

О.О.Сіренко<sup>1</sup>, О.С.Лимарченко<sup>1</sup>, В.В.Губська<sup>2</sup>

**ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ ЗБУРЕНЬ РІДИНИ  
НА ЕФЕКТИВНІСТЬ КЕРУВАННЯ РУХОМ ТІЛА НОСІЯ**

<sup>1</sup>Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,  
просп. Глушкова, 4е, 01033, Київ, Україна; e-mail: olelim2010@yahoo.com

<sup>2</sup>Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»  
просп. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: viktoriagubaskaia@gmail.com

**Abstract.** The problem of the reduction of the effect of the liquid mobility of the motion of a carrying body is considered. The problem is solved for the structure containing the liquid with a free surface. For a mathematical description of the problem, the variational approach with elements of the nonlinear mechanics and the idea of modal decomposition of the system variables are used. This approach enables the determination of the internal forces of interaction of a liquid with the tank walls in the analytical form. The suggested method of guidance is based on the idea of compensation of the liquid-structure interaction by the inclusion of this force into the control. This approach is verified for different problems of controlling (for short-term and the harmonic disturbance of the system motion). Here the potential of the method in the case of different initial perturbations of a free surface of the liquid is examined. The obtained results show that such initial perturbations weakly affect the motion of the structure under the selected guidance. Both the liquid excitations and force interaction of a liquid with tank walls become lower than in the case of uncontrollable motion and distortion of their laws of variation from the sinusoidal law is weaker. The suggested approach is based on the analytical properties of the selected nonlinear dynamic model of the combined motion of the structure with a liquid.

**Key words:** nonlinear dynamics, combined motion, reduction of a liquid mobility effect, control, compensation of the fluid–structure interaction response.

**Вступ.**

В динаміці конструкцій, що містять рідину з вільною поверхнею, найбільш складні режими поведінки систем спостерігаються у випадку значних проявів сумісності руху конструкції-носія і рідини з вільною поверхнею. Додаткові ускладнення вносить прояв кутового руху таких систем, який для більшості практичних випадків є домінуючим. Особливі складнощі виникають при розгляді режимів поведінки систем в нелінійному діапазоні збурень. В підсумку це призводить до необхідності розгляду задач динаміки нелінійних систем відносно великої розмірності. Якщо для задач нелінійної динаміки конструкцій з рідиною створені ефективні підходи для дослідження (переважно такі дослідження ґрунтуються на сумісному використанні варіаційних підходів і методу модальної декомпозиції [3, 7, 8, 17, 18]), то для вивчення проблем керування рухом таких систем існують результати лише для задач динаміки конструкцій з рідиною, які описані в рамках лінійних малорозмірних математичних моделей [1, 4, 9].

Відомо, що задачі керування сумісним рухом конструкцій, які мають багатоконпонентну структуру, є досить складними. Внутрішні ступені свободи системи (відношений рух складових компонент системи) значно ускладнюють як реальну поведінку

таких систем, так і формулювання відповідних математичних задач [3, 13, 14, 17]. Така задача має розглядатися в рамках сумісної задачі нелінійної динаміки конструкції з рідиною. Відносно висока розмірність системи та її нелінійність не дозволяють застосувати добре відомі математичні методи дослідження задач керування рухом [5, 6]. У той же час задачі високоточного маневрування конструкцій з рідиною є важливими в сучасній техніці, зокрема в аерокосмічній і енергетичній галузях.

Як свідчать сучасні огляди літератури, найбільші успіхи в моделюванні нелінійних задач динаміки конструкцій з рідиною з вільною поверхнею одержані на основі варіаційних алгоритмів [3, 7, 8, 10, 15 – 18]. В даному дослідженні математична модель задачі будується на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського з подальшим використанням методу модальної декомпозиції [17]. Відомо, що складовою частиною використання варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського є можливість аналітичного визначення сил взаємодії між компонентами. Для задач про динаміку конструкції з рідиною це дозволяє в аналітичному вигляді визначити головний вектор сил тиску рідини на стінки резервуара (силовий відгук рідини). На основі даних силової взаємодії конструкції з рідиною розглянуто алгоритм керування рухом, основною ідеєю якого є принцип компенсації силового відгуку рідини. Такий алгоритм дозволив побудувати керування, яке виключає вплив рухомості рідини на рух твердого тіла, що є вкрай важливим для високоточного виконання програмних рухів конструкцій з рідиною [11, 12]. Хоча це керування не є оптимальним, воно дозволяє ефективно вивчити нелінійну задачу у випадку її досить високої розмірності і одержати алгоритм забезпечення високоточних режимів руху конструкції носія з рідиною.

