

М. П. Семенюк, Н. Б. Жукова

**СТІЙКІСТЬ КОМПОЗИТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК
З ГЕОМЕТРИЧНИМИ ТА СТРУКТУРНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ
ПРИ ОСЬОВОМУ СТИСКУ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України,
вул.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: zhukova_n@ukr.net*

Abstract. A procedure is developed for the analytical solution of the problem on non-linear deformation of composite cylindrical shells the surfaces of which have the initial imperfections of different types. It is assumed that the fibrous material of the shell has imperfections in the form of violations of the ideal connection between the reinforcing material and the fibers. An influence of these factors on the critical loads and post-buckling behavior of the shells at the axial compression is studied.

Key words: cylindrical shell, composite material, geometrical imperfection, structural imperfection, axial compression, stability, post-buckling behavior.

Вступ.

Розвиток досліджень стійкості оболонок нерозривно пов'язаний зі зміною не тільки конструктивних підходів, але і з використанням матеріалів з недостатньо вивченими властивостями. При переході від металевих [4] до композитних матеріалів характерні геометричні недосконалості оболонок доповнюються структурними, зумовленими неоднорідністю композитів.

У роботах [21 – 24] розглянуто стійкість і чутливість до геометричних недосконалостей у вигляді моди випучування оболонок із склопластика в постановці Койтера. Там же досліджувалась стійкість композитних оболонок з осесиметричними початковими недосконалостями. Автори [10] одними з перших врахували відхилення від ідеальної геометрії, які виміряні на реальних оболонках. Розрахункова модель при такому підході з використанням відомих скінченноелементних програм [8, 11, 16, 17, 20] дозволяє отримати хороший збіг експериментальних і розрахункових критичних навантажень. У літературі наведено кілька варіантів вуглепластикових оболонок, які досліджені як експериментально, так і теоретично [11, 20].

Асимптотичний підхід, запропонований Койтером [18], був узагальнений Бісковим і Хатчинсоном [14] на задачі зі взаємодіючими локальними і загальними формами випучування підкріплених оболонок. В [9] метод Біскова – Хатчинсона застосовується до дослідження стійкості оболонки з початковим прогином у вигляді суми тригонометричних функцій, що лежать на колі Койтера (основного триплета). Подальший розвиток цей підхід отримав при узагальненні на локальні форми початкових прогинів, представлених у вигляді рядів Фур'є за власними тригонометричними функціями однорідної задачі. В даній роботі метод Біскова – Хатчинсона використовується для дослідження нелінійного деформування в околі критичного стану циліндричних оболонок з вуглепластиків з різними недосконалостями, що представляють суперпозицію локальних і загальних форм початкових прогинів.

Початкові структурні недосконалості у вигляді тріщин на граничних поверхнях компонентів можуть суттєво знижувати механічні характеристики композитів. В результаті зменшується довговічність конструкції. Сумісне врахування впливу геомет-

ричних і структурних недосконалоостей має свої особливості, які аналізуються за допомогою розвинутого підходу. Необхідно також відзначити, що при стиску оболонок з волокнистих композитів проявляються також інші особливості випучування, зокрема, пов'язані з втратою стійкості армуючих волокон [6]. Вони в цій роботі не розглядаються. До дуже важливих особливостей композиційних матеріалів та конструкцій з них слід віднести також те, що для них детерміністичні характеристики мають зміст тільки з певною вірогідністю. Фундаментальні результати досліджень з цього напрямку представлені в монографії [15].

1. Основні рівняння розрахункової моделі.

Розглянемо шарувату циліндричну оболонку радіуса R із загальною товщиною t і довжиною L , яка навантажена рівномірно розподіленою по торцювому перетину стискаючою силою P , що при статичній зміні пропорційна деякому параметру λ . Цей параметр не може задаватися довільно. Він повинен бути таким, щоб виконувалися умови рівноваги. При наявності початкових геометричних недосконалоостей зі зростанням параметра λ реалізується нелінійна деформація до досягнення граничного значення. Після цього відбувається зміна напрямку деформування, яку можна визначити при розв'язанні нелінійних рівнянь рівноваги, якщо за додаткову невідому величину прийняти параметр λ . Реалізувати цю процедуру можна за допомогою методу неперервного продовження [5, 7]. У результаті отримаємо характерну діаграму, яку можна назвати кривою рівноважних станів [7]. Введемо позначення величин, що використовуються для запису нелінійних виразів деформацій через переміщення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \omega_1 = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}; \quad \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \theta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R}; \\ k_1 = \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad k_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad t_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad t_2 = \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут x, y – координатні лінії, що співпадають з твірною та напрямною циліндричної поверхні приведення.

За допомогою формул (1) отримуємо вирази, які дозволяють враховувати кути повороту навколо ортів осей, що лежать на серединній поверхні і обумовлені прогинами w , а також кути повороту навколо нормалі, що викликані переміщеннями u, v :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \theta_1^2 + 2\theta_1\bar{\theta}_1); \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \theta_2^2 + 2\theta_2\bar{\theta}_2); \\ \varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \theta_1\theta_2 + \theta_1\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1\theta_2; \\ k_{11} = k_1; \quad k_{22} = k_2 + \frac{\varepsilon_2}{R}; \quad k_{12} = t_1 + t_2 + \frac{\omega_2}{R}; \quad \varepsilon_{13} = \theta + \theta_1; \quad \varepsilon_{23} = \psi + \theta_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Як показано в роботі [1], врахування зазначених нелінійностей при розрахунку стійкості оболонок з композитів уточнює одержувані результати. В теорії оболонок Доннелла – Муштарі – Власова, яка найчастіше використовується в розрахунковій практиці, враховуються тільки кути повороту осей, що лежать на серединній поверхні.

Запишемо необхідні для проведення розрахунків співвідношення, використовуючи нелінійну теорію оболонок Тимошенка – Міндліна [1]. Вираз принципу віртуальних робіт в цьому випадку буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[T_{11}\delta\varepsilon_1 + T_{22}\delta\varepsilon_2 + T_{12}^*\delta\omega_1 + T_{21}^*\delta\omega_2 + T_{13}^*\delta\theta_1 + T_{23}\delta\theta_2 + T_{13}\delta\theta + T_{23}^*\delta\psi + M_{11}\delta k_1 + \right. \\ \left. + M_{22}\delta k_2 + M_{12}\delta t_1 + H(\delta t_1 + \delta t_2) \right] dx dy - \delta A = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут T_{ij} , M_{ij} – зусилля і моменти, статично еквівалентні діючим напруженням. Проекції зусиль на осі серединної поверхні до деформації мають вигляд

$$T_{12}^* = S + T_{11}\omega_1; \quad T_{21}^* = S + \frac{1}{R}H + T_{22}\omega_2; \quad T_{13}^* = T_{13} + T_{11}(\theta_1 + \overline{\theta_1}) + S(\theta_2 + \overline{\theta_2});$$

$$T_{23}^* = T_{23} + S(\theta_1 + \overline{\theta_1}) + T_{22}(\theta_2 + \overline{\theta_2}). \quad (4)$$

Присутні тут функції з рискою зверху позначають кути повороту поверхні, обумовлені наявними до навантаження оболонки початковими геометричними недосконалостями.

