

С. М. Склепус

ПОВЗУЧИСТЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ СКЛАДНОЇ ФОРМИ З ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,
вул. Дм. Пожарського, 2/10, 61046, Харків, Україна; e-mail: snsklepus@ukr.net*

Abstract. The problem of creep of hollow cylinders and bodies of revolution with complex shapes of functionally gradient materials is considered. For the variational statement of the problem, a functional in the Lagrange form is used, based on the kinematically possible rates of displacements. A numerical-analytical method is developed for solving the nonlinear initial-boundary creep problem. It is based on the joint application of the R-functions, Ritz, and Runge – Kutta – Merson methods. The advantages of the proposed method include: the accurate accounting of the geometric information about the boundary problem at the analytical level, without any approximation of it, the representation of an approximate solution of the problem in an analytical form, and the automatic selection of the time step. The problems of creep of a hollow cylinder and a complex-shaped body of revolution (a cylinder with a rectangular cutout on the outer surface) made of FGM based on aluminum, reinforced with SiC particles, and loaded with constant internal pressure, are solved. The creep of the material is described by the Norton law. The Young modulus and creep characteristics of the material depend on the volume fraction of the reinforcing material. The influence of the gradient properties of the material and the geometric shape on the stress-strain state under creep conditions is investigated.

Keywords: functionally graded material, body of revolution, complex shape, creep, R-functions method.

Вступ.

Функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), що розглядаються в даній роботі, є новим класом композитних матеріалів, які отримують в результаті сплаву металу і кераміки. Склад та структура ФГМ змінюються за деяким законом, що призводить до відповідних змін властивостей матеріалу. Фізико-механічні властивості ФГМ, зокрема пружні характеристики та характеристики повзучості, неперервно змінюються вздовж однієї чи кількох координат. На відміну від шаруватих композитних матеріалів, це дозволяє уникнути різких розривів у властивостях матеріалу на межах розділу шарів, які можуть призводити до концентрації напружень та руйнування [20]. Завдяки високим показникам міцності та термостійкості, керамо-металеві ФГМ використовуються в енергетиці, космічній техніці, хімічній промисловості, конструкціях, що працюють в екстремальних умовах при значних термомеханічних навантаженнях.

Осесиметрично навантажені порожнисті циліндри використовуються, наприклад, як резервуари під тиском (гідролічні балони, балони для авіаційно-космічної промисловості, котли, паливні баки), патрубки, корпуси акумуляторів, стволи гармат, трубопроводи ядерних реакторів та ін. [5].

Теорія та методи розрахунку повзучості циліндрів та тіл обертання, зокрема із ФГМ, інтенсивно розвиваються. Про це свідчить велика кількість робіт [6, 7, 8 – 12, 14, 16, 17 та інші], що опубліковані за останні роки. Як впливає з аналізу літератури, у більшості досліджень розглядають тіла канонічної форми: прями порожнисті цилін-

дри, сфери, конуси. При цьому, часто вводяться різні припущення, що дозволяють спростити початково-крайову задачу повзучості. Так, в [14, 16, 17, 19] досліджується ustalена повзучість осесиметрично навантажених функціонально-градієнтних циліндрів нескінченної довжини, коли розв'язок задачі може бути отриманий в аналітичному вигляді. Широкий аналіз аналітичних методів розв'язання змішаних осесиметричних задач для функціонально-градієнтних середовищ наведено у монографії [1]. В ній наголошується, що використання стандартного пакета методу скінчених елементів (МСЕ) може бути неприйнятним і призвести до якісно неправильних результатів щодо поведінки функціонально-градієнтних середовищ.

Якщо тіло обертання має складну геометричну форму, то в цьому випадку для розв'язання крайової задачі необхідно використовувати чисельні методи, що дозволяють знаходити наближений розв'язок в областях складної форми, наприклад, МСЕ [2], метод R-функцій [4], метод «занурення» [15] та ін. На відміну від інших методів, метод R-функцій дозволяє точно врахувати геометричну інформацію про крайову задачу та точно задовольняти заданим граничним умовам.

Мета роботи полягає у розробці чисельно-аналітичного методу розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) осесиметрично навантажених тіл обертання складної форми із функціонально-градієнтних матеріалів, що працюють в умовах повзучості, а також дослідженні впливу градієнтних властивостей матеріалу та геометричної форми на НДС.

1. Постановка та метод розв'язання початково-крайової задачі повзучості тіл обертання із функціонально-градієнтних матеріалів.