### 1. Математична модель системи.

Розглянемо задачу про рух системи «конструкція – рідина з вільною поверхнею». Вважається, що конструкція має порожнину циліндричної форми, частково заповнену рідиною. Конструкція розглядається як абсолютно тверде тіло, що здійснює поступальний і обертальний рухи під дією активних зовнішніх сил і моментів, а також за наявності кінематичних збурень. Приймається що рідина є ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух є безвихровим. Оскільки для більшості практичних задач число Рейнольдса лежить в межах  $10^4 \leq Re \leq 10^6$ , то при моделюванні властивостей в'язкості можна обмежитися припущенням теорії примежового шару і звести дію сил в'язкості до узагальненої дисипації за методикою [4]. Для числових прикладів у статті розглянуто циліндричний резервуар кругового поперечного перерізу. Розв'язок задачі будується за методом [3, 17], який пройшов багатобічну апробацію для задач динаміки конструкцій з рідиною при силовому і моментному збудженні руху і порівняння з якісними результатами теоретичних робіт і експериментів [7, 10, 11, 16, 19].

Математична модель системи є об'єктом неоднорідної математичної структури. Рух рідини описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, а рух конструкції – системою звичайних диференціальних рівнянь. В основу постановки задачі прийнято варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського в класичному вигляді

$$\delta I = 0, \text{ де } I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad L = T - \Pi.$$

Тут  $T$  і  $\Pi$ , відповідно, кінетична і потенціальна енергія системи. Конкретну форму цих виразів можна знайти в [3, 11, 15, 17]. В припущенні безвихрового руху ідеальної однорідної нестисливої рідини швидкість її руху  $\vec{v}$  визначається через суму скалярного  $\varphi$  і векторного  $\vec{\Omega}$  потенціалів  $\vec{v} = \vec{\nabla}(\varphi + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega})$ , де  $\vec{\varepsilon}$  і  $\vec{\omega}$  є, відповідно, поступальна і кутова швидкості руху резервуара,  $\vec{r}$  – радіус-вектор довільної точки рідини. Тут  $\varphi$  – потенціал швидкостей хвильового руху рідини; векторний потенціал  $\vec{\Omega}$  відповідає за зв'язаність кутового і хвильового рухів рідини. Згідно з варіаційним

принципом Гамільтона – Остроградського варіації змінних мають задовольняти всім кінематичним обмеженням задачі, до яких відносяться

а)  $\Delta\varphi = 0$  і  $\Delta\bar{\Omega} = 0$  в області  $\tau$ , яку займає рідина у збуреному русі, що є наслідком рівнянь нерозривності для руху рідини;

б)  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$  і  $\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial n} = \bar{r} \times \bar{n}$  на границі контакту рідини з твердими стінками  $\Sigma$ , що є умовами неперетікання через тверді границі;

в)  $\frac{\partial\xi}{\partial t} + \bar{\nabla}\xi \cdot [\bar{\nabla}\varphi + \bar{\nabla}(\bar{\omega} \cdot \bar{\Omega}) - \dot{\bar{\varepsilon}} - \bar{\omega} \cdot \bar{r}] = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \bar{\omega} \cdot \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial z} - \dot{\bar{\varepsilon}}_z - (\bar{\omega} \cdot \bar{r})_z$  на збуреній вільній поверхні рідини  $S$ , що є вимогою збігу руху в напрямку нормалі частинок рідини і вільної поверхні рідини.

Перехід до математичного об'єкту однорідної структури здійснюється методом модальної декомпозиції. З цією метою збурення вільної поверхні рідини  $\xi$  задаються у вигляді розкладу за формами вільних коливань рідини в циліндричному резервуарі

$$\xi = \sum_n a_n(t) \psi_n(r, \theta); \quad (1)$$

тут  $\psi_n(r, \theta)$  – форми вільних коливань рідини з вільною поверхнею, які визначаються з крайової задачі на власні значення  $\Delta\psi_i + \kappa_i^2\psi_i = 0$  на незбуреній вільній поверхні  $S_0$  з граничною умовою  $(\partial\psi_k)/\partial n = 0$  на контурі контакту незбуреної вільної поверхні рідини із стінками конструкції  $L_0$ ;  $a_n(t)$  – амплітуда коливань вільної поверхні рідини за  $n$ -ю формою. Рух рідини у всьому об'ємі описується потенціалом швидкостей  $\Phi$

$$\Phi = \varphi + \dot{\bar{\varepsilon}} \cdot \bar{r} + \bar{\omega} \cdot \bar{\Omega}. \quad (2)$$