Варіація роботи зовнішніх навантажень δA має різний вигляд в залежності від характеру їх розподілу по лицьових поверхнях або ж по бічній поверхні. У разі циліндричної оболонки одним з найбільш практично цікавих є варіант навантаження її однорідними осьовими стискаючими зусиллями $T_{11,0} = P / (2\pi R)$. При цьому маємо

$$\delta A = -2\pi R \int_0^L T_{11,0} \delta u \, dx. \quad (5)$$

Якщо оболонка складається з N шарів односпрямованого препрегу, то у відповідності з гіпотезами Тимошенка співвідношення пружності можна представити в такому вигляді

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ T_{23} \\ T_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

тут $C_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^k$; $B_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^k S_k$; $D_{ij} = \sum_{k=1}^N (D_{ij}^k + C_{ij}^k S_k^2)$, $i, j = 1, 2, 6$; C_{ij}^k, D_{ij}^k – жорсткості

k -го моношару; $C_{ij}^k = b'_{ij} t_k$, $D_{ij}^k = \frac{1}{12} t_k^3 b'_{ij}$; S_k – значення координати z , яка визначає положення серединної поверхні k -го шару.

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{12} = \nu_2; \quad b_{11} = \nu_1 b_{22}; \quad b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2};$$

$$b_{44} = G_{23}; \quad b_{55} = G_{13}; \quad b_{66} = G_{12}; \quad (G_{12} = G_{13});$$

b'_{ij} – константи пружності, які виражаються через вихідні b_{ij} за допомогою лінійних залежностей від тригонометричних функцій кута φ , на який повернуто осі 1, 2 навкруги осі z . В векторно-матричному вигляді маємо рівність

$$\begin{bmatrix} b'_{11} \\ b'_{22} \\ b'_{12} \\ b'_{66} \\ 2b'_{16} \\ 2b'_{26} \\ 2b'_{55} \\ 2b'_{44} \\ 2b'_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & 0 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_2 & 0 & u_3 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & -u_3 & 0 \\ u_5 & 0 & 0 & -u_3 & 0 \\ 0 & 0 & -u_2 & 0 & -2u_3 \\ 0 & 0 & -u_2 & 0 & 2u_3 \\ u_8 & -u_9 & 0 & 0 & 0 \\ u_8 & u_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u_9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \\ \cos 4\varphi \\ \sin 4\varphi \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Модулі пружності і зсуву, коефіцієнти Пуассона односпрямованого армованого шару можуть бути знайдені експериментально, або теоретично. В першому випадку вони будуть враховувати недоліки технології виготовлення; в другому – враховувати ті недосконалості, які закладено в розрахунковій моделі. Зокрема, недоліком, що найбільш часто зустрічається в композитах даного типу, є руйнування вздовж границь розділу (порушення ідеального зв'язку між матрицею і волокнами), що виникає при виготовленні, або в процесі експлуатації. У даній роботі із застосуванням результатів мікромеханіки розглядається такий випадок.

2. Механічні властивості волокнистих композитів з недосконалим контактом компонентів.

Розглянемо матеріал, що складається з паралельних циліндричних включень (волокон) і матриці, що зв'язує волокна в єдине ціле. У роботах [2, 3] отримані аналітичні розв'язки задач статки для волокнистих середовищ з різними періодичними структурами. Припускаємо, що на міжфазній границі є ділянки розриву суцільності – тріщини, які можуть бути довільно розташовані по периметру волокна, але мають однакову величину. Щоб отримати вирази для наведених характеристик такого матеріалу, використовуємо отриманий в [2, 3] розв'язок для випадку, коли тріщини мають не тільки однакову величину, а й орієнтацію. При постановці задачі в [2, 3] прийнято, що волокнисте середовище є однорідним уздовж волокон.

Осі системи координат розташовані так, що вісь 1 збігається з напрямком волокон, вісь 2 перпендикулярна до волокна і ділить тріщину з центральним кутом 2θ навпіл (рис. 1), вісь 3 – перпендикулярна до площини, утвореної осями 1 і 2. Волокна і сполучне передбачаються ізотропними і пружними з модулями Юнга E_a і E , коефіцієнтами Пуассона ν_a та ν , відповідно.

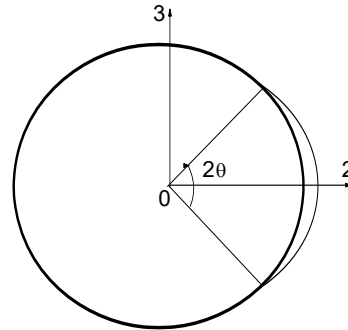


Рис. 1

Волокнисте середовище з недосконалим контактом подібного вигляду на макрорівні буде ортотропним з дев'ятьма невідомими незалежними коефіцієнтами. Співвідношення пружності для композиту, що розглядається, мають вигляд

$$\varepsilon = a\sigma, \quad (8)$$

де $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{44}, 2\varepsilon_{55}, 2\varepsilon_{66})$, $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{44}, \sigma_{55}, \sigma_{66})$ – вектори, компоненти яких є компонентами тензорів деформацій і напружень; a – матриця шосто-го порядку з ненульовими коефіцієнтами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_1}; \quad a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}; \quad a_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_3}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad a_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_3}; \quad a_{33} = \frac{1}{E_3}; \\ a_{44} &= \frac{1}{G_{23}}; \quad a_{55} = \frac{1}{G_{13}}; \quad a_{66} = \frac{1}{G_{23}}; \quad a_{ij} = a_{ji}. \end{aligned} \quad (9)$$

