

**В. Ф. Мейш**<sup>1</sup>, **Ю. А. Мейш**<sup>2</sup>,  
**В. Ф. Корнієнко**<sup>1</sup>, **Є. А. Сторожук**<sup>1</sup>

**ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ  
ОБОЛОНОК ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ПІД ДІЄЮ РОЗПОДІЛЕНИХ  
ІМПУЛЬСНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: stevan@ukr.net;

<sup>2</sup>Національний транспортний університет,  
вул. Омеляновича - Павленка, 1, 01010, Київ, Україна; e-mail: juliameish@gmail.com

**Abstract.** A statement of dynamic problems for the cylindrical shells of the elliptical cross-section under the action of distributed nonstationary loads is given. The equation of oscillations is obtained from the Hamilton – Ostrogradsky variational principle on the basis of relations of the refined theory of Timoshenko-type orthotropic shells. A numerical algorithm for solving these problems is built, which allows obtaining the numerical results with a given accuracy. The influence of ellipticity of the cross-section on the stress-strain state of a closed cylindrical shell with rigidly fixed ends under the action of uniformly distributed internal impulse pressure is studied.

**Key words:** cylindrical shell, elliptical cross-section, Timoshenko type theory, impulse loading, numerical solution.

**Вступ.**

Циліндричні оболонки кругового і некругового (еліптичного, овального, тощо) поперечного перерізу знаходять широке застосування в різних областях техніки як конструктивні елементи приладів і машин. Напружено-деформований стан (НДС) циліндричних оболонок еліптичного перерізу при стаціонарних і нестаціонарних навантаженнях описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами [1 – 5]. Тому розв'язування задач про НДС еліптичних циліндричних оболонок пов'язане зі значними математичними труднощами. В основному, розглядалися задачі статичного деформування та стійкості оболонок канонічної форми (сферичні, кругові циліндричні та конічні оболонки). На даний час отримані аналітичні та чисельні розв'язки динамічних задач для оболонок канонічної форми [2, 3, 5]. Ці розв'язки одержані з використанням класичної (Кірхгофа – Лява) і уточненої (Тимошенка) моделей оболонок [2, 4, 7, 9 – 18].

Нижче в рамках моделі оболонок типу Тимошенка дано загальну постановку задач динаміки для циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу та розроблено чисельну методику розв'язання задач даного класу. Отримано чисельні розв'язки початково-крайових задач для еліптичних циліндричних оболонок під дією розподілених імпульсних навантажень.

**§1. Постановка задачі.**

Розглянемо циліндричну оболонку еліптичного поперечного перерізу і товщини  $h$ , яка виготовлена з ортотропного композитного матеріалу і перебуває під дією розподілених нестаціонарних навантажень  $P_3$ . Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат  $(s_1, s_2, z)$ , де  $s_1, s_2, z$  – довжини твірної, напрямної та

нормалі до серединної поверхні. Будемо вважати величину  $z$  додатною, якщо точка перебуває з боку опуклості серединної поверхні.

Площину поперечного перерізу оболонки віднесемо до системи координат  $(x, y)$ , а його рівняння запишемо в параметричній формі:

$$x = a \sin \alpha; \quad y = b \cos \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi), \quad (1.1)$$

де  $a, b$  – півосі еліпса;  $\alpha$  – параметр.

Зазначимо, що з використанням формули для довжини дуги кривої і співвідношень (1.1) побудована таблична функція, яка описує залежність довжини дуги еліпса  $s_2$  від параметра  $\alpha$ .

Для коефіцієнтів першої квадратичної форми і кривизн серединної поверхні циліндричної оболонки еліптичного перерізу маємо вирази

$$\begin{aligned} A_1 &= 1; \quad A_2 = (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}; \\ k_1 &= 0; \quad k_2 = ab(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

При побудові математичної моделі динамічної поведінки циліндричної оболонки еліптичного перерізу виходитимемо з таких припущень. Вважаємо, що НДС оболонки може бути визначено в рамках геометрично лінійного варіанту теорії оболонок типу Тимошенка [3, 4]. В цьому випадку закон зміни переміщень оболонки за товщиною має такий вигляд:

$$\begin{aligned} u_1^z(s_1, s_2, z) &= u_1(s_1, s_2) + z\varphi_1(s_1, s_2); \\ u_2^z(s_1, s_2, z) &= u_2(s_1, s_2) + z\varphi_2(s_1, s_2); \\ u_3^z(s_1, s_2, z) &= u_3(s_1, s_2), \quad z \in [-h/2, h/2]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тут  $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)^T$  – компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні.