Для скалярного і векторного потенціалів швидкостей приймалися такі розклади за власними формами коливань задачі  $\psi_n(r, \theta)$

$$\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\text{ch } \kappa_n(z+H)}{\kappa_n \text{sh } \kappa_n H}; \quad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 + \sum_n \bar{q}_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\text{ch } \kappa_n(z+H)}{\kappa_n \text{sh } \kappa_n H}. \quad (3)$$

У цих розкладах  $\bar{\Omega}_0$  – лінійна частина потенціалу Стокса – Жуковського, яка визначається з крайової задачі  $\Delta\bar{\Omega}_0 = 0$  в незбуреному об'ємі рідини  $\tau_0$  з граничною умовою  $\partial\bar{\Omega}_0/\partial n = \bar{r} \times \bar{n}$  на  $S_0 + \Sigma$ ;  $b_n(t)$  і  $\bar{q}_n(t)$  – амплітудні параметри потенціалів, які за методикою [3, 17] записуються через амплітудні параметри руху вільної поверхні рідини  $a_n(t)$ ;  $\kappa_n$  – відповідні корені функцій Бесселя. Можливість описувати рух рідини лише через рух її границь, тобто через параметри руху вільної границі і рух стінок резервуара, визначаються теоремою про те, що безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь. Саме це дозволяє за незалежні змінні обрати амплітудні параметри збурення форм коливань вільної поверхні рідини  $a_i$  (визначають рух вільної поверхні) та параметри поступального  $\varepsilon_i$  і обертального  $\alpha_i$  рухів конструкції, які визначають рух твердих границь області рідини. Обрані параметри повністю характеризують динаміку системи, оскільки за їх значеннями можна відновити характеристики руху вільної поверхні рідини  $\xi$ , поле швидкостей рідини, поле тисків.

Кінематичні граничні умови задачі про коливання рідини з вільною поверхнею у рухомому резервуарі мають подвійне значення, оскільки вони практично збігаються з умовами розв'язуваності крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа. За своїм змістом ці умови відповідають вимогам збереження об'єму рідини в її збуреному русі.

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \int_{\Delta \Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0. \quad (4)$$

Тут  $\Delta \Sigma$  є продовженням бічної поверхні резервуара над вільною поверхнею, куди можуть досягати гребні хвиль. Наявність доданка на поверхні  $\Delta \Sigma$  обумовлена нелінійністю формулювання задачі. Зауважимо також, що шляхом перетворень можна показати, що

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \int_{S_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} ds.$$

Згідно з методами аналітичної механіки варіації змінних на різних поверхнях і в об'ємі мають бути незалежними, а тому кожен з доданків (4) має бути нульовим. Тоді перша умова розв'язуваності крайової задачі збігається з умовою неперетікання на змочуваній поверхні, третя умова за змістом є умовою збереження об'єму рідини у її збуреному русі. Третя умова є наслідком нелінійної постановки задачі і врахуванням того, що рідина у збуреному русі буде підніматися вище рівня незбуреної вільної поверхні. Виконання першої і третьої умови гарантується вибором функцій  $\psi_i$  у співвідношеннях (1) і (3). Друга умова виконується в силу виконання умови неперетікання рідини через стінки резервуара в наслідок циліндричності резервуара.

Для повного задоволення всім кінематичним умовам задачі і визначення конкретної форми залежності  $b_i$  і  $\bar{q}_i$  від  $a_k$  лишається забезпечити виконання кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{\nabla} \xi \cdot [\bar{\nabla} \varphi + \bar{\nabla}(\bar{\omega} \cdot \bar{\Omega}) - \dot{\bar{\epsilon}} - \bar{\omega} \cdot \bar{r}] = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \bar{\omega} \cdot \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial z} - \dot{\bar{\epsilon}}_z - (\bar{\omega} \cdot \bar{r})|_z \text{ на } S. \quad (5)$$

