

В. П. Легеца

**ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ПОВЕДІНКИ МАЯТНИКОВОГО ГАСНИКА
КОЛИВАНЬ З РУХОМОЮ ТОЧКОЮ ПІДВІСУ**

*Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
пр. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: Viktor.Legeza@gmail.com*

Abstract. A mathematical model is constructed, which describes the forced oscillations of the vibration protection system with a pendulum damper of a new design with a movable suspension point. The model is described by a system of nonlinear differential equations. After the linearization of this system, the frequency response formula of the system is established. Within the framework of the obtained model, the frequency formula for small natural oscillations of a pendulum is obtained. The main regulating parameters of the damper which influence its optimum adjustment are established. A numerical analysis of the dynamic behavior of the vibration protection system shows the high efficiency of the proposed pendulum damper. With the optimal adjustment of the damper parameters, the level of amplitudes of the forced oscillations of the bearing body can be reduced by more than five times.

Key words: pendulum damper, vibration protection system, damper settings, moving suspension point, natural vibrations, amplitude-frequency response, equations of motion, Appell formalism, linearization.

Вступ.

Робота містить продовження попередніх досліджень автора в області віброзахисту великогабаритних несучих об'єктів [4, 5, 17]. До таких об'єктів відносяться гнучкі висотні споруди (телевежі, радіощогли, металеві витяжні труби), мостові переходи з довгими прольотами, електромережі з високою напругою [3 – 6, 10, 11, 14, 15, 19, 23]. Найбільш небезпечними для зазначених об'єктів є вимушені коливання різного походження, особливо в діапазоні основних частот власних коливань об'єкта. Для того, щоб вирішити цю проблему, використовують спеціальні пристрої – віброгасники [1, 3 – 6, 10 – 13, 15, 17, 19 – 21, 23]. Їх встановлюють на несучі об'єкти та у спеціальний спосіб налаштовують на основну частоту їх власних коливань.

Існують різні типи віброгасників; вони призначені для конкретних класів несучих об'єктів для боротьби з конкретними динамічними навантаженнями. Після встановлення на несучий об'єкт ці пристрої перетворюються на його невід'ємні конструктивні елементи з усіма вимогами щодо їх надійності, довговічності, корозійної стійкості, простоти налаштування, ефективності функціонування.

Теорія віброзахисту несучих об'єктів з використанням віброгасників як додаткових приєднаних мас (TMD – Tuned Mass Damper) була заснована на фундаментальній роботі Ден-Гартога [13].

Останнім часом увага, що приділяється теоретичним і експериментальним питанням придушення вимушених коливань висотних об'єктів, значно зросла. Це пов'язано з масштабною реконструкцією великогабаритних гнучких споруд (особливо телевеж, радіощогл, металевих витяжних труб, сталевих димарів, мостових прольотів), які від-

служили більше 30 – 40 років і вимагають або підсилення небезпечних ділянок висотних споруд, або розробки нових конструктивних рішень у зв'язку з модернізацією і встановленням на них сучаснішого обладнання [7 – 9, 14, 19, 23]. В останньому випадку виникають нові (додаткові) навантаження, що не передбачені початковим проектом. У цих умовах одним з найбільш дешевих і конструктивно простих рішень також є розробка і застосування різних типів віброгасників: маятникових, роликів, кульових, ударних [1, 3 – 6, 10 – 12, 17, 18, 20, 21, 23].

На сьогодні існує ряд віброгасників, які перевірені часом і в деякій мірі зняли гостроту проблеми негативного впливу вимушених коливань. Наприклад, досить глибокий розвиток отримала теорія динаміки систем віброзахисту із застосуванням маятникових гасників вимушених коливань [1, 3, 5, 6, 16, 17, 19, 23]. У ряді робіт запропоновані як теоретичні, так і експериментальні методи визначення оптимальних параметрів налаштування маятникових демпферів з метою зниження рівня динамічних навантажень на різні несучі об'єкти [1, 3, 5, 6, 8 – 12, 14, 16, 17, 19 – 21]. Разом з тим розробка нових методів віброзахисту несучих об'єктів і пошук засобів їх реалізації тривають [1, 4, 5, 8, 17, 18, 21].

Досить гострою проблемою є створення і впровадження простих і компактних гасників з низькою частотою власних коливань [1, 3 – 6, 11, 16 – 18, 20], які змогли би забезпечити віброзахист несучих об'єктів в низькочастотному діапазоні (0,5 – 2,0 рад/с). Це пов'язано з тим, що зі зростанням висоти (до 500 – 800 метрів) сучасних гнучких споруд частота основного тону їхніх власних коливань стає дуже малою, що і вимагає розробки та впровадження гасників з відповідними низькими власними частотами. Якщо не застосовувати гасники, то на таких низьких частотах гнучкі висотні споруди можуть мати дуже великі амплітуди вимушених коливань. Наприклад, в деяких випадках відхилення верхніх точок висотних споруд можуть сягати 2 – 3 м.