Рівняння коливань для циліндричної оболонки еліптичного перерізу знаходимо, використовуючи варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського [2, 3]

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - K) - \delta A] dt = 0, \quad (1.4)$$

де  $\Pi, K$  – потенціальна та кінетична енергії оболонки;  $A$  – робота зовнішніх сил.

Вирази для величин  $\delta\Pi$  та  $\delta K$  мають вигляд

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \iint_S (T_{11}\delta\varepsilon_{11} + T_{22}\delta\varepsilon_{22} + S\delta\varepsilon_{12} + T_{13}\delta\varepsilon_{13} + T_{23}\delta\varepsilon_{23} + M_{11}\delta\chi_{11} + M_{22}\delta\chi_{22} + H\delta\chi_{12}) dS; \\ \delta K &= \rho h \iint_S \left[ \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) \right] dS. \end{aligned}$$

У цих виразах введені позначення:  $T_{11}, T_{22}, S, T_{13}, T_{23}, M_{11}, M_{22}, H$  – внутрішні зусилля і моменти;  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$  – компоненти деформації;  $\rho$  – густина матеріалу оболонки;  $t$  – час.

Перетворюючи рівняння (1.4) та прирівнюючи до нуля вирази при незалежних варіаціях  $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3, \delta \varphi_1, \delta \varphi_2$ , отримаємо рівняння коливань циліндричної оболонки еліптичного перерізу

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} &= \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3 &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

У випадку, коли напрямки ортотропії матеріалу збігаються з напрямками осей координат  $(s_1, s_2, z)$ , вирази для внутрішніх зусиль і моментів циліндричної оболонки еліптичного перерізу матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
T_{11} &= B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22}; \quad T_{22} = B_{21}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22}; \quad T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}; \quad T_{23} = B_{23}\varepsilon_{23}; \\
S &= B_s\varepsilon_{12}; \quad M_{11} = D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22}; \quad M_{22} = D_{21}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22}; \quad H = D_s\chi_{12},
\end{aligned} \tag{1.6}$$

де

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad B_{12} = \frac{E_1 \nu_{21} h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad B_{21} = \frac{E_2 \nu_{12} h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \\
B_{13} &= G_{13} h k^2; \quad B_{23} = G_{23} h k^2; \quad B_s = G_{12} h; \quad D_s = G_{12} h^3 / 12; \\
D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_{12} = \frac{E_1 \nu_{21} h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_{21} = \frac{E_2 \nu_{12} h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})};
\end{aligned}$$

$E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{21}$  – фізико-механічні характеристики матеріалу оболонки;  $k^2$  – коефіцієнт, який залежить від характеру розподілу зсуву за товщиною.

Компоненти деформації циліндричної оболонки еліптичного перерізу визначаються через компоненти узагальненого вектора переміщень за формулами [3, 5, 8]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3; \quad \varepsilon_{12} = \omega_1 + \omega_2; \quad \omega_1 = \frac{\partial u_2}{\partial s_1}; \quad \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial s_2}; \\
\varepsilon_{13} &= \varphi_1 + \theta_1; \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \theta_2; \quad \theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial s_1}; \quad \theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2; \\
\chi_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}; \quad \chi_{12} = \tau_1 + \tau_2 + k_1 \omega_2 + k_2 \omega_1; \\
\tau_1 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}; \quad \tau_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

При розв'язанні конкретних задач до рівнянь коливань потрібно приєднати відповідні граничні умови.

Також рівняння коливань доповнюються нульовими початковими умовами при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 = \varphi_2 = u_1 = u_2 = u_3 &= 0; \\
\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Таким чином, система співвідношень (1.5) – (1.8) являє собою повну систему рівнянь, яка дозволяє описувати динамічну поведінку циліндричних оболонок еліптичного перерізу в рамках найпростішого варіанту геометрично лінійної теорії оболонок типу Тимошенка з відповідними граничними і початковими умовами.