Враховуючи, що кінематична гранична умова має виконуватися при довільних законах руху резервуара, умова (5) розпадається на наступні чотири умови на поверхні  $S$ , тобто при  $z = \xi$

$$L^{(0)}(\xi, \varphi) = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{\nabla} \xi \cdot \nabla \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0; \quad (6)$$

$$L^{(k)}(\xi, \bar{\Omega}_0) = \bar{\nabla} \xi \cdot \bar{\nabla} \Omega_k - \frac{\partial \Omega_k}{\partial z} + \bar{i}_k \cdot (\bar{i}_3 \times \bar{r}) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Тут  $\Omega_k$  – компоненти векторної складової потенціалу швидкостей  $\bar{\Omega}$ ;  $L^{(i)}(f, g)$  – диференціальні оператори ( $i = 0, 1, 2, 3$ ). Далі скористаємося методом Гальоркіна, помножимо ці диференціальні оператори на повну систему ортогональних функцій  $\psi_i$  і інтегруємо по області  $S_0$

$$\int_{S_0} L^{(i)} \left( \xi, \varphi, \Omega_k \right) \Big|_S \psi_k dS = 0 \quad \begin{matrix} (i = 0, 1, 2, 3) \\ (k = 1, 2, \dots) \end{matrix} \quad (8)$$

При цьому безпосереднє обчислення значень диференціального оператора  $L^{(i)}(f, g)$  наперед невідомій вільній поверхні  $S$ , тобто для  $z = \xi$ , робиться шляхом знесення даного оператора на незбурену вільну поверхню  $S_0$  з використанням розкладів (1) – (3) для збурень вільної поверхні рідини і потенціалів швидкостей. В підсумку це дозволяє визначити з точністю до величин четвертого порядку малості зв'язок між коефіцієнтами  $a_i, b_i$  і  $\bar{q}_i$  в такій формі

$$\begin{aligned} b_i &= \dot{a}_i + \sum_{n,m} \dot{a}_n a_m \gamma_{nmi}^w + \sum_{n,m,l} \dot{a}_n a_m a_l \delta_{nml}^w + \sum_{n,m,l,k} \dot{a}_n a_m a_l a_k h_{nmlki}^w; \\ \bar{q}_p &= \sum_j a_j \bar{\beta}_{jp}^u + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{\gamma}_{jkp}^u + \sum_{j,k,l} a_j a_k a_l \bar{\delta}_{jklp}^u. \end{aligned} \quad (9)$$

В цих співвідношеннях багатоіндексні коефіцієнти обчислюються як квадратури від форм коливань рідини  $\psi_i$ .

Виключення нелінійної кінематичної граничної умови на вільній поверхні в явному вигляді в квадратурах на етапі до розв'язання варіаційної задачі є принциповою відмінністю запропонованого методу, яка має як аналітичні переваги (зменшується кількість невідомих), так і створює зручності при чисельній реалізації всього алгоритму.

Після виконання цього етапу методу фактично ми перейшли до варіаційної задачі для вільної механічної системи зі змінними  $a_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\alpha_i$ . Зауважимо, що кількість рівнянь моделі і змінних дорівнює  $N+6$  (де  $N$  – кількість форм коливань рідини, які беруться до уваги в моделі) та дорівнює числу ступеней свободи моделі. При застосуванні варіаційного методу дослідження, який ґрунтується на варіаційному принципі Бейтмена [7, 18], кількість змінних параметрів в моделі буде  $5N+6$ , що безумовно створює проблеми в подальших аналітичних і чисельних дослідженнях.

Після підстановки розкладів (1) – (3) з співвідношеннями (9) систему рівнянь руху введемо на основі формулювання початкової задачі у вигляді варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського з використанням методів аналітичної і нелінійної механіки та варіаційних методів математичної фізики [3]. Така система рівнянь руху є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, в якій другі похідні невідомих входять лінійно. Це створює передумови для аналітичного зведення цієї системи рівнянь до форми Коші, яка є зручною для аналітичних досліджень і чисельного інтегрування.

Система рівнянь руху має такий вигляд [3]

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \bar{B}_r^1 + \sum_i a_i \bar{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_{+i} a_j a_k \bar{B}_{rijk}^4 \right\} + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pijr}^{3*} + E_{prij}^{3*} - E_{prij}^{3*} + E_{prji}^{3*}) \right] + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[ E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\
& + \dot{\varepsilon} \cdot \left[ \sum_i a_i \bar{D}_{ir}^2 + \sum_i \dot{a}_i a_j \bar{D}_{ijr}^3 + \sum_i \dot{a}_i a_j a_k \bar{D}_{ijk}^4 \right] + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \bar{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\bar{F}_{pir}^3 + \bar{F}_{pri}^3) + \sum_{i,j} a_i a_j (\bar{F}_{pijr}^4 + \bar{F}_{prij}^4 + \bar{F}_{prji}^4) \right] + \\
& + g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r + g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) + \\
& + g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3); \tag{10} \\
& \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_i \ddot{a}_i \left( \bar{B}_i^1 + \sum_j a_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) + \ddot{\varepsilon} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left[ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left( \bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_j a_k \bar{F}_{pij}^3 \right) \right] = \\
& = \frac{\bar{F}}{M_F + M_T} + \bar{g} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \left( \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) - \\
& - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left( \sum_i \dot{a}_i \bar{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \bar{F}_{pijk}^4 \right) - \\
& \quad - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left( \bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 \right); \\
& \quad \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} + \\
& \quad + 2 \ddot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left[ \bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 + \sum_i a_i a_j a_k \bar{F}_{pijk}^4 \right] + \\
& \quad + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] = \\
& = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left( \omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\
& \quad + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& \quad + 2 \ddot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \\
& \quad + 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left( \sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& \quad + 2 \ddot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \bar{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\
& \quad + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[ (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) \right] + \\
& \quad + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \left. \right] + \frac{2}{\rho} M_{ex}^r. \tag{12}
\end{aligned}$$