Конструктивно близьким до запропонованого гасника є маятниковий гасник з фіксованою точкою підвісу [1, 3, 6, 14, 17, 19, 23]. За своєю фізичною суттю це є математичний маятник, який виконаний у вигляді масивного робочого тіла, що закріплене в одній із двох точок підвісу. Сам підвіс зазвичай являє собою гнучкий трос (пучок тросів) або жорсткий стержень. Протилежний кінець підвісу шарнірно закріплено у верхній частині висотної споруди (несучого тіла). Зазвичай по вертикалі вказаний гасник може бути орієнтований в двох протилежних напрямках: а) як звичайний математичний маятник з робочим тілом, підвішеним на нижньому кінці підвісу [1, 3, 19], так і б) в перевернутому вигляді – робочим тілом вгору, а точкою закріплення – вниз [6]. Близьке до робочого тіла підвіс і висотну споруду з'єднують пружними елементами з регульованою жорсткістю, які обмежують амплітуди коливань (відхилень) робочого тіла гасника від вертикалі. Робоче тіло демпфера представляє собою масивний сталевий, чавунний або залізобетонний елемент, а в деяких випадках це є резервуар, наповнений рідиною. Пружний елемент виконано у вигляді сталевій пружини або системи пружин, за своєю конструкцією близькою до конструкції віброізолятора.

Істотним недоліком таких віброгасників є те, що їх власна частота визначається лише довжиною підвісу робочого тіла. Це конструктивне обмеження робить неможливим їх використання в низькочастотному діапазоні 0,2 – 2,0 рад/с.

Запропоновані маятникові гасники з рухомою точкою підвісу не мають цього конструктивного недоліку і можуть успішно застосовуватися в низькочастотному діапазоні. Теоретичне обґрунтування цього твердження буде представлено нижче.

1. Постановка задачі.

Розглядаються вимушені горизонтальні коливання системи зв'язаних твердих тіл «несучий об'єкт – маятниковий гасник вимушених коливань» (рис. 1). Як зовнішня збуджуюча сила $F(t)$ розглядається гармонічне навантаження $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$. Несуче тіло має масу M , робоче тіло маятникового гасника – масу $m \ll M$.

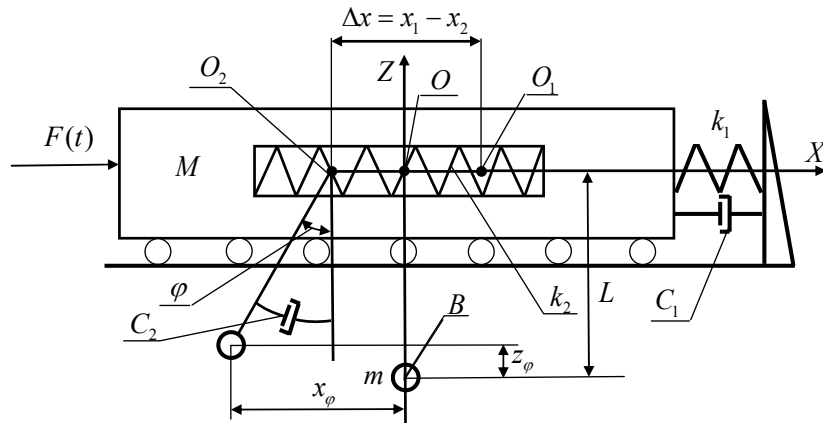


Рис. 1

Демпфування вимушених коливань несучого тіла здійснюється з використанням демпфера, який має коефіцієнт в'язкого опору C_1 . Жорсткість пружного елемента в точці підвісу маятничового гасника має величину k_2 . Придушення його коливань реалізується демпфером з коефіцієнтом в'язкого опору C_2 (рис. 1). Таким чином, частина енергії вхідного збурення розсіюється під час функціонування зазначених демпферів.

Підвіс маятничового гасника має довжину L , а масу самого підвісу в даному дослідженні не враховуємо. Відхилення підвісу маятничового гасника від вертикалі вимірюється кутом φ , який є однією з незалежних узагальнених координат системи «несучий об'єкт – маятничовий гасник вимушених коливань». Крім того, припускаємо, що коливання несучого об'єкта здійснюються в горизонтальному напрямку.

Головна конструктивна особливість і перевага даної віброзахисної системи перед існуючими системами з маятничовими гасниками [3, 6, 19, 23] полягає в тому, що частоту запропонованого віброгасника можна регулювати, починаючи з найменших її значень. У традиційних маятничових гасників регулювання частоти їх власних коливань здійснюється лише за рахунок зміни одного параметра – довжин L підвісу маятника, що обмежує частотний діапазон його застосування. У запропонованого маятничового гасника існує три таких параметри: L , k_2 , m . Обґрунтуємо це нижче, визначивши ті параметри, від яких залежить частота власних коливань гасника.