Розглянемо осесиметрично навантажене тіло обертання скінченної довжини з довільною формою меридіанного перерізу у циліндричній системі координат $O\varphi z$. Вісь Oz співпадає з віссю симетрії. Тіло виконане з функціонально-градієнтного матеріалу, пружні характеристики та характеристики повзучості якого змінюються у радіальному напрямку. Задачу будемо розв'язувати в геометрично лінійній квазістатичній постановці та в припущенні, що в процесі деформування пластичні деформації не виникають. У цьому випадку компоненти тензора швидкостей повних деформацій $\dot{\epsilon}_{kl}(r, z, t)$ можна записати у вигляді суми швидкостей пружних деформацій $\dot{\epsilon}_{kl}^e(r, z, t)$ і деформацій повзучості $\dot{p}_{kl}(r, z, t)$, тобто

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_{rr}^e + \dot{p}_{rr}; \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \dot{\epsilon}_{zz}^e + \dot{p}_{zz}; \quad \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}^e + \dot{p}_{\varphi\varphi}; \quad \dot{\epsilon}_{rz} = \dot{\epsilon}_{rz}^e + \dot{p}_{rz}.$$

Тут і далі крапка над символами означає повну похідну за часом t .

Крайова задача повзучості у довільний момент часу $t \neq 0$ може бути зведена до варіаційної задачі для функціонала у формі Лагранжа, визначеного на кінематично можливих швидкостях переміщень [8, 9]

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{\mathbf{U}}) = & 0,5 \iint_{\Omega} \left[\lambda_1(r) (\dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + r^{-2} \dot{u}_r^2) + G(r) (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + \right. \\ & \left. + 2\lambda(r) (\dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + r^{-1} \dot{u}_r (\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})) \right] r dr dz - \\ & - \iint_{\Omega} \left[\dot{u}_{r,r} \dot{N}_{rr}^c + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_{zz}^c + \dot{u}_r r^{-1} \dot{N}_{\varphi\varphi}^c + \dot{N}_{rz}^c (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \\ & - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n \dot{u}_n + \dot{P}_\tau \dot{u}_\tau) d\partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $\dot{\mathbf{U}} = (\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t))$ – вектор швидкостей переміщень; Ω – меридіанний перетин тіла; $\partial\Omega_p$ – частина контуру $\partial\Omega$, де прикладені зовнішні сили; \dot{P}_n, \dot{P}_τ – швидкості нормальної та дотичної складових зовнішніх сил; $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ – зовнішня нормаль та дотична до контуру $\partial\Omega$; $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$; n_r, n_z – напрямні коси-

ниси нормалі \mathbf{n} . Пружні характеристики: $\lambda(r) = \frac{E(r)\nu(r)}{(1-2\nu(r))(1+\nu(r))}$; $\lambda_1(r) = \lambda(r) + 2G(r)$; $G(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu(r))}$, де $E(r), \nu(r)$ – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу. Швидкості «фіктивних» сил, зумовлених повзучістю, обчислюються за формулами:

$$\dot{N}_{rr}^c = [\lambda_1(r)\dot{p}_{rr} + \lambda(r)(\dot{p}_{zz} + \dot{p}_{\varphi\varphi})]; \quad \dot{N}_{zz}^c = [\lambda_1(r)\dot{p}_{zz} + \lambda(r)(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\varphi\varphi})];$$

$$\dot{N}_{\varphi\varphi}^c = [\lambda_1(r)\dot{p}_{\varphi\varphi} + \lambda(r)(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{zz})]; \quad \dot{N}_{rz}^c = 2G(r)\dot{p}_{rz}.$$

Швидкості деформацій повзучості у функціоналі (1) вважаються відомими і тому не варіюються.

Розв'язок варіаційного рівняння $\delta\lambda = 0$ дає розподіл полів швидкостей переміщень у будь-якій точці тіла в момент часу $t \neq 0$. Основні невідомі задачі повзучості можуть бути знайдені шляхом інтегрування відповідних полів швидкостей із розв'язання задачі Коші за часом для системи звичайних диференціальних рівнянь виду:

$$\frac{du_r}{dt} = \dot{u}_r; \quad \frac{du_z}{dt} = \dot{u}_z;$$

$$\frac{d\varepsilon_{rr}}{dt} = \dot{u}_{r,r}; \quad \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} = \dot{u}_{z,z}; \quad \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dt} = \dot{u}_{r,r^{-1}}; \quad \frac{d\gamma_{rz}}{dt} = 2\frac{d\varepsilon_{rz}}{dt} = \dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r};$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dt} = \lambda_1(r)(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{p}_{rr}) + \lambda(r)(\dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{zz} - \dot{p}_{\varphi\varphi});$$