## §2. Чисельний алгоритм.

Рівняння неосесиметричних коливань циліндричних оболонок еліптичного перерізу (1.5) – (1.8) являють собою систему диференціальних рівнянь в частинних похідних. Алгоритм розв'язання даної системи базується на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови скінченно-різницевих рівнянь за просторовими координатами та явної скінченно-різницевої апроксимації за часовою координатою [3, 6]. Перехід від неперервної системи (1.5) – (1.8) до скінченно-різницевої відбувається за два етапи:

- перший етап полягає у скінченно-різницевій апроксимації рівнянь коливань (1.5) в зусиллях-моментах;
- другий етап апроксимації рівнянь полягає в скінченно-різницевій апроксимації величин зусиль-моментів (1.6) і відповідних деформацій (1.7).

Розглянемо область  $D$ , яка задається наступним чином:

$$D = \{0 \leq s_1 \leq L_1, 0 \leq s_2 \leq L_2, 0 \leq t \leq T\},$$

де  $L_1, L_2$  – довжини циліндра і поперечного перерізу (еліпса).

В області  $D$  введемо різницеву сітку  $\Omega = \Omega_{\Delta s_1 \Delta s_2} \cdot \Omega_\tau$ ,

де  $\Omega_{\Delta s_1 \Delta s_2} = \{(s_{1l}, s_{2m}) = (l\Delta s_1, m\Delta s_2), \Delta s_1 = L_1 / L, \Delta s_2 = L_2 / M, l = \overline{0, L}, m = \overline{0, M}\}$ ;

$$\Omega_\tau = \{t_n = n\tau, \tau = T / N, n = \overline{0, N}\}.$$

Поряд із основною різницевою сіткою введемо допоміжні різницеві сітки в дискретних точках  $(s_{1l \pm 1/2}, s_{2m}), (s_{1l}, s_{2m \pm 1/2}), (s_{1l \pm 1/2}, s_{2m \pm 1/2})$ , де  $s_{1l \pm 1/2} = (l \pm 1/2)\Delta s_1$ ,  $s_{2m \pm 1/2} = (m \pm 1/2)\Delta s_2$ .

Згідно даного підходу інтегруємо рівняння коливань (1.5) для циліндричної оболонки еліптичного перерізу в області  $\Omega_1 = \{s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}; s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2}\}$  при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} \right) d\Omega_1 dt &= \int_t \int_{\Omega_1} \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} d\Omega_1 dt; \\ \int_t \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} \right) d\Omega_1 dt &= \int_t \int_{\Omega_1} \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} d\Omega_1 dt; \\ \int_t \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3 \right) d\Omega_1 dt &= \int_t \int_{\Omega_1} \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} d\Omega_1 dt; \quad (2.1) \\ \int_t \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} - T_{13} + \frac{\partial H}{\partial s_2} \right) d\Omega_1 dt &= \int_t \int_{\Omega_1} \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} d\Omega_1 dt; \\ \int_t \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} \right) d\Omega_1 dt &= \int_t \int_{\Omega_1} \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} d\Omega_1 dt. \end{aligned}$$

Виконуючи операцію інтегрування у рівностях (2.1) на зазначених інтервалах з використанням явної апроксимації за часовою координатою, отримаємо наступні різницеві рівняння, що апроксимують рівняння коливань (1.5) циліндричної оболонки еліптичного перерізу