Мета дослідження.

1. Вивести рівняння власних коливань нового маятничового віброгасника, знайти формулу для визначення частоти його малих власних коливань і встановити ті параметри регулювання його динамічної поведінки, які дозволяють оптимально налаштувати маятничовий гасник на частоту несучого тіла.

2. Створити математичну модель процесу віброзахисту несучого тіла (висотного об'єкта), на її основі отримати амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) несучого тіла і надати кількісну оцінку ефективності функціонування нового маятничового гасника.

Геометричні співвідношення. Запишемо деякі геометричні співвідношення, необхідні в подальших викладах. Введемо прямокутну декартову систему координат OXZ так, як це показано на рис. 1. Початок горизонтальної осі OX помістимо в центрі мас O_1 несучого об'єкта, коли він перебував у вихідному положенні (на початку вимушених коливань). При цьому перша незалежна узагальнена координата x_1 описує відхилення OO_1 центру мас несучого об'єкта від його рівноважного положення в точці O . Точка O_2 підвісу маятника на початку руху також збігається з початком

системи координат – точкою O . При цьому проміжна узагальнена координата x_2 описує величину відхилення O_2O точки підвісу маятника від його початкового положення. В подальших перетвореннях вона буде виключена.

Величина $\Delta x = x_1 - x_2$ визначає горизонтальне переміщення вихідної точки підвісу маятника відносно центру мас несучого об'єкта. Відносний рух точки підвісу маятникового гасника і несучого об'єкта здійснюється за рахунок стиску – розтягу пружного елемента з жорсткістю k_2 . Для опису горизонтального і вертикального відхилень центру мас (точка B) робочого тіла маятника введемо такі координати (рис. 1):

$$x_\varphi = x_2 - L \sin \varphi; \quad z_\varphi = L(1 - \cos \varphi), \quad (1)$$

де кут φ – друга незалежна узагальнена координата.

Слід зазначити, що ця система має два ступені свободи і в кінцевому підсумку її динамічна поведінка описуватиметься двома незалежними координатами x_1 та φ .

2. Побудова диференціальних рівнянь руху віброзахисної системи.

Моделювання динамічної поведінки віброзахисної системи виконуватимемо за допомогою формалізму Апеля [22], оскільки його використання найшвидше призводить до мети.

Запишемо загальний вираз для функції Апеля – енергії прискорень всіх мас системи

$$S = \frac{M\dot{x}_1^2}{2} + m \frac{\dot{x}_\varphi^2 + \dot{z}_\varphi^2}{2}. \quad (2)$$

Розгорнемо вираз (2) для S , використовуючи співвідношення (1). Тоді загальна формула (2) набуде такого вигляду:

$$S = \frac{M\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m}{2} [\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_2 L(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) + L^2 \dot{\varphi}^4 + L^2 \dot{\varphi}^2]. \quad (3)$$

Запишемо рівняння Апеля в загальній формі:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{x}_1} = Q_{X_1}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{x}_2} = Q_{X_2}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} = Q_\varphi. \quad (6)$$

Визначимо всі частинні похідні, які входять у рівняння (4) – (6):

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{x}_1} = M\dot{x}_1; \quad (7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{x}_2} = m[\dot{x}_2 + L(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)]; \quad (8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} = mL(L\dot{\varphi} - \dot{x}_2 \cos \varphi). \quad (9)$$

Знайдемо узагальнені сили Q_{X_1} , Q_{X_2} , Q_φ , які містяться в правих частинах рівнянь (4) – (6). Спочатку запишемо вираз для суми елементарних робіт δA всіх активних сил, прикладених у центрах мас тіл системи, на їхніх віртуальних переміщеннях

$$\delta A = [F(t) - k_1 x_1 - C_1 \dot{x}_1] \delta x_1 - k_2 (x_1 - x_2) (\delta x_1 - \delta x_2) - (mgL \sin \varphi + C_2 \dot{\varphi}) \delta \varphi. \quad (10)$$

Після цього можна записати шукані нелінійні рівняння Апеля:

$$M \ddot{x}_1 = F(t) - k_1 x_1 - C_1 \dot{x}_1 - k_2 (x_1 - x_2); \quad (11)$$

$$m[\ddot{x}_2 + L(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)] = k_2 (x_1 - x_2); \quad (12)$$

$$mL(L\ddot{\varphi} - \ddot{x}_2 \cos \varphi) = -(mgL \sin \varphi + C_2 \dot{\varphi}). \quad (13)$$