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dt} = \lambda_1(r)(\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{zz}) + \lambda(r)(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\varphi\varphi}); \quad (2)$$

$$\frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt} = \lambda_1(r)(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda(r)(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{zz});$$

$$\frac{d\sigma_{rz}}{dt} = G(r)(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz});$$

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = \dot{p}_{rr}; \quad \frac{dp_{zz}}{dt} = \dot{p}_{zz}; \quad \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} = \dot{p}_{\varphi\varphi}; \quad \frac{dp_{rz}}{dt} = \dot{p}_{rz}.$$

У початковий момент часу деформації повзучості дорівнюють нулю: $p_{rr} = p_{zz} = p_{\varphi\varphi} = 2p_{rz} = 0$. Початкові умови для решти невідомих функцій впливають із розв'язання задачі пружного деформування.

Припустимо, що повзучість матеріалу можна описати за допомогою закону Нортона [3]. У цьому випадку визначальні співвідношення повзучості матимуть вигляд:

$$\dot{p}_{rr} = \frac{3}{2}A(r)\sigma_i^{n(r)-1}\left(\sigma_{rr} - \frac{1}{3}I_1\right); \quad \dot{p}_{zz} = \frac{3}{2}A(r)\sigma_i^{n(r)-1}\left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3}I_1\right);$$

$$\dot{p}_{\varphi\varphi} = \frac{3}{2}A(r)\sigma_i^{n(r)-1}\left(\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}I_1\right); \quad \dot{p}_{rz} = \frac{3}{2}A(r)\sigma_i^{n(r)-1}\sigma_{rz}, \quad (3)$$

де $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{rz}^2}$ – інтенсивність напружень; $I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{zz} + \sigma_{\varphi\varphi}$; $A(r), n(r)$ – характеристики повзучості ФГМ.

Розв'язування задачі Коші за часом для системи рівнянь (2) будемо проводити методом Рунге – Кутта – Мерсона (РКМ) з автоматичним вибором кроку. Праві частини рівнянь (2) в моменти часу, що відповідають схемі РКМ, знаходяться із розв'язку варіаційної задачі для функціоналу (1), яку розв'язуватимемо методом Рітца у поєднанні з методом R -функцій [4]. У методі R -функцій проблема побудови систем базисних функцій, які точно задовольняють граничним умовам, вирішується шляхом побудови структур розв'язку крайових задач. Структура розв'язку містить явну залежність від геометричних та фізичних параметрів та точно задовольняє усім (загальна структура) або частині (часткова) граничних умов.

Для розв'язування пружної задачі, при знаходженні початкових умов для рівнянь (2), може бути використаний наведений вище функціонал. При цьому, у формулі (1) необхідно замінити похідні функцій за часом самими функціями, а фіктивні сили покласти рівними нулеві.

2. Числові дослідження.

Розглянемо повзучість тіл обертання: прямого порожнистого циліндра та тіла складної форми (циліндр із прямокутним вирізом на зовнішній поверхні), утвореного

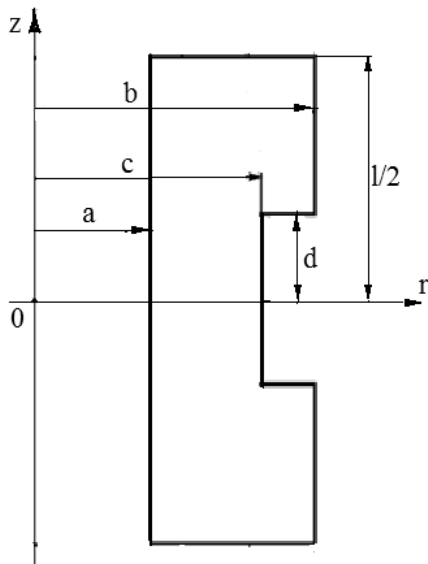


Рис. 1

обертанням плоскої фігури навколо осі Oz (рис. 1). Циліндри виконані з ФГМ на основі алюмінію, армованого частинками карбіду кремнію SiC та навантажені внутрішнім тиском інтенсивності $P = 50$ МПа. Геометричні розміри: $a = 0,01$ м; $b = 0,02$ м; $c = 0,018$ м; $d = 0,02$ м; довжина $l = 0,1$ м.