При заданих об'ємному вмісті волокон ξ , сполучного $\eta = 1 - \xi$, куті розкриття тріщини 2θ технічні константи в (9) визначаються за допомогою формул [2,3]:

$$\begin{aligned} E_1 &= \xi E_a + \eta E + \frac{8\xi\eta(\nu_a - \nu)^2 mGG_a}{u_{26}}; \quad \frac{1}{E_2} = \frac{\nu_{21}^2}{E_1} + \frac{1+\kappa}{4G} \frac{u_{23} - \xi G_a \Omega(\theta)}{u_{24}(\lambda_1) + u_{25}}; \\ \frac{1}{E_3} &= \frac{\nu_{31}^2}{E_1} + \frac{1+\kappa}{4G} \frac{u_{23} - \xi G_a \mu(\theta)}{u_{24}(\lambda_2) + u_{25}}; \quad G_{12} = G \frac{u_{11} - u_{12}}{u_{22} + u_{12}}; \quad G_{13} = G \frac{u_{11} + u_{12}}{u_{22} - u_{12}}; \end{aligned}$$

$$G_{23} = G \frac{(1 + \kappa)[1 + \xi\chi(\theta)]G_a + \eta(1 + \kappa_a)G}{(1 + \kappa)[1 - \xi\chi(\theta)]G_a + (1 + \kappa_a)(1 + \xi\kappa)G}; \quad (10)$$

$$\frac{v_{23}}{E_2} = -\frac{v_{21}v_{31}}{E_1} + \frac{1}{2Gu_{24}(\lambda_1)} [(1 + \kappa)G_a + (1 + \kappa_a)(1 + \xi\kappa)G - \\ - 0,5\xi(1 + \kappa)G_a(\Omega(\theta) + \kappa(1 + 4\beta^2)\sin^2 \theta)]; \quad v_{21} \approx v_{31} = v + \frac{\xi(1 + \kappa)(v_a - v)mG_a}{u_{26}},$$

де

$$\kappa = 3 - 4\nu; \quad \chi(\theta) = (\cos \theta - 2\beta \sin \theta)e^{-2\beta(\pi - \theta)} - \frac{\sin^4 \theta(1 + 4\beta^2)^2}{4[1 + (\cos \theta + 2\beta \sin \theta)e^{2\beta(\pi - \theta)}]};$$

$$m(1 + e^{2\beta\pi}) = 1 + (\cos \theta - 2\beta \sin \theta)e^{2\beta(\pi - \theta)}; \quad e^{2\beta\pi} = \frac{G + \kappa G_a}{G_a + \kappa_a G};$$

$$u_{11} = (1 + \xi \cos \theta)G_a + \eta G; \quad u_{12} = \frac{1}{2}\xi G_a \sin^2 \theta;$$

$$u_{22} = (1 - \xi \cos \theta)G_a + (1 + \xi)G; \quad u_{23} = \kappa G_a + (1 + 2\xi)[G_a + (1 + \kappa_a)G];$$

$$u_{24}(\lambda_1) = (1 + \kappa)[1 + \eta + \xi\lambda_1(\theta)]G_a; \quad u_{25} = 2\eta(1 + \kappa_a)G;$$

$$u_{26} = \xi(1 + \kappa)mG_a + 2\eta(G_a + \kappa_a G) - \eta(1 + \kappa_a)mG;$$

$$\Omega(\theta) = q + m(1 + e^{2\beta\pi}) + 2\kappa(\cos \theta - 2\beta \sin \theta)e^{-2\beta(\pi - \theta)} -$$

$$- 0,5(1 + 4\beta^2)[\kappa + 2 + \kappa q(1 + e^{2\beta\pi})^{-1}]\sin^2 \theta;$$

$$4\lambda_{1,2}(\theta) = 2q + 2m(1 + e^{2\beta\pi}) + 4(\cos \theta - 2\beta \sin \theta)e^{-2\beta(\pi - \theta)} \pm$$

$$\pm(1 + 4\beta^2)[\xi + q(1 + e^{2\beta\pi})^{-1}]\sin^2 \theta;$$

$$\mu(\theta) = q + m(1 + e^{2\beta\pi}) + (1 + 8\beta^2)\sin^2 \theta + 2\kappa(\cos \theta - 2\beta \sin \theta)e^{-2\beta(\pi - \theta)} +$$

$$+ 0,5(1 + 4\beta^2)[1 + \kappa q(1 + e^{2\beta\pi})^{-1}]\sin^2 \theta;$$

$$q = (1 + \kappa)mG \frac{m(1 + e^{2\beta\pi}) - (1 + 4\beta^2)\sin^2 \theta}{2(G_a + \kappa_a G) - (1 + \kappa_a)mG}.$$

У виразах $\chi(\theta)$ при $\theta = \pi$ (повне відшарування) у другому доданку знаменник дорівнює нулю. Однак, з огляду на те, що $\sin^4 \theta$ при $\theta \rightarrow \pi$ буде малою величиною вищого порядку, другий доданок слід покласти рівним нулю.

Формули (10) отримані для випадку симетричного щодо осей координат розміщення на поверхні волокна областей недосконалого контакту компонентів. Узагальнення цього варіанту формул для розрахунку наведених характеристик при довільному розміщенні розривів суцільності можна отримати, провівши їх перерахунок щодо системи координат, яка повернута навколо осі 1 на деякий кут α .

Наведемо приклад розрахунку механічних характеристик композита, що складається з вуглецевих волокон і епоксидної матриці. При заданих об'ємному вмісті волокон $\xi = 0,4$; сполучного $\eta = 1 - \xi$; модулях $E_a = 350$ ГПа і $E = 4$ ГПа значення модулів композиту, що обчислені за формулами (10) для деяких значень кута розкриття тріщини, наведені в табл. 1.

Таблиця 1

| θ | E_1 , МПа | E_2 , МПа | G_{12} , МПа | G_{13} , МПа | G_{23} , МПа | ν_{12} |
|----------|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------|------------|
| 0 | 142410 | 8563,6 | 3518,3 | 3518,3 | 3090,6 | 0,256 |
| $\pi/6$ | 142410 | 6896,7 | 2789,6 | 3489,6 | 3090,6 | 0,258 |
| $\pi/2$ | 142410 | 3139,7 | 1021,2 | 2227,2 | 3090,6 | 0,274 |
| π | 142240 | 1464,0 | 659,7 | 659,3 | 3090,2 | 0,300 |

Ці механічні характеристики вуглепластика будемо використовувати при розрахунку впливу геометричних і структурних недосконалостей на критичні навантаження і характер закритичної поведінки циліндричних оболонок при осьовому стиску.

3. Асимптотичні нелінійні рівняння теорії оболонок і метод їх розв'язування.

Співвідношення, що становлять основу методу Біскова – Хатчінсона [14], зручно отримати в загальному вигляді, ввівши узагальнені переміщення, напруження і деформації оболонки як вектори:

$$U = (u, v, w, \theta, \psi); \quad \sigma = (T_{11}, T_{22}, S, T_{23}, T_{13}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21});$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, k_{11}, k_{22}, \tau_1, \tau_2).$$

При цьому використовуватимемо компактність формулювань Будянського [13]. Якщо поле початкових недосконалостей характеризується вектором \bar{U} , узагальнені деформації і переміщення можна представити як

$$\varepsilon(U, \bar{U}) = \varepsilon(U + \bar{U}) - \varepsilon(U); \quad \Delta(U, \bar{U}) = \Delta(U + \bar{U}) - \Delta(U). \quad (11)$$

Вектор напружень для оболонки з недосконалостями $\bar{\sigma}$ пов'язаний з вектором деформацій $\varepsilon(U, \bar{U})$ матрицею жорсткості шаруватої оболонки H , тобто

$$\bar{\sigma} = H \varepsilon(U, \bar{U}). \quad (12)$$

Вираз принципу віртуальних робіт () буде мати вигляд

$$\bar{\sigma} \varepsilon'(U, \bar{U}) \delta u - \lambda \Delta'(U, \bar{U}) \delta U = 0. \quad (13)$$

Рівняння (11) – (13) дозволяють розв'язувати різні нелінійні задачі про деформацію оболонок з початковими геометричними недосконалостями. До наведених рівнянь (11) – (13) застосуємо метод асимптотичного аналізу, що запропонований авторами роботи [14].