Перейдемо до лінеаризованої системи рівнянь у припущенні малих кутів φ відхилення підвісу маятника від вертикалі (тобто, коли можна вважати, що $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, $\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \rightarrow 0$). Після відповідних перетворень система рівнянь (11) – (13) набуває такого вигляду:

$$\ddot{x}_1 = \bar{F}_0 \sin(\omega \cdot t) - \omega_0^2 x_1 - 2n_x \dot{x}_1 - \nu \cdot \omega_m^2 (x_1 - x_2); \quad (14)$$

$$\ddot{x}_2 - L\ddot{\varphi} = \omega_m^2 (x_1 - x_2); \quad (15)$$

$$2n_\varphi \dot{\varphi} + g\varphi = \omega_m^2 (x_1 - x_2), \quad (16)$$

де $\bar{F}_0 = F_0 / M$; $\omega_0^2 = k_1 / M$; $2n_x = C_1 / M$; $2n_\varphi = C_2 / (mL)$; $\nu = m / M$; $\omega_m^2 = k_2 / m$; $k_2 / M = \nu \cdot \omega_m^2$.

Тепер встановимо формулу для частоти власних коливань гасника, яка пов'язує його конструктивні параметри певною залежністю. Це пояснюється необхідністю оптимального налаштування цих параметрів на частоту несучого тіла.

3. Визначення формули для частоти власних коливань маятника з рухомою точкою підвісу та її аналіз.

Для визначення частоти малих власних коливань маятникового віброгасника зафіксуємо несучий об'єкт ($x_1 = 0$) і приберемо демпфування в самому гаснику ($C_2 = 0$). При цих умовах зі співвідношення (16) отримаємо таке рівняння:

$$g\varphi = -\omega_m^2 \cdot x_2, \text{ або } x_2 = -\frac{g\varphi}{\omega_m^2} \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\frac{g\ddot{\varphi}}{\omega_m^2}.$$

Підставимо останній вираз у співвідношення (15). В результаті дістанемо лінійне диференціальне рівняння власних коливань маятникового гасника з рухомою точкою підвісу

$$\left(L + \frac{g}{\omega_m^2} \right) \ddot{\varphi} + g\varphi = 0. \quad (17)$$

З формули (17) випливає, що власну частоту ω_G маятникового гасника слід визначати за формулою

$$\omega_G = \sqrt{g / \left[L + (g / \omega_m^2) \right]}. \quad (18)$$

Стисло проаналізуємо отриману формулу (18).

Очевидно, що частотна формула (18) перетворюється на відому формулу $\omega_G = \sqrt{g / L}$ для визначення частоти власних коливань класичного математичного маятника з нерухомою точкою підвісу за умови $\omega_m \rightarrow \infty$, тобто, коли точка підвісу

маятника жорстко зафіксована ($k_2 \rightarrow \infty$) і не може переміщуватись відносно несучого об'єкта. Якщо ж для частоти ω_m буде виконуватись інше граничне співвідношення $\omega_m \rightarrow 0$, то тоді гасник буде функціонувати в діапазоні низьких частот, близьких до нуля: $\omega_G \rightarrow 0$. При цьому довжина його підвісу немов би збільшується (не фізично, а віртуально) до нескінченності за рахунок зменшення коефіцієнта жорсткості $k_2 \rightarrow 0$ або збільшення маси робочого тіла гасника $m \rightarrow \infty$. Це зробити набагато простіше, ніж фізично збільшувати довжину L класичного математичного маятника до нескінченності. Окремо зазначимо, що вираз $L_{eq} = L + (g / \omega_m^2)$ у знаменнику формули (18) можна розглядати як довжину L_{eq} підвісу еквівалентного математичного маятника, який має таку ж частоту власних коливань, що й запропонований маятник з рухомою точкою підвісу.

Таким чином, віброгасник запропонованої конструкції при певному виборі конструктивних параметрів забезпечує можливість придушення вимушених коливань несучого тіла в низькочастотному діапазоні за $\omega_G \rightarrow 0$. Крім того, регулювання частоти власних коливань запропонованого гасника здійснюється за рахунок варіювання трьох параметрів k_2 , m , L . Це забезпечує більш широкі можливості по оптимальному налаштуванню гасника на частоту несучого об'єкта.

4. Визначення АЧХ віброзахисної системи із новим гасником.

Звільнімося від узагальненої координати x_2 , використовуючи при цьому рівняння (15) – (16). Після перетворень запишемо систему двох нових диференціальних рівнянь щодо решти узагальнених координат x_1 і φ :

$$\ddot{x}_1 + 2n_x \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \bar{F}_0 \sin(\omega \cdot t) - \nu(2n_\varphi \dot{\varphi} + g\varphi); \quad (19)$$

$$\frac{2n_\varphi}{\omega_m^2} \ddot{\varphi} + \left(L + \frac{g}{\omega_m^2} \right) \dot{\varphi} + 2n_\varphi(1 + \nu)\dot{\varphi} + (1 + \nu)g\varphi = \bar{F}_0 \sin(\omega \cdot t) - 2n_x \dot{x}_1 - \omega_0^2 x_1. \quad (20)$$