$$\begin{aligned}
& \frac{(T_{11})_{l+1/2,m}^n - (T_{11})_{l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} + \frac{S_{l,m+1/2}^n - S_{l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} = \rho h (u_{1l,m}^n)_{\bar{t}t}; \\
& \frac{S_{l+1/2,m}^n - S_{l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} + \frac{(T_{22})_{l,m+1/2}^n - (T_{22})_{l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} + \\
& + k_{2l,m} \frac{(T_{23})_{l,m+1/2}^n + (T_{23})_{l,m-1/2}^n}{2} = \rho h (u_{2l,m}^n)_{\bar{t}t}; \\
& \frac{(T_{13})_{l+1/2,m}^n - (T_{13})_{l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} + \frac{(T_{23})_{l,m+1/2}^n - (T_{23})_{l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - k_{2l,m} \frac{(T_{22})_{l,m+1/2}^n + (T_{22})_{l,m-1/2}^n}{2} + P_{3l,m}^n = \rho h (u_{3l,m}^n)_{\bar{t}t}; \\
& \frac{(M_{11})_{l+1/2,m}^n - (M_{11})_{l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} + \frac{H_{l,m+1/2}^n - H_{l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - \frac{(T_{13})_{l+1/2,m}^n + (T_{13})_{l-1/2,m}^n}{2} = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1l,m}^n)_{\bar{t}t}; \\
& \frac{(H)_{l+1/2,m}^n - (H)_{l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} + \frac{(M_{22})_{l,m+1/2}^n - (M_{22})_{l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - \frac{(T_{23})_{l,m+1/2}^n + (T_{23})_{l,m-1/2}^n}{2} = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{2l,m}^n)_{\bar{t}t}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Таким чином, в різницевих рівняннях коливань (2.2) компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу віднесені до вузлів основної різницевої сітки (з цілими індексами за просторовими координатами), а зусилля і моменти – до вузлів допоміжних різницевих сіток (з дробовими індексами).

Для того, щоб отримати узгоджені величини зусиль і моментів в різницевих рівняннях коливань (2.2) та узгоджені величини деформацій в різницевих співвідношеннях для зусиль і моментів, інтегруємо вирази для внутрішніх силових факторів (1.6) та компонентів деформації (1.7) в таких областях [3]:

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \{s_{1l-1} \leq s_1 \leq s_{1l}; s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2}\}; \\
\Omega_3 &= \{s_{1l} \leq s_1 \leq s_{1l+1}; s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2}\}; \\
\Omega_4 &= \{s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}; s_{2m-1} \leq s_2 \leq s_{2m}\}; \\
\Omega_5 &= \{s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}; s_{2m} \leq s_2 \leq s_{2m+1}\}
\end{aligned}$$

при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ .

### §3. Числові результати.

Як числовий приклад розглядалася задача динамічної поведінки замкненої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу під дією розподіленого внутрішнього імпульсного навантаження  $P_3(s_1, s_2, t)$ . Приймалося, що торці оболонки жорстко защемлені, тобто при  $s_1 = 0$  і  $s_1 = L_1$  задавалися граничні умови:

$$u_1 = u_2 = u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Початкові умови нульові.

Розподілене імпульсне навантаження  $P_3(s_1, s_2, t)$  задавалося наступним чином:

$$P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де  $A$  – амплітуда навантаження;  $T$  – часовий інтервал навантаження. Розрахунки виконувалися для  $A = 10^6$  Па;  $T = 50 \cdot 10^{-6}$  с.

Розв'язувалася задача для оболонки з наступними геометричними та фізико-механічними параметрами:  $h = 10^{-2}$  м;  $L_1 = 0,4$  м;  $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$ . Параметри еліптичного поперечного перерізу вибиралися такими: 1)  $a/b = 1$ ; 2)  $a/b = 1,01$ ; 3)  $a/b = 1,05$ ; 4)  $a/b = 1,1$ . В подальшому криві, що відповідають цим варіантам параметрів, на рисунках будуть зображені суцільними (варіант 1), короткими пунктирними (варіант 2), штрихпунктирними (варіант 3) та довгими пунктирними (варіант 4) лініями і позначені цифрами, відповідно, 1 – 4. Були виконані розрахунки для чотирьох вищевказаних варіантів еліптичного поперечного перерізу циліндричної оболонки в області  $D = \{0 \leq s_1 \leq L_1; 0 \leq s_2 \leq L_2/4\}$ . При розрахунках вибиралася наступна кількість інтервалів за координатами  $s_1$  та  $s_2$ :  $L = 160$ ;  $M = 60$ .

На рис. 1, 2 показано зміну прогину  $u_3$  та напруження  $\sigma_{22}$  вздовж твірної (координати  $s_1$ ) в перерізі  $s_2 = 0$  (у вершині малої півосі еліпса  $b$ ). Дані представлені для моменту часу  $t = 7T$ .