У рівняння руху (1) – (3) входять коефіцієнти (індексні вирази), які характеризують динамічну взаємодію в системі, інерціальні і статичні характеристики конструкції, а також зовнішні сили і моменти, що діють на конструкцію. Всі ці коефіцієнти визначаються в квадратурах від форм коливань вільної поверхні рідини і лінійних складових потенціалів Стокса – Жуковського [3]. У рівняння також входять механічні характеристики рідини (густина  $\rho$  і загальна маса рідини  $M_F$ ) і резервуара (маса

$M_T$  і момент інерції  $J_{res}^{ps}$ ), а також параметри розташування центрів мас резервуара і рідини відносно центра незбуреної вільної поверхні рідини. Одержана з варіаційної задачі система рівнянь у сукупності відповідає динамічним граничним умовам на вільній поверхні рідини, рівнянням поступального і кутового руху конструкції за умови сумісності руху конструкції і рідини.

Якщо записати систему рівнянь руху (11), (12) у вигляді

$$\ddot{\vec{\varepsilon}} = \frac{\vec{F} + \vec{R}}{M_F + M_T} + \vec{g}; \quad \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} \right) \right] = \frac{1}{\rho} (M_R^r + M_{ex}^r) \quad (r = 1, 2, 3),$$

де  $\vec{F}$  і  $M_{ex}^r$  – відповідно, зовнішня сила і момент, що діють на конструкцію, а  $\vec{R}$  і  $M_R^r$  – головні вектори сил і моментів тиску рідини на стінки конструкції, які за варіаційним підходом визначаються автоматично як складові частини техніки варіювання, то з рівнянь руху (1) – (3) можна вивести аналітичні вирази для цих параметрів силової і моментної взаємодії рідини з конструкцією. Зауважимо, що в літературі з динаміки конструкцій з рідиною така силова взаємодія зазвичай визначається шляхом інтегрування сил тиску на стінках резервуара, що значно складніше і зроблене лише для частинних випадків. Тут цей результат одержується автоматично як складова частина техніки варіювання і для більш загального випадку.

$$\vec{R} = \rho \left[ \left( \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) - \sum_i \ddot{a}_i \left( \vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) \right]; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} M_R^r = & -\frac{\rho}{2} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} - \\ & -\rho \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] + \\ & + \rho \sum_{p,s=1}^3 \left( \omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left( A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\ & + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\ & + \rho \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left( \sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right). \quad (14) \end{aligned}$$

Визначення параметрів силової і моментної взаємодії конструкції з рідиною в аналітичній формі дозволяє не лише оцінити таку взаємодію кількісно, а й запропонувати нові алгоритми керування рухом конструкцій з рідиною, в яких виключено чи значно послаблено вплив коливань рідини на динаміку руху конструкції.

## 2. Принцип побудови керування і приклади.

Основна ідея побудови керування сумісним рухом конструкції з рідиною полягає у принципі компенсації силової взаємодії рідини з резервуаром, яка робиться на основі включення до керування з протилежним знаком визначених в аналітичному вигляді сил і моментів, які створює тиск рідини на стінки конструкції, з метою гасіння впливу рухомості рідини на рух конструкції носія. На прикладі руху конструкції з рідиною покажемо, що шляхом компенсації силової взаємодії рідини з резервуаром з високою точністю подальший рух конструкції вдається забезпечити таким, який би відповідав