Позначимо через ξ_i амплітуди мод випучування. Вектори переміщень, напружень і деформацій, а також параметр навантаження λ представимо у вигляді асимптотичних розкладів

$$U = \lambda U_0 + \xi_i U_i + \xi_i \xi_j U_{ij}; \quad \sigma = \lambda \sigma_0 + \xi_i \sigma_i + \xi_i \xi_j \sigma_{ij} + \dots;$$

$$\varepsilon = \lambda \varepsilon_0 + \xi_i \varepsilon_i + \xi_i \xi_j \varepsilon_{ij} + \dots; \quad \lambda = \lambda_c + \xi_i \lambda_1 + \xi_i \xi_j \lambda_2 + \dots. \quad (14)$$

Підставивши їх у рівняння (3), отримаємо варіаційне рівняння стійкості для циліндричної оболонки в такому вигляді

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ T_{11}^i \delta \varepsilon_1 + S^i \delta \omega_1 + T_{22}^i \delta \varepsilon_2 + \left(S^i + \frac{2}{R} H^i \right) \delta \omega_2 + T_{13}^i (\delta \theta_1 + \delta \theta) + \right. \\ \left. + H^i \delta k_{12} + T_{23}^i (\delta \theta_2 + \delta \psi) + M_{11}^i \delta k_{11} + M_{22}^i \delta k_{22} + \lambda_i T_{11}^0 (\omega_1^i \delta \omega_1 + \theta_1^i \delta \theta) \right\} dx dy = 0. \quad (15)$$

Варіаційне рівняння щодо змінних другого порядку в теорії оболонки Тимошенка – Міндліна представляємо у вигляді

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ T_{11}^{ij} \delta \varepsilon_1 + S^{ij} \delta \omega_1 + T_{22}^{ij} \delta \varepsilon_2 + \left(S^{ij} + \frac{2}{R} H^{ij} \right) \delta \omega_2 + T_{13}^{ij} (\delta \theta_1 + \delta \theta) + \right. \\ & \left. + T_{23}^{ij} (\delta \theta_2 + \delta \psi) + M_{11}^{ij} \delta k_{11} + M_{22}^{ij} \delta k_{22} + H^{ij} \delta k_{12} + \lambda_i T_{11}^0 (\omega_1^{ij} \delta \omega_1 + \theta_1^{ij} \delta \theta_1) \right\} dx dy = \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[(T_{11}^i \omega_1^{ji} + T_{11}^j \omega_1^i) \delta \omega_1 + (T_{22}^i \omega_2^j + T_{22}^j \omega_2^i) \delta \omega_2 + \right. \\ & \left. + (T_{11}^i \theta_1^j + S^i \theta_2^j + T_{11}^j \theta_1^i + S^j \theta_2^i) \delta \theta_1 + (T_{22}^i \theta_2^j + S^i \theta_2^j + T_{22}^j \theta_2^i + S^j \theta_2^i) \delta \theta_2 \right] dx dy, \end{aligned} \quad (16)$$

де індексами i, j позначено номер члена в асимптотичному розкладі (14). Якщо розв'язані однорідна (15) і неоднорідна (16) крайові задачі, то відносно амплітуд ξ_i отримуємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь [23, 24]

$$\xi_r \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_r} \right) + \xi_i \xi_j a_{ijr} + \xi_i \xi_j \xi_k b_{ijk} = \bar{\xi}_r \frac{\lambda}{\lambda_r}, \quad r = 1, \dots, M. \quad (17)$$

Тут прийняті позначення

$$a_{ijr} = -A_{ijr} / 2D; \quad b_{ijk} = -B_{ijk} / D;$$

$$A_{ijr} = \sigma_r \varepsilon^n U_i U_j + 2\sigma_i \varepsilon^n U_j U_r; \quad D = \lambda_r (\sigma_0 \varepsilon^n U_r^2 - \Delta^n U_r^2); \quad (18)$$

$$B_{ijk} = \frac{1}{2} (\sigma_i \varepsilon^n U_r U_{jk} + \sigma_{ij} \varepsilon^n U_k U_r + \sigma_r \varepsilon^n U_i U_{jk} + \sigma_{ir} \varepsilon^n U_j U_k + 2\sigma_i \varepsilon^n U_j U_{kr}).$$

Система рівнянь (17) може бути використана для дослідження нелінійного деформування недосконалих конструкцій на всій траєкторії деформування, включаючи критичні (граничні) навантаження, а також закритичної поведінки. Точність цього дослідження буде залежати від точності асимптотичних розкладів (14).

Крім того, система (17) може бути застосована в разі співпадаючих та майже співпадаючих мод або мод, що істотно розрізняються. Ця властивість методу Біскова – Хатчінсона використовується нижче для розробки методики розрахунку стійкості і закритичної поведінки шаруватих композитних циліндричних оболонки з мультимодальними недосконаліостями, зокрема, з локальними недосконаліостями, які можуть бути описані тригонометричними рядами Фур'є.

Якщо отримано розв'язки крайових задач (15) і (16), за формулами (18) визначаються коефіцієнти a_{ijr} і b_{ijk} системи рівнянь (17).