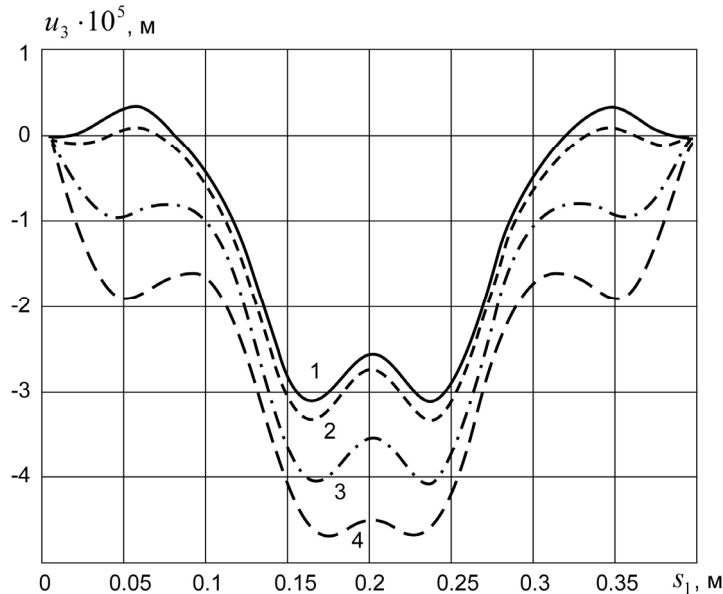


Рис. 1

З аналізу отриманих результатів випливає, що максимальні прогини  $u_3$  мають місце при  $3L_1/8 \leq s_1 \leq 5L_1/8$ . Різниця між результатами першого ( $a/b = 1$  – кругова цилінд-

рична оболонка) і другого ( $a/b = 1,01$ ) варіантів поперечного перерізу становить 6,5%, першого та третього ( $a/b = 1,05$ ) – 32,3%, першого і четвертого ( $a/b = 1,1$ ) – 48,4%. Як видно з наведеного графічного матеріалу, із збільшенням величини  $a/b$ , відповідно, збільшується величина максимального прогину  $u_3$ .

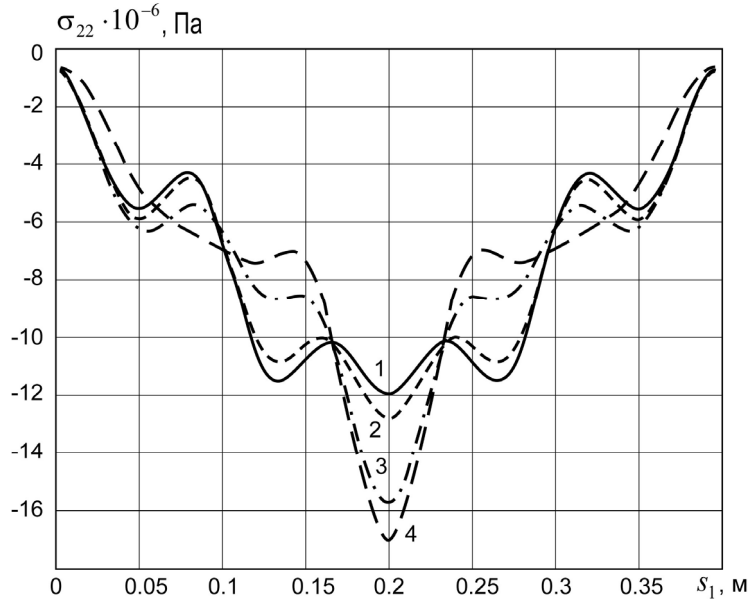


Рис. 2

Розглянемо максимальні значення напружень  $\sigma_{22}$  в перерізі  $s_2 = 0$ . Різниця між результатами першого і другого варіантів поперечного перерізу для максимальних напружень становить 6,7%, першого і третього – 31,7%, першого і четвертого – 41,7%. Так, як і для випадку прогинів, видно, що із збільшенням величини  $a/b$ , відповідно, збільшується величина максимального напруження  $\sigma_{22}$ .