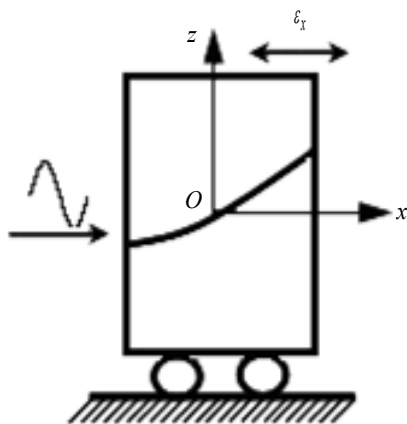


Рис. 1

руху системи із «затверділою» рідиною [11]. Раніше вже було показано, що для різних форм силового збудження руху (короткотривалі і періодичні збудження) таким керуванням вдається практично повністю виключити вплив рідкого наповнення на рух конструкції носія [11, 12], а також, що такий алгоритм забезпечує високу точність керування в різних діапазонах прояву нелінійних властивостей системи [2].

Для аналізу ефективності такого алгоритму вивчимо рух системи для трьох різних випадків початкового кінематичного збурення вільної поверхні рідини. Проаналізуємо збудження руху системи силовим імпульсом у вигляді прямокутного імпульсу, прикладеного до стінки циліндричного резервуара, тривалість

імпульсу вважається меншою за чверть періоду вільних коливань системи ( $\tau = 0,25\text{с}$ ). Загальна система руху такої системи показана на рис. 1.

Ставиться задача: перевірити точність алгоритму для різних початкових умов. Розглянемо випадок поступального руху конструкції з рідиною в горизонтальній площині з такими початковими умовами:

- відсутнє початкове відхилення рідини (з компенсацією / без компенсації);
- відхилення рідини на 0,1 радіуса по першій формі (з компенсацією);
- відхилення рідини на 0,1 радіуса по першій формі в протилежний бік (з компенсацією).

В цьому випадку рух конструкції повністю задається одним параметром поступального руху  $\varepsilon_x$ . Відповідно, два рівняння, які відповідають руху за напрямками  $y$  і  $z$  системи рівнянь (11) виключаються. Вивчається нелінійна модель сумісного руху конструкції з рідиною, коли враховується  $N = 12$  форм коливань вільної поверхні рідини. Числові результати отримано для вертикально розташованого кругового циліндричного резервуара радіуса  $R = 1\text{ м}$  з глибиною заповнення  $H = 1\text{ м}$ , заповненого водою; маса резервуара приймалась як 10 % від маси рідини (випадок суттєвого впливу рухомості рідини).

Результати числових розрахунків зображені на рис. 2 – 4. Всі лінійні розміри віднесено до радіуса резервуара. Криві відповідають випадкам:

- штрихова з короткими штрихами крива – відсутнє початкове відхилення рідини (без компенсації);
- суцільна крива – відсутнє початкове відхилення рідини (з компенсацією);
- штрихова з довгими штрихами крива – відхилення рідини на 0,1 радіуса за першою формою (з компенсацією);
- штрих-пунктирна крива – відхилення рідини на 0,1 радіуса за першою формою в інший бік (з компенсацією).

На рис. 2 представлено зміну в часі швидкості поступального руху резервуару. У випадку руху без компенсації силового відклику рідини система за короткий час набуває швидкість, що спочатку перевершує швидкість, яку б набула система із «затверділою» рідиною (суцільна крива). Надалі відбуваються коливання швидкості навколо цього значення (штрихова крива). У випадку руху системи з керуванням, яке включає компенсацію силового відклику рідини, закони руху системи для всіх варіантів початкових кінематичних збурень збігаються із законом руху системи із «затверділою» рідиною. Тобто, запропонований алгоритм керування для всіх варіантів початкових умов забезпечив з високою точністю рух системи, в якому виключено вплив рухомості рідини на рух конструкції носія.