При побудові розв'язку системи рівнянь (17) вважаємо, що початкове значення параметра навантаження λ значно менше критичного. Це дозволяє на першому етапі скористатися безмоментним розв'язком. Отриманий розв'язок на i -му кроці використовується як початкове значення при наступному $(i+1)$ -му кроці, але вже з урахуванням нелінійних доданків системи (17). Для побудови розв'язку в наступних точках, в тому числі в тих, де якобіан системи (17) дорівнює нулю, використовується метод неперервного продовження Давиденка [5, 7]. Вводимо вектор \bar{X} розмірності $(M+1)$ з компонентами $(\xi_1, \dots, \xi_M, \xi_{M+1})^T$. Система (17) в цьому випадку може бути записана в компактному вигляді

$$F_r(\bar{X}) = 0 \quad (r = 1, \dots, M+1). \quad (19)$$

Диференціюючи (19) за параметром s , що відповідає просуванню уздовж кривої рівноважних станів, отримуємо систему M лінійних однорідних рівнянь для $M+1$ невідомих, тобто

$$\sum_{j=1}^{M+1} F_{r,j} \frac{d\xi_j}{ds} = 0, \quad r = 1, \dots, M, \quad (20)$$

де $\bar{J} = [F_{r,j}] = [\partial F_r / \partial \xi_i]$ – матриця Якобі системи (19). Ранг $[\bar{J}] = M$ в регулярних і граничних точках

$$F_{r,i} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_r}\right) \delta_r^i (a_{ijr} + a_{jir}) \xi_j + (b_{ijkr} + b_{jikr} + b_{kijr}) \xi_j \xi_k - (\xi_r + \bar{\xi}_r).$$

Розв'язок системи (20) представимо у вигляді задачі Коші

$$\frac{d\bar{X}}{ds} = \text{ort}(J, Q)$$

з початковою умовою $\bar{X}(s_0) = \bar{X}_0$.

Операція $\text{ort}(J, Q)$ позначає процес ортогоналізації векторів-рядків матриці \bar{J} і визначення орта, що доповнює вихідний базис до базису розмірності $(M+1)$ [7]. За початкове значення $\bar{X}(s_0)$ береться розв'язок, що отриманий за методом Ньютона – Канторовича при $\lambda \ll \lambda_s$. Викладена процедура виявилася досить ефективною при вирішенні багатьох нелінійних задач [5].

4. Геометричні недосконалості.

Локальний прогин циліндричної поверхні задамо у вигляді функції двох змінних, які співпадають в деякій локальній області поверхні приведення з осями координат глобальної системи ($0 \leq x \leq L$, $-\pi R \leq y \leq \pi R$), де L – довжина твірної циліндра; $2\pi R$ – довжина напрямної. Локальна область обмежена контуром $L_1 \leq x \leq L_1 + l_1$, $-y_1 \leq y \leq y_1$. Початковий прогин у вказаній області представимо у вигляді [20]

$$\bar{w} = \xi \sin^2 \frac{\pi(x-L_1)}{l_1} \cos^2 \frac{\pi y}{2y_1}; \quad y = R\varphi; \quad y_1 = R\varphi_1, \quad (21)$$

що відповідає виразу

$$\bar{w} = \frac{1}{4} \bar{\xi} \left(1 - \cos \frac{2\pi(x-L_1)}{l_1}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{2\varphi_1}\right); \quad L_1 \leq x \leq L_1 + l_1; \quad -\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1.$$

Перетворимо вираз (21) в подвійний тригонометричний ряд $\sum_m \sum_n B_m A_n \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi$.

Коефіцієнти B_m, A_n знайдемо при виконанні наступних операцій

$$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi(x-L_1)}{l_1}\right) = \sum_k \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{k} + \frac{2k}{k^2-4}\right) \sin \frac{k\pi(x-L_1)}{l_1}, \quad k = 1, 3, \dots;$$

$$\beta_{mk} = \frac{2}{L} \left(\alpha \cos \frac{k\pi L_1}{l_1} - \beta \sin \frac{k\pi L_1}{l_1}\right);$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\gamma_1} [\sin \gamma_1 (L_1 + l_1) - \sin \gamma_1 L_1] - \frac{1}{\gamma_2} [\sin \gamma_2 (L_1 + l_1) - \sin \gamma_2 L_1] \right\};$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\gamma_1} [\cos \gamma_1 (L_1 + l_1) - \cos \gamma_1 L_1] - \frac{1}{\gamma_2} [\cos \gamma_2 (L_1 + l_1) - \cos \gamma_2 L_1] \right\};$$

$$\gamma_1 = \frac{k\pi}{l_1} - \frac{m\pi}{L_1} \quad \gamma_2 = \frac{k\pi}{l_1} + \frac{m\pi}{L_1}; \quad B_m = \sum_m \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{k} - \frac{2k}{4k^2 - 1} \right) \beta_{mk}; \quad (22)$$

$$\sin^2 \frac{\pi(x - L_1)}{l_1} = \sum_m B_m \frac{\sin m\pi x}{L}; \quad \cos^2 \frac{\pi\varphi}{2\varphi_1} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi\varphi}{\varphi_1} \right) = A_0 + \sum_n A_n \cos n\varphi;$$

$$A_0 = \frac{\varphi_1}{2\pi}; \quad A_n = \frac{\varphi_1^2 n \sin n\varphi_1}{2(\pi^2 - n^2 \varphi_1^2)} + \frac{1}{2n} \sin \frac{\varphi_1}{\pi}.$$

Амплітуда початкового прогину \bar{w} дорівнює $\bar{\xi}$. Розв'язок збуреної задачі будемо шукати у вигляді тригонометричних рядів Фур'є, враховуючи, що тригонометричні функції є власними для однорідної задачі (6).

Початковий локальний прогин буде мати вигляд

$$\bar{w} = \bar{\xi} \sum_m \sum_n B_m A_n \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi. \quad (23)$$

Для врахування взаємовпливу локальних і загальних початкових прогинів в формулу (23) необхідно додати доданок, який враховує початковий прогин, що має форму випучування ідеальної оболонки [18]. Т.ч. отримаємо

$$\bar{w} = \bar{\xi} \sum_m \sum_n B_m A_n \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi + C_{MN} \sin \frac{M\pi x}{L} \cos N\varphi. \quad (24)$$

Тут C_{MN} – амплітуда початкового прогину, що має форму випучування при осьовому стиску ідеальної оболонки з M півхвилею в поздовжньому напрямку і N в коловому.

5. Розрахунок і обговорення результатів.

Будемо досліджувати стійкість недосконалих оболонок з початковою локальною увігнутістю, вигляд якої задається виразом (21) та при взаємодії з загальним прогином у вигляді однієї з мод втрати стійкості ідеальної оболонки (24). Область розташування недосконалості обмежена інтервалом $L_1, L_1 + l_1$ з початковим значенням $L_1 = 3L/8$ і кінцевим $L_1 + L/4$ по поздовжній координаті та $-0,748 < \varphi < 0,748$ – по коловій з центром при $x = L/2$ та $\varphi = 0$.

Відношення площ увігнутої ділянки поверхні до всієї поверхні приведення оболонки становить 0,06.

Розглянемо три варіанти оболонок із шаруватих вуглепластиків, розрахункові та експериментальні результати дослідження за якими опубліковані в роботах [11, 12, 16, 17, 19]. За аналогією із зазначеними роботами позначимо перший приклад – циліндр Z22, другий – Z33, третій – Z36.

