_3 h_3$ ;  $\rho_1, \rho_2$  і  $\rho_3$  – питомі густини матеріалів п'єзоактивних і пасивного шарів.

В силу припущення про незалежність температури від координати  $z$  усереднене за період коливань рівняння теплопровідності записується наступним чином:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{2\alpha_s}{\lambda H} (T - T_c) + \frac{\omega}{2\lambda H} \langle W \rangle; \quad (10)$$

$$T = T_0 \quad (t = 0); \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \pm \alpha_{0,l} (T - T_c) \quad (\alpha = 0, l),$$

де

$$\langle W \rangle = \int_{(H)} ({}^m \sigma_\alpha'' e_\alpha' - {}^m \sigma_\alpha' e_\alpha'' + {}^m \sigma_\theta'' e_\theta' - {}^m \sigma_\theta' e_\theta'' + {}^m D_z' {}^m E_z'' - {}^m D_z'' {}^m E_z') dz \quad (11)$$

– усереднена за товщиною оболонки швидкість дисипації;  $\alpha_s = (\alpha_+ + \alpha_-) / 2$ ;  $\alpha_{0,l}$  – коефіцієнти теплообміну на поверхнях і торцях оболонки;  $\lambda, a$  – усереднені коефіцієнти тепло – і температуропровідності;  $T_0$  – початкова температура оболонки.

## 2. Методика побудови розв'язку задачі.

При побудові розв'язку поставленої задачі систему рівнянь (4), (6), (8) відносно шуканих величин  $u, w, \mathcal{G}_\alpha, N_\alpha, \tilde{Q}_\alpha, M_\alpha$  представимо у вигляді звичайних диференціальних рівнянь нормальної форми

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = -\mathcal{G}_\alpha;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \tilde{a}_{11} \frac{w}{R} + a_{13} (N_\alpha + N_E) + a_{14} (M_E + M_E) - \frac{1}{2} \mathcal{G}_\alpha^2;$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_\alpha}{\partial \alpha} = \tilde{a}_{21} \frac{w}{R} + a_{23} (N_\alpha + N_E) + a_{14} (M_\alpha + M_E); \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{1}{R} \left[ \tilde{a}_{31} \frac{w}{R} + a_{32} (N_\alpha + N_E) + a_{34} (M_\alpha + M_E) + M_E \right] - q_z + \rho_\bullet \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} = \rho_\bullet \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} = \tilde{Q}_\alpha + N_\alpha \mathcal{G}_\alpha.$$

Тут

$$\tilde{a}_{11} = -(a_{14} \tilde{K}_{12} + a_{13} \tilde{C}_{12}); \quad \tilde{a}_{21} = -(a_{14} \tilde{C}_{12} + a_{24} \tilde{K}_{12});$$

$$a_{14} = a_{23} = -K_{11} / \Delta; \quad a_{13} = D_{11} / \Delta; \quad a_{24} = C_{11} / \Delta; \quad \Delta = D_{11} C_{11} - K_{11}^2; \quad (13)$$

$$a_{31} = \tilde{C}_{11} + C_{12} \tilde{a}_{11} + K_{12} \tilde{a}_{21}; \quad a_{32} = C_{12} a_{13} + K_{12} a_{23}; \quad a_{34} = C_{12} a_{14} + K_{12} a_{24}.$$

При навантаженнях типу  $q_z = q_z^0 + q_z' \cos \omega t - q_z'' \sin \omega t$  ( $q_z'' = 0$ ), нехтуючи перехідними процесами, наближений розв'язок нелінійних рівнянь (12) будемо у вигляді

гармонічних за часом рядів [3]. При побудові розв'язку обмежимося одночастотним наближенням для змінних  $A = \{w, g_\alpha, M_\alpha, \tilde{Q}_\alpha\}$ , які характеризують згинальні процеси в оболонці, та утриманням в рядах членів розкладу до другої гармоніки включно для змінних  $B = \{u, N_\alpha\}$  плоского деформування оболонки, так що

$$A = {}^0A + {}^1A' \cos \omega t - {}^1A'' \sin \omega t; \quad B = {}^0B + \sum_{k=1}^2 ({}^k B' \cos k\omega t - {}^k B'' \sin k\omega t). \quad (14)$$