Розв'язок системи (19) – (20) будемо шукати у такому вигляді:

$$x_1 = A \sin(\omega \cdot t + \alpha); \quad (21)$$

$$\varphi = B \sin(\omega \cdot t + \beta). \quad (22)$$

Підставимо функції (21) і (22) у рівняння (19) і (20). В результаті дістанемо:

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = \bar{F}_0 \sin(\omega t) - 2n_x A\omega \cos(\omega t + \alpha) - A\omega_0^2 \sin(\omega t + \alpha) - \\ - \nu[2n_\varphi B\omega \cos(\omega t + \beta) + gB \sin(\omega t + \beta)]; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} -\frac{2n_\varphi}{\omega_m^2} B\omega^3 \cos(\omega t + \beta) - \left(L + \frac{g}{\omega_m^2} \right) B\omega^2 \sin(\omega t + \beta) + 2n_\varphi(1 + \nu)B\omega \cos(\omega t + \beta) + \\ + (1 + \nu)gB \sin(\omega t + \beta) = \bar{F}_0 \sin(\omega \cdot t) - 2n_x A\omega \cos(\omega t + \alpha) - A\omega_0^2 \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (24)$$

Розглядаємо усталені коливання системи. Тому для визначення АЧХ віброзахисної системи використаємо метод осереднення за один період коливань [4, 16, 18, 19]. Помножимо рівняння (23) на $\sin(\omega t)$ і після цього проінтегруємо його на відрізок $[0, 2\pi]$. В результаті отримаємо:

$$-A\omega^2 \cos \alpha = \bar{F}_0 + 2n_x A\omega \sin \alpha - A\omega_0^2 \cos \alpha - \nu[gB \cos \beta - 2n_\phi B\omega \sin \beta]. \quad (25)$$

Тепер помножимо рівняння (24) на $\sin(\omega t)$ та проінтегруємо його на тому ж відрізьку. В результаті дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{2n_\phi}{\omega_m^2} B\omega^3 \sin \beta - \left(L + \frac{g}{\omega_m^2} \right) B\omega^2 \cos \beta - 2n_\phi(1+\nu)B\omega \sin \beta + (1+\nu)gB \cos \beta = \\ = \bar{F}_0 + 2n_x A\omega \sin \alpha - A\omega_0^2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (26)$$

Далі проведемо аналогічні перетворення рівнянь (23) та (24), попередньо помноживши їх на $\cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \sin \alpha = -2n_x A\omega \cos \alpha - A\omega_0^2 \sin \alpha - \nu(2n_\phi B\omega \cos \beta + gB \sin \beta); \\ -\frac{2n_\phi}{\omega_m^2} B\omega^3 \cos \beta - \left(L + \frac{g}{\omega_m^2} \right) B\omega^2 \sin \beta + 2n_\phi(1+\nu)B\omega \cos \beta + (1+\nu)gB \sin \beta = \end{aligned} \quad (27)$$

$$= -2n_x A\omega \cos \alpha - A\omega_0^2 \sin \alpha. \quad (28)$$

Об'єднаємо отримані рівняння (25) – (28) у систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих A, B, α, β :

$$A \cos \alpha (\omega_0^2 - \omega^2) - 2n_x A\omega \sin \alpha + \nu B(g \cos \beta - 2n_\phi \omega \sin \beta) = \bar{F}_0; \quad (29)$$

$$A \sin \alpha (\omega_0^2 - \omega^2) + 2n_x A\omega \cos \alpha + \nu B(2n_\phi \omega \cos \beta + g \sin \beta) = 0; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} 2n_\phi B\omega \left[\frac{\omega^2}{\omega_m^2} - (1+\nu) \right] \sin \beta + B \left[(1+\nu)g - \left(L + \frac{g}{\omega_m^2} \right) \omega^2 \right] \cos \beta = \\ = \bar{F}_0 + A(2n_x \omega \sin \alpha - \omega_0^2 \cos \alpha); \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} B \left[(1+\nu)g - \left(L + \frac{g}{\omega_m^2} \right) \omega^2 \right] \sin \beta - 2n_\phi B\omega \left[\frac{\omega^2}{\omega_m^2} - (1+\nu) \right] \cos \beta = \\ = -A(2n_x \omega \cos \alpha + \omega_0^2 \sin \alpha). \end{aligned} \quad (32)$$