Оболонка Z22 складається з чотирьох шарів з напрямками армування $[\pm 41^\circ, \pm 24^\circ]$, оболонка Z33 – десятишарова з орієнтацією волокон $[\pm 51^\circ, \pm 45^\circ, \pm 37^\circ, \pm 19^\circ, \pm 0^\circ]$, оболонка Z36 – шестишарова з армуванням в напрямках $[\pm 34^\circ, \pm 0^\circ, \pm 53^\circ]$. Оскільки розглядається система координат з напрямком нормалі в середину оболонки, то нумерація шарів в дужках починається з верхнього шару.

Механічні характеристики кожного шару у власних осях, геометрія і структура шаруватого пластику для циліндрів Z22 і Z33, що взяті зі статті [11,17], будуть наступними:

для циліндра Z22 –

$E_1 = 142,5$ ГПа; $E_2 = 8,7$ ГПа; $G_{12} = 5,1$ ГПа; $\nu_{12} = 0,28$; довжина $L = 500,0$ мм; радіус $R = 250,3$ мм; $R/L = 0,506$; товщина $t = 0,486$ мм; $R/t = 515$;

для циліндра Z33 –

$E_1 = 123,55$ ГПа; $E_2 = 8,7$ ГПа; $G_{12} = 5,7$ ГПа; $\nu_{12} = 0,31$; довжина $L = 510,0$ мм; радіус $R = 250,625$ мм; $R/L = 0,491$; товщина $t = 1,25$ мм; $R/t = 200,5$.

Як бачимо, оболонки несуттєво відрізняються за радіусом і довжиною, але більш значно за товщиною. Механічні характеристики препрега, що використовується, також близькі, крім модуля E_1 .

Для циліндра Z36 –

$E_1 = 152,4$ ГПа; $E_2 = 8,8$ ГПа; $G_{12} = 4,8$ ГПа; $G_{23} = 3,27$ ГПа; $\nu_{12} = 0,31$; довжина $L = 800$ мм; радіус $R = 400$ мм; $R/L = 0,5$; товщина $t = 0,75$ мм; $R/t = 533,333$.

Використовуючи наведені дані про механічні та геометричні параметри оболонок при розв'язуванні однорідної системи (15), отримуємо спектр власних значень і відповідних хвильових чисел, які визначають критичні навантаження і форми втрати стійкості.

Найменше значення в отриманому спектрі визначає критичне навантаження, яке для оболонки Z22 дорівнює 25,7 кН, для Z33 – 172,73 кН, для Z36 – 88,32 кН. Позначимо ці значення як λ_{22} , λ_{33} і λ_{36} , відповідно. У роботах [11, 17] для обчислення аналогічних величин використовується формула, згідно з якою критичне навантаження для Z22 – 33,7 кН, для Z33 – 198,7 кН, що суттєво більше навантажень, які отримані в цій роботі. Якщо за реальні критичні навантаження для розглянутих варіантів оболонок приймемо експериментальні $\lambda_{22}^{ex} = 22,4$ кН, $\lambda_{33}^{ex} = 172,8$ кН, $\lambda_{36}^{ex} = 64$ кН, що опубліковані в роботах [11, 17], то для оболонки Z22 відношення $\lambda_{22}^{ex} / \lambda_{22} = 0,872$; для оболонки Z33 – $\lambda_{33}^{ex} / \lambda_{33} = 1,0$; для оболонки Z36 – $\lambda_{36}^{ex} / \lambda_{36} = 0,722$. Ці цифри свідчать про те, що реальна оболонка Z33 у порівнянні з оболонками Z22 та Z36 менш чутлива до характерних для кожної з них недосконалостей.

Нижче розглянемо вплив локальних і загальних недосконалостей на критичні значення осьового навантаження для розглянутих трьох варіантів.

На рис. 2, а, б (Z22); рис. 3, а, б (Z33) і рис. 4, а, б (Z36) показано діаграми деформування, що ілюструють залежність між стискаючим зусиллям і зближенням торців в безперервній послідовності рівноважних станів. При розв'язанні нелінійної системи (19) використовувався метод неперервного продовження, у відповідності до якого виконується умова рівноваги в кожній точці діаграми. Тому ці діаграми можна називати також кривими рівноважних станів.