Наслідуючи методологію [3] із рівнянь (12) з граничними умовами (8) відносно коефіцієнтів розкладу (14) одержимо систему нелінійних диференціальних рівнянь 22-го порядку. Отриману систему рівнянь лінеаризуємо методом квазілінеаризації [1, 3]. В результаті приходимо до наступної послідовності розв'язку лінійних крайових задач:

$$\frac{d\bar{Y}^{n+1}}{d\alpha} = A[a_{ij}(k\omega); \bar{Y}^n] + F(q, N_E, M_E, \bar{Y}^n); \quad (15)$$

$$B_1 \bar{Y}^{n+1}(0) = 0; \quad B_2 \bar{Y}^{n+1}(l) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Тут

$$\bar{Y} = \{{}^0u, {}^0w, {}^0g_\alpha, {}^0N_\alpha, {}^0M_\alpha, {}^1u', {}^1u'', {}^1w', {}^1w'', {}^1g'_\alpha, {}^1g''_\alpha, {}^1N'_\alpha, {}^1N''_\alpha, \\ {}^1M'_\alpha, {}^1M''_\alpha, {}^1\tilde{Q}_\alpha, {}^1\tilde{Q}_\alpha, {}^2u', {}^2u'', {}^2N'_\alpha, {}^2N''_\alpha\}^T$$

вектор-стовпець шуканих величин;  $A$  і  $F$  – квадратична матриця 22-го порядку отриманої системи диференціальних рівнянь і вектор-стовпець її правих частин;  $B_1, B_2$  – прямокутні матриці, які визначаються граничними умовами (8). Елементи матриці  $A$  і вектора  $F$  визначаються через шукані величини попереднього наближення, параметри навантаження та комплексні складові жорсткісних характеристик (3), (7), (13), значення яких обчислюються на частотах кожної  $k$ -ої гармоніки і в силу громіздкості не приводяться.

Дисипативна функція (11) в термінах шуканих змінних записується так:

$$\langle W \rangle = \sum_{k=1}^2 k ({}^k N_\alpha'' \epsilon'_\alpha - {}^k N_\alpha' \epsilon''_\alpha + {}^k N_\theta'' \epsilon'_\theta - {}^k N_\theta' \epsilon''_\theta) + {}^1 M_\alpha'' \kappa'_\alpha - {}^1 M_\alpha' \kappa''_\alpha + \\ + {}^1 M_\theta'' \kappa'_\theta - {}^1 M_\theta' \kappa''_\theta + ({}^1 D_z'' + {}^2 D_z'' ) V'_a - ({}^1 D_z' + {}^2 D_z' ) V''_a. \quad (16)$$

Лінійну крайову задачу (15) на кожному наближенні розв'язуємо за допомогою чисельного методу дискретної ортогоналізації для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь з використанням типової програми [1]. Як початкове наближення ( $n = 0$ ) виступає розв'язок геометрично лінійної задачі. На основі отриманого розв'язку задачі (15) обчислюємо дисипативну функцію (16) і нестационарну задачу теплопровідності (10) розв'язуємо методом скінчених різниць з використанням явної схеми. При реалізації такої методології розв'язку задачі використовуються безрозмірні просторова  $x = \alpha/l$  і за часом  $\tau = at/l^2$  координати та параметри  $\gamma_{s,0,l} = \alpha_{s,0,l} l / \lambda$ .

В подальшому для збудження або демпфування вимушених коливань оболонки розглянемо випадок гармонічного механічного навантаження поверхневим тиском постійної амплітуди  $q'_z(\alpha) = q_0$  ( ${}^0q = 0$ ). При відомому навантаженні  $q_0$  для його компенсації з метою максимального гасіння резонансних коливань за допомогою актуатора до електродів останнього підводиться різниця потенціалів, що визначається за формулою

$$|V_a| = k_a q_0, \quad (17)$$

в якій  $k_a = |w_{q \max}| / |w_{E \max}|$  – коефіцієнт керування;  $|w_{q \max}|$  і  $|w_{E \max}|$  – максимальні амплітуди прогинів, що обчислені на основі розв'язку з частотою лінійного резонансу

еталонних задач при  $q_0 = 1 \text{ Па}$ ,  $V_a = 0$  і  $q_0 = 0$ ,  $V_a = 1 \text{ В}$ , , відповідно. Протифазність  $V_a$  враховується за законом  $V_a \cos(\omega t + \pi) = -V_a \cos \omega t$ .