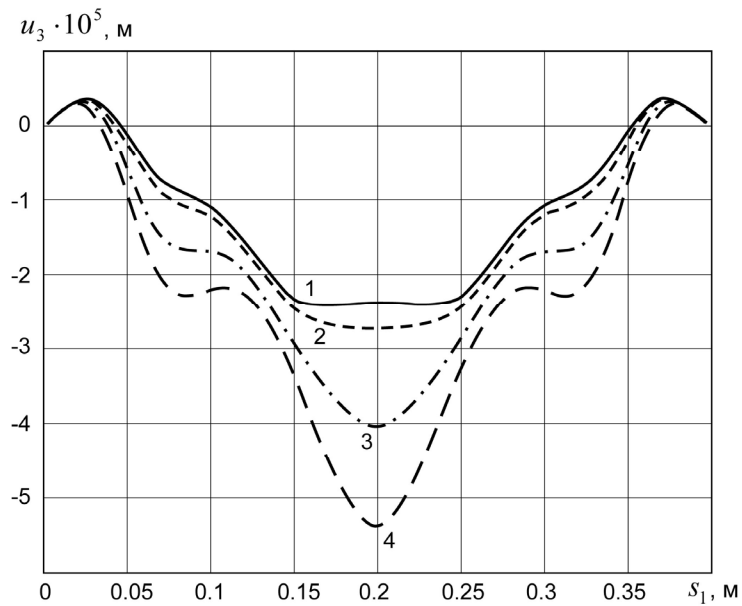


Рис. 3

На рис. 3, 4 для чотирьох варіантів поперечного перерізу оболонки наведено графіки величин  $u_3$  і  $\sigma_{22}$  в перерізі  $s_2 = L_2/4$  (вздовж твірної  $0 \leq s_1 \leq L_1$ ). Результати для прогину  $u_3$  представлені на рис. 3 в момент часу  $t = 5T$ , а для напруження  $\sigma_{22}$  – на рис. 4 в момент часу  $t = 4,5T$ .

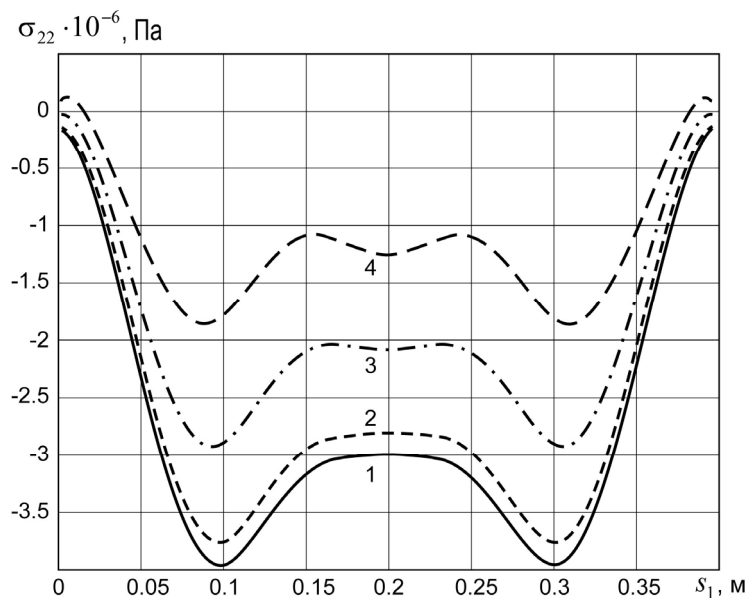


Рис. 4

З представлених даних випливає, що максимальні прогини  $u_3$  в перерізі  $s_2 = L_2/4$  мають місце в точці  $s_1 = L_1/2$ . Різниця між значеннями максимальних прогинів для першого і другого варіантів поперечного перерізу становить 12%, першого і третього – 66,7%, першого і четвертого – 123 %. Як видно з наведених графіків, що (як і для перерізу  $s_2 = 0$ ) зі збільшенням відношення  $a/b$  величина максимального прогину  $u_3$  також збільшується.

Напруження  $\sigma_{22}$  в перерізі  $s_2 = L_2/4$  досягають максимальних значень при  $s_1 = L_1/4$  та  $s_1 = 3L_1/4$ . Різниця між максимальними значеннями напружень для першого і другого варіантів відношення півосей еліпса ( $a/b$ ) становить 7,5 %, першого і третього – 27,5%, першого і четвертого – 55%. В порівнянні з результатами обчислення напружень в перерізі  $s_2 = 0$  в даному випадку (в перерізі  $s_2 = L_2/4$ ) спостерігається принципова різниця. Так, максимальні значення напружень  $\sigma_{22}$  в перерізі  $s_2 = L_2/4$ , на відміну від результатів для напружень в перерізі  $s_2 = 0$ , мають місце для кругової циліндричної оболонки ( $a/b = 1$ ), тобто, зі збільшенням відношення  $a/b$  величина максимального напруження  $\sigma_{22}$  зменшується.