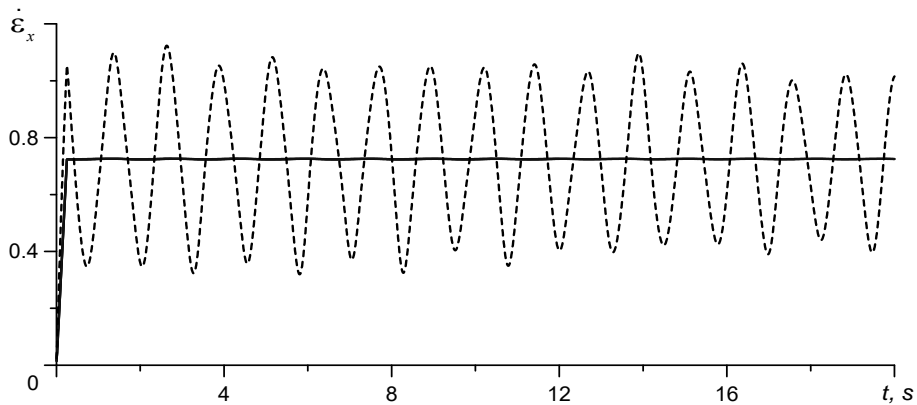


Рис. 2

На рис. 3 показано зміну в часі амплітуд коливань поверхневих хвиль на стінці резервуара для різних варіантів руху системи. В принципі коливання вільної поверхні рідини залишаються одного порядку і стають навіть трохи меншими, ніж у випадку руху системи без компенсації силового відклику рідини. В той же час для руху без компенсації з часом стає помітним вагоме відхилення від синусоїдального закону руху, яке слабо помітне для випадків руху системи з компенсацією рухомості рідини. Вказана властивість свідчить про більш комфортний рух рідини в резервуарі при компенсації силової взаємодії рідини з резервуаром, що, наприклад, буде сприяти зменшенню перемішування в рідині, яке є небажаним в разі транспортування екологічно небезпечних рідких речовин.

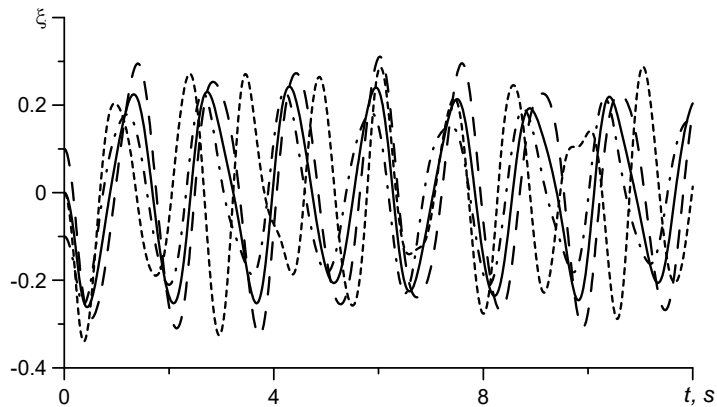


Рис. 3

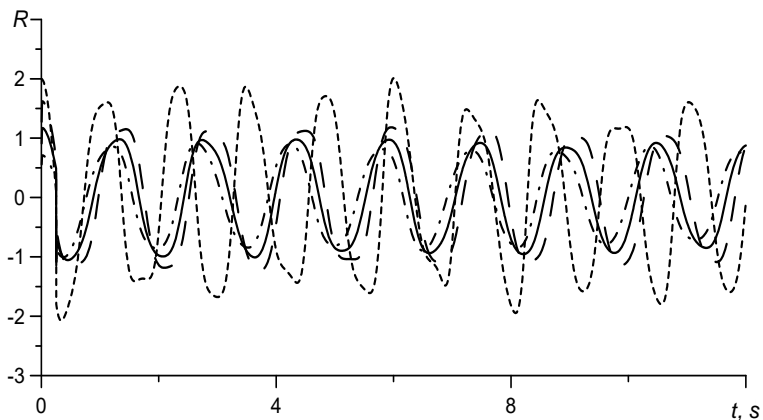


Рис. 4

Аналогічні результати одержано для силової взаємодії рідини з стінками резервуара (рис. 4). В цьому випадку рух без компенсації силового впливу рідини на стінки резервуара призводить до величин сил, які приблизно в півтора рази перевершують сили, які спостерігаються у випадку керованого руху. Також, у некерованому випадку відзначимо значні відхилення від синусоїдального закону зміни сили.

Числове моделювання дозволило встановити, що залежність зміни на вільній поверхні рідини хвиль та сил взаємодії тіла з рідиною від початкових збурень є достатньо слабкою. Запропонований алгоритм «обробляє» такі зміни внутрішніх параметрів системи і надає системі у всіх випадках рух, який з високою точністю збігається з рухом системи з «затверділою» рідиною.

Запропонована схема керування в рамках лінійного наближення фактично є керуванням з оберненим зв'язком відносно прискорень амплітуд збурень форм коливань вільної поверхні рідини з їх нормуванням за законом формування силового відгуку рідини, який надалі уточнюється нелінійними членами.