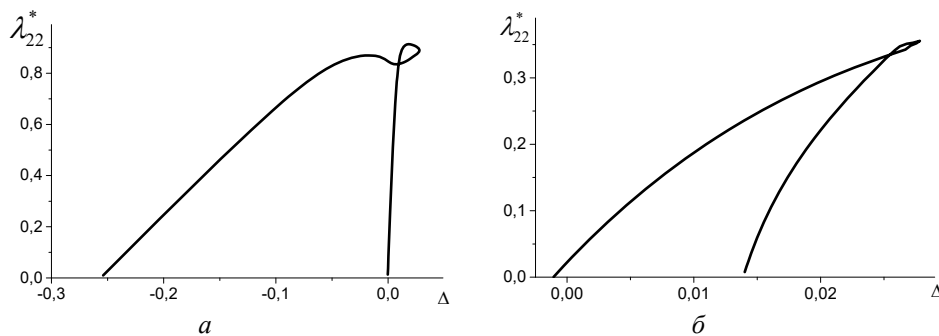


Рис. 2

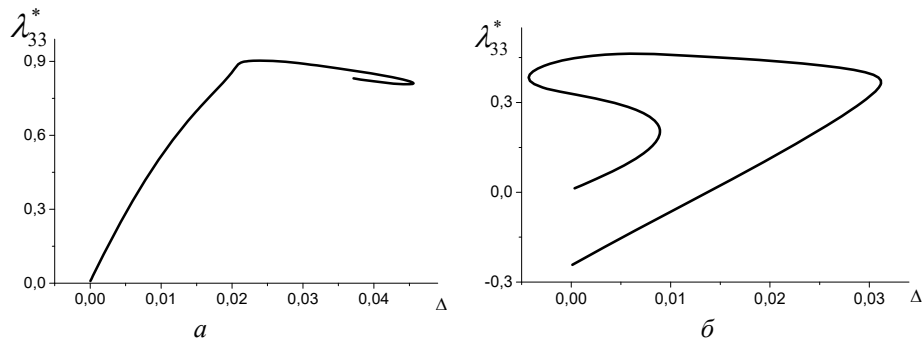


Рис. 3

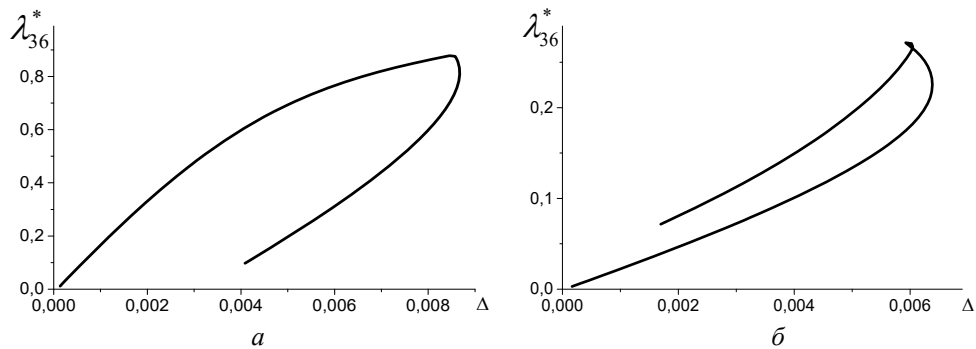


Рис. 4

На рис. 2, а; 3, а; 4, а на осі ординат нанесено значення відношень критичного навантаження оболонки з недосконалотями до критичного навантаження відповідної ідеальної оболонки – $\lambda_{ij}^* = \lambda_{ij}^S / \lambda_{ij}$, (позначки ij мають значення 22, 33, 36), при наявності тільки локальних прогинів з амплітудою $\bar{\xi} = 3$; на рис 2, б; 3, б; 4, б – значення $\lambda_{ij}^* = \lambda_{ij}^S / \lambda_{ij}$ для тих же оболонок, але при поєднанні локальних прогинів з амплітудою $\bar{\xi} = 3$ із загальним прогином у вигляді моди випучування, що відповідає мінімальному власному числу спектра з одиничною амплітудою.

На осі абсцис координатної системи кожного рисунка нанесені відносні величини укорочень $\Delta = (u_2 - u_1) / t$ відповідної оболонки. Відзначимо, що значення зусиль і переміщень обчислюються за умови існування розв'язку в регулярних і граничних точках рівноважних кривих.

Між діаграмами для оболонок Z22, Z33 і Z36 є істотна різниця, яка залежить від їх геометрії, структури шаруватого пакету, анізотропії і різної чутливості до початкових недосконалотей. Граничне навантаження при наявності тільки локальної недосконалоті для оболонки Z22 – $\lambda_{22}^* = 0,887$; для оболонки Z33 – $\lambda_{33}^* = 0,916$; для оболонки Z36 – $\lambda_{36}^* = 0,878$. Граничне навантаження при комбінації локального і загального у вигляді моди випучування прогинів для оболонки Z22 – $\lambda_{22}^* = 0,355$; для оболонки Z33 – $\lambda_{33}^* = 0,407$; для оболонки Z36 – $\lambda_{36}^* = 0,271$.

Порівнюючи ці результати, відзначаємо, що локальний прогин дослідженого типу оболонок при однакових амплітудах вм'ятин більш небезпечний для оболонки з структурою і властивостями Z36, так як при осьовому стиску для таких оболонок зменшення граничного навантаження істотніше, ніж для оболонок типу Z22, Z33. Крім того, рівноважні криві відрізняються також за виглядом. Оболонка Z33 менш чутлива як до локальних початкових прогинів, так і до комбінації локальних і загальних

прогинів, що відповідають найменшому власному числу. Цей факт підтверджується тим, що для оболонки Z33 збігаються розрахункове і експериментальне критичні навантаження. Для оболонок Z22 і Z36 різниця між ними дуже суттєва. Всі розрахунки в попередніх прикладах виконано з використанням механічних характеристик, що отримано експериментально в роботах [11, 17].

Для визначення впливу структурних недосконалостей матеріалу оболонки будемо використовувати формули (10), що враховують дефекти у вигляді тріщин на міжфазній границі. Обчислення будемо проводити для оболонки типу Z22. Для неї в табл. 2 наведено розрахункові при $\theta = 0$ (рядок 1) і експериментальні (рядок 2) механічні характеристики. Розрахункове критичне навантаження для такої оболонки дорівнює 23,05 кН, експериментальне – 22,4 кН.

Таблиця 2

| | E_1 , МПа | E_2 , МПа | G_{12} , МПа | G_{13} , МПа | G_{23} , МПа | ν_{12} |
|---|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------|------------|
| 1 | 142400,0 | 8563,6 | 3518,3 | 3518,3 | 3090,6 | 0,256 |
| 2 | 142500,0 | 8700,0 | 5100,0 | 5100,0 | 5100,0 | 0,286 |

Як бачимо, розрахункові та експериментальні модулі E_1 і E_2 відрізняються незначно, модулі G_{12} і G_{13} дорівнюють 0,69 від експериментальних, критичне навантаження з урахуванням розрахункових модулів дорівнює 1,03 від експериментального. Отримані результати свідчать про можливість застосування викладеного підходу до визначення механічних параметрів і їх використання при розрахунку критичних навантажень.

У табл. 3 наведено приклади розрахунку критичних навантажень λ'_{22} ідеальної оболонки типу Z22 з різними варіантами механічних характеристик, які визначаються величиною кута розкриття тріщин θ .

Таблиця 3

| θ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/2$ | π |
|-----------------|----------|----------|----------|---------|
| λ'_{22} | 23,05 кН | 20,24 кН | 12,29 кН | 9,28 кН |

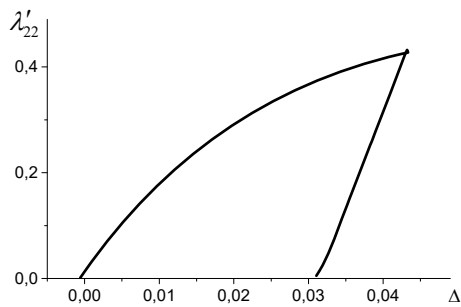


Рис. 5

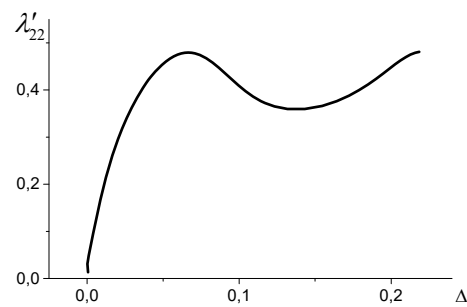


Рис. 6

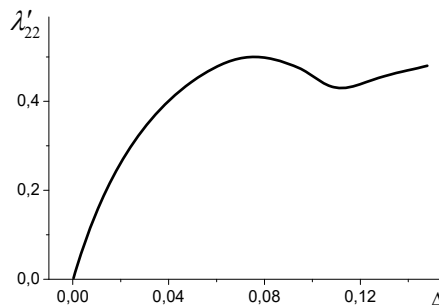


Рис. 7

На рис. 5 – 7 показані рівноважні криві для цієї оболонки з матеріалів з кутами розкриття тріщин на міжфазній границі $0; \pi/2$ і π при наявності загальних і локальних початкових прогинів.