При збудженні вимушених коливань даної оболонки навантаженнями з екстремальними амплітудами і слабому тепловідведенню температура дисипативного розігріву може досягати критичного значення  $T_k$ , коли система деградує через розм'якшення пасивного або деполяризацію п'єзоактивного (точка Кюрі) матеріалів. В такому випадку виникає задача оцінки терміну працездатності непружного об'єкта. Для цього необхідно визначити критичні значення  $q_k$  навантажень, які відповідають критичному значенню  $T_k$  усталеної температури, а також критичний час  $\tau_k$  довговічності системи при навантаженнях, що перевищують критичні.

Для прогнозування довговічності непружних систем широко використовуються односторонні критерії довговічності за параметрами допустимих значень механічних напружень, або деформацій, або температури дисипативного розігріву в локальному об'ємі [2]. В подальшому обмежимося прогнозуванням довговічності розглянутої системи за допустимими значеннями температури вібророзігріву. В цьому випадку прогнозування довговічності проводиться на основі умови

$$T_{\max} \leq T_{\delta} \leq T_k, \quad (18)$$

в якій  $T_{\max}$  – максимальне значення температури вібророзігріву хоч би в одній точці або локальному об'ємі системи;  $T_{\delta}$  – допустима температура, яка не перевищує, як правило, температуру деградації  $T_k$ . Остання визначається для кожного матеріалу експериментально.

При режимах механічного  $q_0 < q_k$  (або електричного  $V_a < V_k$ ) навантажень і інтенсивного теплообміну на поверхнях розглянутого об'єкта, при яких забезпечується виконання умови (18), достатньо в задачі термомеханіки обмежитись дослідженням стаціонарного рівняння теплопровідності. В такому випадку термін працездатності конструктивного елемента може бути необмеженим або обмеженим іншими критеріями довговічності. У випадку навантажень  $q_0 \geq q_k$ , що обумовлюють температуру вібророзігріву  $T \geq T_k$ , необхідно розраховувати критичний час  $\tau_k$  втрати працездатності елемента конструкції з використанням нестационарного рівняння теплопровідності в задачі термомеханіки. При цьому допустимий термін працездатності системи можна назначати таким, протягом якого конструкція буде працювати не більше обумовленого практикою часу ( $\tau \leq \tau_{\text{доп}} < \tau_k$ ).

### 3. Результати числових розрахунків і їх аналіз.

Числові розрахунки проведено для оболонки, пасивний шар якої виготовлено з полімеру з наступними характеристиками матеріалу [16]:  ${}^k E = {}^k E' + i {}^k E''$ ;  ${}^k E' = {}^0 E(k\omega)^p$ ;  ${}^k E'' = {}^k E' \beta(k\omega)^q$ ;  $\nu = 0,36$ ;  ${}^0 E = 0,308 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}$ ;  $\beta = 0,16$ ;  $q = -0,145$ ;  $p = 0,076$ ;  $\rho_3 = 2770 \text{ кг/м}^3$ ;  $\lambda = 0,45 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$ . П'єзошари актуатора, циліндричні поверхні яких електродовані по всій довжині оболонки ( $\Delta_\alpha = 1$ ), виготовлені із однієї і тієї ж п'єзокераміки типу ЦТСтБС – 2 [5] з товщиною поляризацією в протилежних напрямках, так що  ${}^1 d_{31} = d_{31}$ ,  ${}^2 d_{31} = -d_{31}$ . Електромеханічні характеристики п'єзокераміки наступні:  $s'_{11} = 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$ ;  $\nu_E = 0,37$ ;  $d'_{31} = -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}$ ;  $\varepsilon'_{33} = 2100\varepsilon_0$ ;  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ;  $\delta_{11}^s = 0,0016$ ;  $\delta_{31}^d = 0,004$ ;  $\delta_{33}^s = 0,0035$ ;  $\lambda = 0,47 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$ ;  $\rho_1 = \rho_2 = 7520 \text{ кг/м}^3$ .