Після виключення тригонометричних функцій із співвідношень (29) – (32) отримаємо дві формули для амплітудно-частотних характеристик системи (усі проміжні викладки опущені)

$$A(\omega) = \frac{\bar{F}_0}{ZNAM(\omega)}; \quad (33)$$

$$B(\omega) = \frac{A(\omega)\omega^2}{ZN(\omega)}, \quad (34)$$

де

$$ZN(\omega) = \sqrt{b_1^2(\omega) + b_2^2(\omega)}; \quad b_1(\omega) = 2n_\phi \omega \left(\frac{\omega^2}{\omega_m^2} - 1 \right); \quad b_2(\omega) = \left(L + \frac{g}{\omega_m^2} \right) \omega^2 - g;$$

$$ZNAM(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n_x^2 \omega^2 + \frac{\nu^2 \omega^4 (g^2 + 4n_\phi^2 \omega^2)}{ZN^2(\omega)} + SN(\omega) + CS(\omega);$$

$$SN(\omega) = \frac{4\nu\omega^3 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)n_\varphi - gn_x \right] \sin(\alpha - \beta)}{ZN(\omega)}; \quad \sin(\alpha - \beta) = \frac{b_1(\omega)}{ZN(\omega)};$$

$$CS(\omega) = \frac{2\nu\omega^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)g + 4n_x n_\varphi \omega^2 \right] \cos(\alpha - \beta)}{ZN(\omega)}.$$

Формула (33) представляє залежність величини максимальних амплітуд x_1 (в метрах) вимушених коливань несучого тіла від частоти ω , а формула (34) – залежність величини максимальних кутових відхилень φ (в радіанах) маятничого гасника від частоти ω .

5. Результати числових експериментів.

Для числового аналізу оберемо систему з наступними вихідними параметрами: $\bar{F}_0 = 0,03g$; $L = 2$ м; $\omega_0 = 1,5$ рад/с; $\nu = 0,075$; $n_x = 0,03$ с⁻¹. Величини $\bar{F}_0 = 0,03g$ та $n_x = 0,03$ с⁻¹ були визначені з використанням нормативних документів будівельної галузі [2, 3]. Параметри самого гасника n_φ , ω_m були знайдені за методикою, що викладена в наукових дослідженнях [4, 5, 10 – 13, 17 – 19, 23].

В основі методу оптимального налаштування параметрів гасника лежить відомий принцип «рівності двох максимумів» АЧХ (33) віброзахисної системи [4, 5, 10 – 13, 17 – 19, 23], які досягаються на двох частотах ω_1 та ω_2 в околі основної частоти несучого тіла ω_0 . Як параметри оптимального налаштування гасника розглядаються параметр демпфування n_φ коливань маятника і його частотний параметр ω_m . Параметр L обрано фіксованим і наперед заданим (тут $L = 2$ м).

Графічний метод налаштування гасника за частотою полягає у визначенні оптимального значення частотного параметра ω_m . Це значення отримуємо при перетині двох фрагментів частотних залежностей амплітуди несучого об'єкта в околі двох частот ω_1 і ω_2 за умови, що решта параметрів системи фіксована (рис. 2). Цей перетин і визначає оптимальну величину частотного параметра $\omega_m = 1,283$ (рад/с).

Результат застосування графічного методу для пошуку оптимальної величини параметра ω_m показаний на рис. 2.

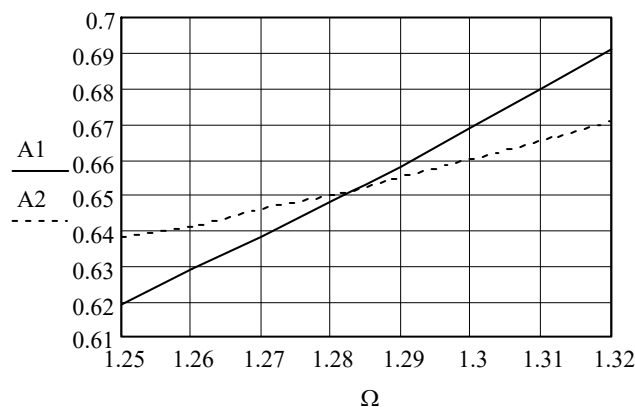


Рис. 2

Аналогічний підхід використовувався і при визначенні оптимальної величини коефіцієнта демпфування n_φ , тільки вже при встановленому значенні параметра

$\omega_m = 1,283$ рад/с . В результаті цього пошуку було визначено, що оптимальна величина коефіцієнта демпфування дорівнює: $n_\varphi = 11,65$ кг·м²/с (відповідний графік не показано).

На рис. 3 наведено графік АЧХ віброзахисної системи, обладнаної новим маятниковим гасником з оптимальними параметрами. Як бачимо, отримана АЧХ віброзахисної системи має два однакових за величиною максимуми A_1 і A_2 , які лежать по різні боки середньої частоти $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Ця частота близька за величиною основній частоті несучого об'єкта ω_0 . При цьому перший максимум A_1 відповідає частоті ω_1 , а другий A_2 – частоті ω_2 . Один із шляхів визначення цих частот – методи диференціального числення, що використовуються для пошуку екстремумів функцій однієї змінної. Знайшовши першу похідну від АЧХ (33) за частотою ω і прирівнявши її нулеві, дістанемо такі значення шуканих частот: $\omega_1 = 1,281$ рад/с ; $\omega_2 = 1,683$ рад/с .