### **Висновки.**

Розглянуто задачу керування рухом конструкції з рідиною з вільною поверхнею в режимі руху з різними початковими кінематичними збуреннями вільної поверхні рідини. Для реалізації високоточного маневрування запропоновано алгоритм керування рухом конструкції з рідиною, в основі якого лежить принцип компенсації силової взаємодії рідини зі стінками резервуара. Показано ефективність такого підходу для побудови законів керування рухом для випадку імпульсного збудження руху силовим прямокутним короткотривалим імпульсом. Встановлено, що для різних початкових кінематичних збурень вільної поверхні рідини цей алгоритм забезпечує з високою точністю рух конструкції носія, який співпадає з законом руху системи для випадку «затверділої» рідини. Запропонований підхід базується на аналітичних властивостях початкової нелінійної динамічної моделі сумісного руху конструкції з рідиною і застосовується для вивчення нелінійної динамічної моделі високої розмірності, де використання традиційних підходів до розв'язування задач керування рухом є складним.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто задачу про зменшення впливу рухомості рідини на рух тіла носія для конструкції, яка містить рідину з вільною поверхнею. Для математичного опису задачі використано варіаційний підхід з елементами нелінійної механіки і ідей методу модальної декомпозиції змінних системи. Такий підхід дозволяє визначити в аналітичній формі внутрішні сили взаємодії рідини з стінками бака. Запропонований метод керування базується на ідеї компенсації взаємодії рідини з конструкцією шляхом включення цієї сили до керування. Цей підхід перевірено для різних задач керування (для короткотривалих і гармонічних збуджень руху системи). Тепер перевірено можливість методу у випадку різних початкових збурень вільної поверхні рідини. Одержані результати свідчать про малий вплив таких початкових збурень на рух конструкції при обраному керуванні. Збурення рідини і силова взаємодія рідини зі стінками бака зменшуються в порівнянні із випадком некерованого руху, спотворення законів їх зміни від синусоїдального слабшає. Запропонований підхід оснований на аналітичних властивостях конкретної нелінійної динамічної моделі сумісного руху конструкції з рідиною.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** нелінійна динаміка, сумісний рух, зменшення впливу рухомості рідини, керування, компенсація силової реакції рідини.

1. Абгарян К.А., Рапопорт И.М. Динамика ракет. – Москва: Машиностроение, 1969. – 378 с.
2. Лимарченко О.С., Нефьодов О.О., Сіренко О.О. Верифікація алгоритму керування резервуарами з рідиною на основі компенсації силового відгуку в різних діапазонах прояву нелінійностей // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. – 2020. – 2. – С. 88 – 93.
3. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — Киев: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с.
4. Микшиев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – Москва: Машиностроение, 1978. – 247 с.

5. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Реимин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – Москва: Физматгиз, 2006. — 328 с.
6. Dickmanns E.D. Dynamic Vision for Perception and Control of Motion. – London: Springer-Verlag, 2007. – 474 p.
7. Faltinsen O.M., Rognebakke O.M., Timokha A.N. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // *Physics of Fluids*. – 2006. – **1**, N 18. – P. 1 – 14.
8. Henderson D.M., Miles J.W. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line // *J. Fluid Mech.* – 1994. – **275**. – P. 285 – 299.
9. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 950 p.
10. Konstantinov A.V., Limarchenko O.S. Effect of the Viscosity and Capillarity of Fluid on the Nonlinear Dynamics of a Tank Partially Filled with a Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 2. – P. 130 – 138.
11. Konstantinov A.V., Limarchenko O.S., Lukyanchuk V.V., Nefedov A.A. Dynamic Methods of Damping the Oscillation in Structure-free-surface Fluid System // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 1. – P. 58 – 67.
12. Konstantinov A.V., Limarchenko V.O., Limarchenko O.S. Motion control for structure with liquid based on compensation of the liquid hydrodynamic response // *Problems of Control and Informatics* – 2020. – N 3. – P. 68 – 79.
13. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 4. – P. 353 – 364.
14. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 1. – P. 12 – 63.
15. Limarchenko O.S. Specific features of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of a liquid with free surface in cavities of noncylindrical shape // *Ukr. Math. J.* – 2007. – **59**, N 1. – P. 46 – 69.
16. Limarchenko O.S., Tkachenko R.V. Influence of Spring Attachment on the Dynamics of a Fluid-Filled Cylindrical Tank on a Moving Platform // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 3. – P. 289 – 294.
17. Limarchenko O.S., Semenovich K.O. Energy redistribution between the reservoir and liquid with free surface for angular motions of the system // *J. Mathem. Sci.* – 2017. – **222**, N 3. – P. 296 – 303.
18. Lukovsky I.A. Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid. – Berlin: De Gruyter, 2015. – 410 p.
19. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // *Int. J. Recent Trends in Engng.* – 2009. – **1**, N 6. – P. 1 – 5.

Надійшла 22.06.2021

Затверджена до друку 31.05.2022