Геометричні параметри оболонки такі:  $l = 0,2 \text{ м}$ ;  $R = 0,05 \text{ м}$ ;  $h_3 = 0,01 \text{ м}$ ;  $h_1 = h_2 = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

При розглянутих вище способах моногармонічного навантаження в оболонці реалізуються переважно згинні коливання. Тому числові розрахунки проводились в околі першої частоти найбільш енергоємної згинної моди коливань. На представлених графіках штрихові криві відповідають розв'язку лінійної, а суцільні – геометрично нелінійної задачі.

У випадку навантаження оболонки поверхневим тиском з амплітудою  $q_0 = 100 \text{ Па}$  та коефіцієнтами теплообміну  $\gamma_s = 0,1$ ;  $\gamma_0 = \gamma_l = 100$  амплітудно-частотні характеристики максимальних амплітуд прогину  $\tilde{w} = |w(0,5l)|/h_3$  (АЧХ) і температурно-частотні характеристики стаціонарної ( $\tau = \infty$ ) температури  $T_m = T(0,5l)^\circ\text{C}$  (ТЧХ) показані на рис. 1, 2, відповідно.

При сумісній протифазній дії на оболонку механічного навантаження  $q_0 = 100 \text{ Па}$  і розрахованої за формулою

(16) різниці потенціалів  $|^{1,2}V_a| = \mp V_0 = 8,1 \text{ В}$  на електро-

дах актуатора АЧХ і ТЧХ показані штрихпунктирними кривими. Розподіл усталеної температури вібророзігріву вздовж твірної оболонки на частоті  $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$  характеризують криві на рис. 3. Залежність амплітуди прогину  $\tilde{w}$  від амплітуди механічного навантаження  $q_0$  показана на рис. 4. Аналіз кривих на рис. 1 – 4 та проведені числові розрахунки призводять до висновку, що врахування геометричної нелінійності супроводжується зміщенням АЧХ і ТЧХ в сторону збільшення частоти резонансу та їх перетворенням в характеристики нелінійного типу при збільшенні амплітуди навантаження, а також зменшенням прогинів і температури вібророзігріву (суцільні лінії). Максимальне значення прогину і температури розігріву має місце в околі середини довжини оболонки. Активне демпфування механічних коливань оболонки п'єзоактуатором (штрихпунктирні лінії) практично подавляє резонансну частоту та суттєво зменшує прогини і температуру дисипативного розігріву.

В силу того, що врахування геометричної нелінійності супроводжується зниженням амплітуди прогину і температури вібророзігріву в подальшому при розрахунку терміну довговічності розглядуваної оболонки на основі умови (18) приймаємо, що розглядувана система втрачає працездатність при досягненні значення максимально допустимої температури дисипативного розігріву  $T_0 = T_k = 120^\circ\text{C}$  хоч би в одній точці об'єкта.

На рис. 5 показані криві 1 – 3 залежності максимальної усталеної температури дисипативного розігріву  $T_m$  в середньому перерізі оболонки від амплітуди поверхневого тиску  $q_0$ , що розраховані на частоті лінійного резонансу  $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$  відповідно для параметрів теплообміну Біо  $\gamma_s = 0,005; 0,05; 0,1$  ( $\gamma_0 = \gamma_l = 100$ ). Для