Головний кількісний результат числових експериментів полягав у обґрунтуванні ефективності застосування нового віброгасника. Як випливає з графіка на рис.3, амплітуду x_1 вимушених коливань несучого об'єкта при оптимальному налаштуванні параметрів гасника можна знизити до рівня $A_1 = A_2 = 0,651$ м .

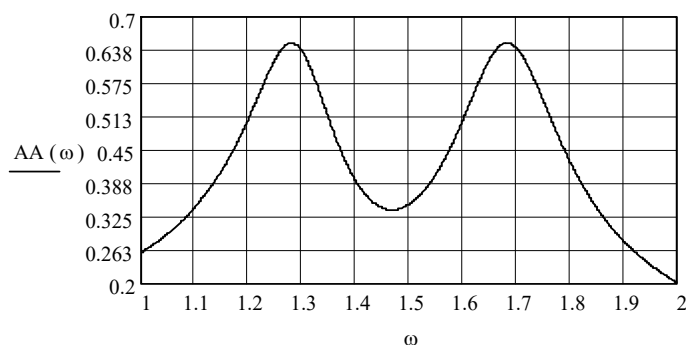


Рис. 3

Демпфувальні властивості гасника можна також продемонструвати за допомогою оцінки максимальної величини кутового відхилення φ_{\max} підвісу маятника від вертикалі. Для даного набору параметрів гасника максимальне кутове відхилення φ_{\max} підвісу маятника не перевищує 0,13 радіан (близько 8 градусів). Це одночасно обґрунтовує коректність використання лінійної моделі для числового аналізу динаміки віброзахисної системи, яка розглядається в цій статті.

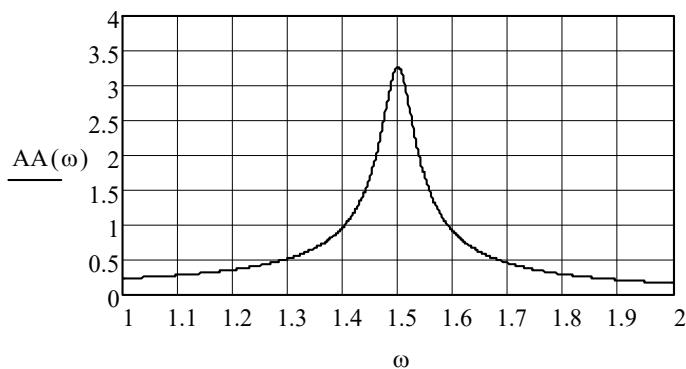


Рис. 4

Для порівняння на рис. 4 показано графік АЧХ механічної системи без віброгасника. Як випливає з цього графіка, максимальна амплітуда x_1 несучого тіла в цьому випадку сягає величини $A = 3,33$ м, що в 5,1 рази більше, ніж із застосуванням нового маятнікового гасника.

Таким чином, ефективність функціонування запропонованого маятнікового гасника з рухомою точкою підвісу є достатньо високою.

Висновки.

Показано, що частота власних коливань нового гасника збігається з частотою власних коливань класичного математичного маятника з еквівалентною довжиною підвісу, яка дорівнює $L_{eq} = L + \frac{mg}{k}$. У разі, коли точка підвісу є нерухомою ($k \rightarrow \infty$), частотна формула перетворюється на відому формулу для частоти малих власних коливань математичного маятника $\omega = \sqrt{g/L}$. Якщо ж величина коефіцієнта жорсткості пружних елементів прямує до нуля ($k \rightarrow 0$), то частота гасника також прямує до нуля. Відзначена важлива конструктивна особливість запропонованого маятника, яка полягає в тому, що за рахунок відповідного вибору трьох регулюючих параметрів маятника (k, L, m) його частоту за величиною при необхідності можна зробити будь-якою в діапазоні від нуля до $\sqrt{g/L}$. Якщо вибір величини параметра L через певні обставини є обмеженим (наприклад, існує обмеження по висоті приміщення), то налаштування гасника у низькочастотному діапазоні можна здійснювати за рахунок вибору двох інших незалежних параметрів – k та m .

Числовий аналіз динамічної поведінки віброзахисної системи показав високу ефективність функціонування запропонованого гасника. За оптимального налаштування параметрів гасника рівень амплітуд вимушених коливань несучого тіла можна знизити більш, ніж в п'ять разів.

Результати дослідження будуть корисні для наукових фахівців в галузі теоретичної механіки, віброзахисту несучих об'єктів, проблем міцності, динаміки машин і механізмів.