#### Висновок.

Розглянуто задачі динамічної поведінки циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу під дією розподілених нестационарних навантажень. Наведено рівняння коливань оболонок даного класу з відповідними граничними та початковими умовами. Для розв'язування поставлених задач побудовано чисельний алгоритм, який базується на скінченно-різницевої апроксимації рівнянь коливань за просторовими та часовою координатами. Наведено числові результати для замкненої циліндричної оболонки еліптичного перерізу з жорстко закріпленими торцями під дією розподіленого імпульсного навантаження.



Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми КПКВК 6541030 «Наукова і науково-технічна діяльність наукових установ Національної академії наук України».

**РЕЗЮМЕ.** Дано постановку динамічних задач для циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу, що перебувають під дією розподілених нестационарних навантажень. Рівняння коливань отримано з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського на основі співвідношень уточненої теорії ортотропних оболонок типу Тимошенка. Побудовано чисельний алгоритм розв'язування даних задач, який дозволяє отримувати числові результати із заданою точністю. Досліджено вплив еліптичності поперечного перерізу на напружено-деформований стан замкненої циліндричної оболонки з жорстко закріпленими торцями під дією рівномірно розподіленого внутрішнього імпульсного тиску.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** циліндрична оболонка, еліптичний поперечний переріз, теорія типу Тимошенка, імпульсне навантаження, чисельний розв'язок.

1. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г., Столов В.П.* Численное исследование динамического деформирования многослойных композитных цилиндрических оболочек с тонкими жесткими слоями // Прикладные проблемы прочности и пластичности / Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб., Горьковский ун-т. – 1988. – С. 48 – 53.
2. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1980. – 376 с.
3. *Головка К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках (под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя). – Киев: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
4. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композитных материалов. – 1988. – № 2. – С. 287 – 298.
5. *Навал И.К., Пацюк В.И., Римский В.К.* Нестационарные волны в деформируемых средах. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 236 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1977. – 656 с.
7. *Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamics of Inhomogeneous Shell Systems under Non-Stationary Loading (Survey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 481 – 537.
8. *Meish V.F., Meish Yu.A., Pavlyuk A.V.* Dynamics of a Three-Layer Elliptic Cylindrical Shell Reinforced with Discrete Rings // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 172 – 179.
9. *Meish V.F., Meish Yu.A., Arnaut N.V.* Numerical Analysis of Unsteady Oscillations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Variable Geometries // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 426 – 33.
10. *Noor A.K., Burton W.S.* Assessment of Computational Models for Multilayered Composite Shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – **43**, N 4. – P. 67 – 97.
11. *Pagano N.J.* Free edge stress fields in composite laminates // Int. J. Solids Struct. – 1978. – **14**. – P. 401 – 406.
12. *Qatu M.S.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Shells: 1989 – 2000, Part 1: Laminated Composite Shells // Appl. Mech. Rev. 2002. – **55**, N 4. – P. 325 – 350.
13. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // Composite Struct. – 2010. – **93**, N 1. – P. 14 – 31.
14. *Reddy J.N., Liu C.F.* A higher – order shear deformation theory of laminated elastic shells // Int. J. Engng. Sci. – 1985. – **23**. – P. 669 – 683.
15. *Reddy J.N.* On refined computational models of composite laminates // Int. J. for Numerical Methods in Engng. – 1989. – **27**. – P. 361 – 382.
16. *Soldatos K.P.* Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, N 8. – P. 237 – 274.
17. *Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Dimitri R.* Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // Thin Walled Struct. – 2015. – **97**. – P. 114 – 129.
18. *Yamada G., Irie T., Tagawa Y.* Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile // J. Sound and Vibr. – 1984. – **95**, N 1. – P. 117 – 126.

Надійшла 18.01.2021

Затверджена до друку 31.05.2022