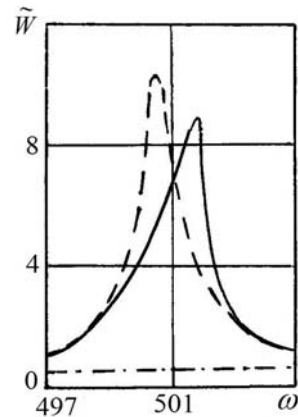


Рис. 1

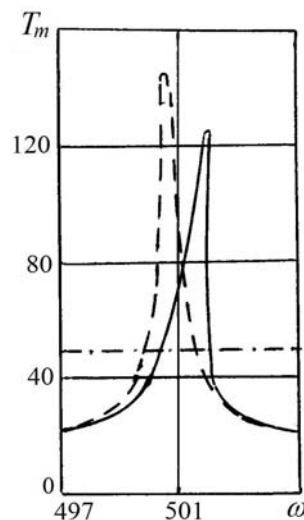


Рис. 2

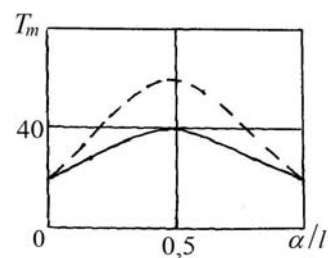


Рис. 3

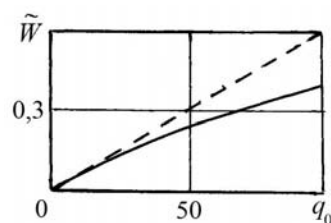


Рис. 4

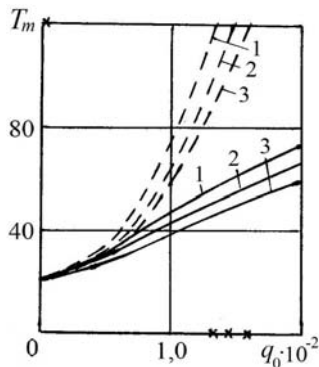


Рис. 5

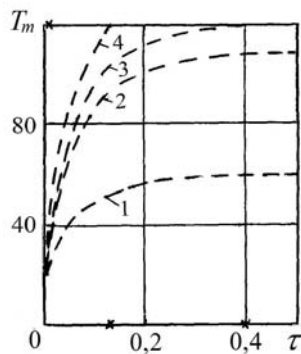


Рис. 6

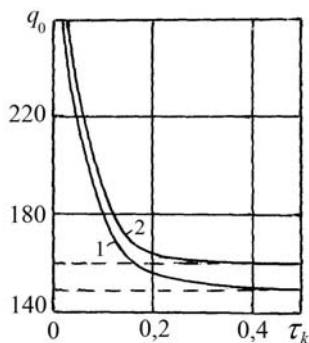


Рис. 7

геометрично лінійної задачі (штрихові лінії) допустимому значенню температури  $T_0 = T_k = 120^\circ\text{C}$  відповідають позначені хрестиками на осі абсцис критичні амплітуди  $q_k$  механічного навантаження. Аналіз кривих 1–3 показує, що при осесиметричних вимушених коливаннях даної оболонки на частоті лінійного резонансу збільшення коефіцієнта теплообміну на поверхнях і врахування геометричної нелінійності (суцільні лінії) призводить до росту критичних значень амплітуди навантаження  $q_k$ , при якому досягається температура деградації  $T_k$  і система втрачає свою працездатність.

На рис. 6 показані криві 1–4 еволюції максимальної температури дисипативного розігріву за часом  $\tau$ , розраховані в рамках лінійної постановки задачі на частоті  $\omega = 500\text{c}^{-1}$  з параметрами тепловіддачі  $\gamma_s = 0,1$ ;  $\gamma_0 = \gamma_l = 100$  для амплітуд  $q_0 = (0,1; 0,15; 0,16; 0,175)10^3 \cdot \text{Па}$ . Хрестиками на осях ординат і абсцис позначені точки температури деградації  $T_k$  і критичного часу  $\tau_k$ . Видно, що при амплітудах поверхневого тиску  $q_0 < q_k = 0,16 \cdot 10^4 \text{Па}$  максимальна температура дисипативного розігріву стає усталеною (криві 1, 2), не досягаючи температури деградації  $T_k$  оболонки. При  $q_0 \geq q_k$  (криві 3, 4) настає момент часу  $\tau \geq \tau_k$ , коли температура вібророзігріву досягає критичного значення  $T_k$  і система стає непрацездатною.

На рис. 7 показані криві 1–2 залежності амплітуди навантаження  $q_0 \geq q_k$  (значення  $q_k$  показано штрих-пунктирними лініями) від критичного параметра часу  $\tau_k$ , розраховані для коефіцієнтів теплообміну  $\gamma_s = 0,05; 0,1$ ;  $\gamma_0 = \gamma_l = 100$ , відповідно. Ці криві характеризують термін довговічності системи у випадку критичних амплітуд навантаження, при яких вібророзігрів досягає допустимої температури  $T_0 \leq T_k$  та є аналогом кривих Велера із теорії циклічного руйнування матеріалів. Порівняння

кривих 1, 2 між собою показує, що посилення тепловідведення на поверхнях оболонки супроводжується збільшенням амплітуди критичного навантаження при зменшенні відносного терміну ( $0 \leq \tau \leq \tau_k$ ) працездатності системи.