На осі абсцис нанесені значення відносного укорочення оболонки, на осі ординат – відношення критичного навантаження оболонки з початковими прогинами λ_{22}^S до λ_{22}^I ($\tilde{\lambda}_{22} = \lambda_{22}^S / \lambda_{22}^I$) при $\theta = 0$ (рис. 5); при $\theta = \pi/2$ (рис. 6) та при $\theta = \pi$ (рис. 7). Крива рівноважних станів оболонки з кутом $\theta = 0$ близька за формою до кривої для оболонки Z22 на рис. 2, б. Максимальне значення ординат (граничні навантаження) для кожного варіанту розміру тріщин наведено в табл. 4.

Таблиця 4

| θ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/2$ | π |
|------------------------|-------|---------|---------|-------|
| $\tilde{\lambda}_{22}$ | 0,432 | 0,439 | 0,479 | 0,500 |

Зі збільшенням розміру тріщин граничні навантаження зменшуються, але відношення граничних навантажень до критичних збільшується.

Висновок.

1. Розроблено підхід до розв’язання нелінійної задачі про деформування шаруватої композитної циліндричної оболонки з багатомодальними геометричними та структурними недосконалостями при стиску в осьовому напрямку рівномірно розподіленими по торцювому перетині зусиллями. Для розв’язування нелінійних рівнянь теорії оболонок Тимошенка – Міндліна застосовано асимптотичний метод Біскова – Хатчінсона, в основі якого лежить теорія Койтера.

2. Моді, що враховуються, є власними функціями однорідної задачі, яка використовується для розрахунку спектра власних значень – критичних навантажень. Амплітуди мод дорівнюють коефіцієнтам рядів Фур’є, за допомогою яких апроксимуються локальні геометричні недосконалості, а також заданій амплітуді, що відповідає мінімальному власному числу.

3. Використання для розв’язування нелінійної системи алгебраїчних рівнянь методу неперервного продовження Давиденка дозволяє простежити нелінійний шлях рівноважних станів даної оболонки, включаючи граничні точки. При такому підході отримано розв’язок для трьох вуглепластикових оболонок, для яких відомі результати чисельних досліджень та експерименту [11, 17].

4. Рівноважні криві мають характерні риси, які залежать від геометричних параметрів, від кількості шарів, від напрямків армування і від анізотропії. Цей факт треба враховувати при проектуванні конструкцій з композиційних матеріалів.

Порівнюючи отримані результати з розв’язками, що приведені в роботах [11], можна відзначити відсутність на рівноважних кривих ділянки, що відповідає нижньому критичному навантаженню.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Наукова і науково-технічна діяльність наукових установ Національної академії наук України» (КПКВК 6541030).

РЕЗЮМЕ. Розроблено процедуру аналітичного розв’язування задачі про нелінійне деформування композитних циліндричних оболонок, поверхні яких мають початкові недосконалості у вигляді прогинів різного виду, а волокнистий матеріал оболонки має недосконалості у вигляді порушень ідеального зв’язку між матрицею та волокнами. Досліджено вплив вказаних факторів на критичні навантаження та характер закритичного стану оболонок при осьовому стиску.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: циліндрична оболонка, композитний матеріал, геометрична недосконалість, структурна недосконалість, осьовий стиск, стійкість, закритична поведінка.

1. *Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М.* Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – Київ: Каравела, 2010. – 352 с.
2. *Ванин Г.Л., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф.* Устойчивость оболочек из армированных материалов. – Киев: Наук. думка, 1978. – 212 с.
3. *Ванин Г.Л., Семенюк Н.П.* Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – Киев: Наук. думка, 1987. – 200с.
4. *Гавриленко Г.Д., Красовский Л.П.* Устойчивость круговых цилиндрических оболочек с одиночной локальной вмятиной // Проблемы прочности. – 2004. – № 3. – С. 52 – 58.
5. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – Москва: Наука, 1988. – 232 с.
6. *Гузь А.Н.* Механика разрушения при сжатии композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1990. – 630 с.
7. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. – 1953. – **88**, № 4. – С. 196 – 206.
8. *Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища шк., Лейпциг: Фахбухферлаг, 1982. – 480 с.
9. *Семенюк Н.П., Жукова Н.Б.* О двух методах расчета на устойчивость оболочек с одно- и много модальными несовершенствами // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 1. – С. 24 – 31.
10. *Arbelo M.A., Degenhardt R., Castro S.G.P., Zimmermann R.* Numerical Characterization of Imperfection Sensitive Composite Structures // Composite Struct. – 2014. – P. 295 – 303.
11. *Arbocz J., Babcock C.D.* The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells // J. Appl. Mech. – 1969. – **36**, N 1. – P. 28 – 38.
12. *Bisagni C.* Experimental buckling of thin composite cylinders in compression // AIAA J. – 1999. – **37**, N 2. – P. 276 – 278.
13. *Budiansky B.* Theory of Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic Structures // Adv. Appl. Mech. – 1974. – **14**. – P. 2 – 65.
14. *Byskov E., Hutchinson J.W.* Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells // AIAA J. – 1977. – **16**, N 7. – P. 941 – 948.
15. *Elishakoff I.* Probabilistic resolution of the twenties century conundrum in elastic stability // Thin-Walled Structures. – 2012. – **59**. – P. 35 – 57.
16. *Hühne C., Rolfes R., Breitbach E., Teßmer J.* Robust design of composite cylindrical shells under axial compression - simulation and validation // Thin-Walled Struct. – 2008. – **46**. – P. 947 – 962.
17. *Hilburger M. W.* Developing the next generation shell buckling design factors and technologies // AIAA Preceedings. 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Honolulu, USA, 2012. – P. 1 – 15.
18. *Koiter W.T.* Elastic stability and post-buckling behavior // Proc. Symp. Nonlinear Problems. – Madison: Univ. of Wisconsin Press. – 1963. – P. 257 – 275.
19. *Meyer-Piening H.-R., Farshad M., Geier B., Zimmermann R.* Buckling loads of CFRP composite cylinders under combined axial and torsion loading – experiment and computations // Composite Struct. – 2001. – **53**. – P. 427 – 435.
20. *Prabu B., Rathinam N., Srinivasan R., Naarayan K.A.S.* Finite-Element Analysis of Buckling of Thin Cylindrical Shell Subjected to Uniform Pressure // J. Solid Mech. – 2009. – **1**, N 2. – P. 148 – 158.
21. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Stability and Post-Buckling Behavior of Orthotropic Cylindrical Shells with Local Deflections // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 290 – 300.
22. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 40 – 53.
23. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Influence of the Mechanical and Geometric Parameters of Composite Cylindrical Shells with Local Deflection on the Behavior of the Equilibrium Curves under Axial Compression // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 1. – P. 63 – 74.
24. *Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B.* Stability and Initial Post-Buckling Behavior of Orthotropic Cylindrical Sandwich Shells with Unidirectional Elastic Filler // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 636 – 647.

Надійшла 03.12.2020

Затверджена до друку 31.05.2022