РЕЗЮМЕ. Побудовано математичну модель, яка описує вимушені коливання віброзахисної системи з маятніковим гасником нової конструкції з рухомою точкою підвісу довжиною L . Модель описується системою нелінійних диференціальних рівнянь, після лінеаризації яких встановлено амплітудно-частотні характеристики віброзахисної системи. В рамках отриманої моделі знайдено частотну формулу для малих власних коливань маятника. Встановлено основні регулюючі параметри гасника, які впливають на його оптимальне налаштування. Доведено ефективність функціонування оптимально налаштованого гасника запропонованої конструкції: амплітуду вимушених коливань несучого тіла можна зменшити у п'ять разів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: маятніковий гасник, віброзахисна система, параметри налаштування гасника, рухома точка підвісу, власні коливання, амплітудно-частотна характеристика, рівняння руху, формалізм Аппеля, лінеаризація.

1. Вікович І.А., Дівесев Б.М., Мартин В.С. Застосування різного типу маятнікових динамічних гасників коливань // Вісник Нац. транспортного ун-ту. – 2014. – № 29(1). – С. 26 – 33.
2. ДБН В.1.2-2:2006. Навантаження і впливи. Норми проектування. – Київ: Мінбуд України, 2006. – 56 с.
3. Динамический расчет зданий и сооружений: Справочник проектировщика / Под редакцией Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича. – Москва: Стройиздат, 1984. – 304 с.
4. Легеца В.П. Теория виброзащиты систем с применением изохронных катковых гасителей: модели, методы, динамический анализ, технические решения. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2013. – 108 с.
5. Легеца В.П., Дычка И.А., Бовкун Я.В. Подавление колебаний проводов и тросов с использованием двухмассового маятнікового гасителя // Электрические системы и сети. – 2016. – № 2. – С. 7 – 13.

6. *Остроумов Б.В.* Динамический гаситель колебаний в виде перевернутого маятника с демпфированием // Изв. Высших Учебных Заведений (Строительство). – 2002. – № 9. – С. 36 – 38.
7. *Applied Technology Council (ATC).* Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings, ATC-40. – Redwood City, CA, 1996. – 334 p.
8. *ASCE 41-06,* Seismic Rehabilitation of Existing Buildings, – Reston: Amer. Soc. of Civil Engineers, 2007. – 411 p.
9. *Brownjohn J.M.W., Pan T.C.* Response of Tall Building to Weak Long Distance Earthquakes // Earthquake Engng. Struct. Dynamic. – 2001. – **30**. – P. 709 – 729.
10. *Chang C.C., Qu W.L.* Unified dynamic absorber design formulas for wind-induced vibration control of tall buildings // Struct. Desing of Tall Buildings. – 1998. – **7**, N 2. – P. 147 – 166.
11. *Chang C.C.* Mass Dampers and Their Optimal Designs for Building Vibration Control // Eng Struct. – 1999. – **21**, N 5. – P. 454 – 463.
12. *Dahlberg T.* On optimal use of the mass of a dynamic vibration absorber // J. Sound and Vibr. – 1989. – **132**, N 3. – P. 518 – 522.
13. *Den Hartog J.P.* Mechanical Vibrations. – New York: Dover Publications, 2013. – 464 p.
14. *Dynamic Response of Lattice Towers and Guyed Masts* (Ed. by Murty K.S. Madugula). – Reston: Amer. Soc. of Civil Engineers, 2002. – 264 p.
15. *Gerges R.R., Vickery B.J.* Wind Tunnel Study of the Across-Wind Response of a Slender Tower with a Nonlinear Tuned Mass Damper // J. Wind. – 2003. – **91**, N 8 – P. 1069 – 1092.
16. *Graham Kelly S.* Mechanical Vibrations: Theory and Applications. – Cengage Learning, 2012. – 672 p.
17. *Hu Z., Legeza V., Dychka I., Onai M.* Non-Linear Model of the Damping Process in a System with a two-mass Pendulum Absorber // Int. J. Intelligent Systems and Applications (IJISA), 2019. – **11**, N1, – P. 67 – 72.
18. *Karnovsky I.A., Lebed E.* Theory of Vibration Protection. – Berlin: Springer, 2016. – 673 p.
19. *Korenev B.G., Reznikov L.M.* Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications. – Chichester: John Wiley and Sons Ltd., 1993. – 368 p.
20. *Lee C.L., Chen Y.T., Chung L.L., Wang Y.P.* Optimal Design Theories and Applications of Tuned Mass Dampers // Eng. Struct. – 2006. – **28**, N 1. – P. 43 – 53.
21. *Leung A.Y.T., Zhang H.J.* Particle Swarm Optimization of Tuned Mass Dampers // Eng. Struct. – 2009. – **31**, N 3. – P. 715 – 728.
22. *Lurie A.I.* Analytical Mechanics. – Berlin: Springer, 2002. – 864 p.
23. *Sagar Jamle, Kundan Meshram, Rajesh Chouhan* Dynamic Analysis of Tuned Mass Damper on Steel Structure // A Technical Approach. IJRAR. – 2019. – **6**, N 2. – P. 956 – 960.

Надійшла 18.02.2021

Затверджена до друку 31.05.2022