### Висновок.

Представлені постановка і чисельний розв'язок задачі про термомеханічну поведінку і довговічність гнучкої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоактуаторами при вимушених резонансних коливаннях. Для найбільш енергоємної першої моди осесиметричних згинних коливань оболонки чисельно досліджено вплив геометричної нелінійності і умов теплообміну на амплітудно- і температурно-частотні характеристики при механічному і електричному навантаженнях. Показана можливість демпфування коливань оболонки п'єзоелектричним актуатором. На основі оцінки довговічності коливальної системи за допустимими значеннями температури вібророзігріву досліджено вплив умов теплообміну і термін її довговічності при критичних навантаженнях, які обумовлюють допустиму температуру працездатності оболонки.



Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Дано постановку задачі про термомеханічну поведінку і довговічність працездатності шарнірно опертої гнучкої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними актуаторами при осесиметричних резонансних коливаннях. Досліджено вплив геометричної нелінійності і умов теплообміну на амплітудно- і температурно-частотні характеристики при вимушених коливаннях оболонки. На основі критерію оцінки довговічності за допустимими значеннями максимальної температури вібророзігріву досліджено працездатність такої системи за часом при екстремальних значеннях амплітуд навантаження і параметрів теплообміну.

**КЮЧОВІ СЛОВА:** резонансні коливання, дисипативний розігрів, в'язкопружний матеріал, п'єзоелектричний актуатор.

1. Григоренко Я.М., Влайков А.Т., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472с.
2. Дырда В.И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях. – Киев: Наук. думка. – 1988. – 232 с.
3. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
4. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.
5. Bolkisev A.M., Karlash V.L., Shul'ga N.A. Temperature Dependence of the Properties of Piezoelectric Ceramics // Sov. App. Mech. – 1984. – 20. – N 7. – P. 650 – 653.
6. Blaguenon A., Lene F., Bernadou M. Active control a beam a piezoceramic element // Smart Mater. Struct. – 1999. – 8. – P. 116 – 124.
7. Gabbert U., Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems. – Dordrecht: Kluwer Acad., 2001. – 384 p.
8. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I. Electromechanical Vibrations and Dissipative Heating of Viscoelastic Thin-Walled Piezoelements (Review) // Int. App. Mech. – 2001. – 37, N 2. – P. 182 – 212.
9. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I. Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // Int. App. Mech. – 2017. – 53, N 1. – P. 6 – 58.
10. Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V. Forced Vibrations and Dissipative Heating of flexible Hinged Viscoelastic Rectangular Plates with Actuators with Allowance for Transverse Shear Strains // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54. – N 1. – P. 85 – 93.
11. Katunin A. Criticality of the Self-Heating Effect in Polymers and Polymer Matrix Composites during Fatigue and Their Application in Non – Destructive Testing // Polymers. – 2018. – 11. – P. 1 – 19.
12. Katunin A., Wronkovicz A. et. al. Criticality of self- heating in degradation processes of polymeric composites subjected to cyclic loading: A Multiphysical Approach // Arch. Civ. Mech. Engng. – 2017. – 17. – P. 806 – 815.
13. Kirichok I.F. Resonant Axisymmetric Vibrations and Vibrational Heating of a Viscoelastic Cylindrical Shell with Piezolayers Subject to Electromechanical Excitation // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 5. – P. 567 – 573.
14. Kirichok I.F., Cherniuchok O.A. Axisymmetrical Vibrations and Vibroheating of a Thermoviscoelastic Cylindrical Shell with Piezoactuators and Shear Deformation Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 3. – P. 340 – 346.
15. Kirichok I.F., Cherniuchok O.A. Forced Vibration and Self-Heating of a Thermoviscoelastic Cylindrical Shear Compliant Shell with Piezoelectric Actuators and Sensors // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 6. – P. 723 – 731.
16. Stevens K.K. Transverse vibration of a viscoelastic column with initial curvature under periodic axial load // J. Appl. Mech. – 1969. – N 36. – P. 814 – 818.
17. Tzou H.S. Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht: Kluwer Acad., 1993. – 400 p.
18. Tzou H.S., Bergman L.A. Dynamics and Control of Distributed Systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 374 p.

Надійшла 16.06.2021

Затверджена до друку 31.05.2022