Вміст керамічних SiC-частинок лінійно змінюється вздовж радіусу, а об'ємна частка кераміки (%) при заданому радіусі підпорядковується закону [18]

$$V(r) = V_{\max} - \left(\frac{r-a}{b-a} \right) (V_{\max} - V_{\min}),$$

де V_{\max} і V_{\min} – максимальний та мінімальний вміст армуючих SiC-частинок на внутрішній та зовнішній поверхнях, відповідно.

Модуль Юнга ФГМ залежить від об'ємного вмісту армуючого матеріалу і наближено описується лінійним законом [13]:

$$E(r) = 6,9 \cdot 10^4 + 1,33 \cdot 10^3 V(r).$$

Коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$.

Характеристики повзучості ФГМ залежать від $V(r)$ і змінюються вздовж радіальної координати наступним чином [19]:

$$A(r) = A_0 \left[\frac{V(r)}{V_0} \right]^\varphi; \quad n(r) = n_0 \left[\frac{V(r)}{V_0} \right]^{-\varphi},$$

де $A_0 = 9,972 \cdot 10^{-13}$ МПа $^{-n_0}$ год $^{-1}$; $n_0 = 3,75$; $\varphi = 0,7$; V_0 – середній об'ємний вміст кераміки в циліндрі.

Нехай на кінцях $z = \pm l/2$ радіальні переміщення дорівнюють нулю. Тоді кінематичні граничні умови можна записати у вигляді:

$$\dot{u}_r = 0, \quad \text{при } z = \pm l/2,$$

а відповідна часткова структура розв'язку матиме вигляд:

$$\dot{u}_r = \omega_1 \Phi_1; \quad \dot{u}_z = z \Phi_2, \quad (4)$$

де Φ_1, Φ_2 – невизначені компоненти структури розв'язку $\omega_1 = \frac{1}{l} \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right)$ – смуга Ω_1 , укладена між лініями $z = -l/2$ і $z = l/2$ ($\omega_1 = 0$, $\omega_{1,n} = -1$ на межі $\partial\Omega_1$, $\omega_1 > 0$ всередині смуги).

За чисельної реалізації невизначені компоненти Φ_1, Φ_2 представлялися як скінченні ряди виду:

$$\Phi_1(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_1} C_n^{(1)}(t) f_n^{(1)}(r, z); \quad \Phi_2(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_2} C_n^{(2)}(t) f_n^{(2)}(r, z),$$

де $C_n^{(1)}(t), C_n^{(2)}(t)$ – невизначені коефіцієнти, які на кожному часовому кроці обчислюються методом Рітца; t – деякий фіксований момент часової дискретизації схеми РКМ або дискретизації за часом для видачі результатів розрахунку; $\{f_n^{(1)}\}, \{f_n^{(2)}\}$ – системи лінійно незалежних функцій, у якості яких використовувалися бікубічні сплайни Шенберга. Системи сплайнів будуються на регулярній сітці $K_r \times K_z$, де K_r, K_z – кількість відрізків дискретизації вздовж осей Or і Oz , відповідно.

Рівняння межі області, показаної на рис. 1, може бути записано у вигляді

$$\omega(r, z) = (\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 (\omega_3 \vee_0 \omega_4) = 0. \quad (5)$$

Тут $\omega_1 = \frac{1}{l} \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right)$; $\omega_2 = \frac{(r-a)(b-r)}{b-a}$; $\omega_3 = c-r$; $\omega_4 = \frac{1}{2d} (z^2 - d^2)$; \wedge_0, \vee_0 позначають R -кон'юнкцію та R -диз'юнкцію [4]: $f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, $f_1 \vee_0 f_2 = f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$.

Зазначимо, що оскільки структура розв'язку (4) задовольняє лише кінематичним граничним умовам, функція $\omega = \omega(r, z)$, що описує геометрію області, до неї не входить. Рівняння (5) використовувалося при просторовій дискретизації задачі для знаходження координат вузлів сітки інтегрування. Параметри просторової дискретизації: $K_r = 20, K_z = 20$ для циліндра з вирізом та $K_r = 10, K_z = 20$ для прямого циліндра. Задана похибка обчислень у методі РКМ $\varepsilon = 10^{-3}$.

Розрахунки виконано для циліндрів із трьох різних композитних матеріалів (таблиця). Тут цифра I відповідає матеріалу з однорідним розподілом армуючих частинок, а II, III – функціонально градієнтним матеріалам з меншим і більшим перепадом об'ємного вмісту армуючих частинок $V(r)$ вздовж радіальної координати. Середнє значення об'ємного вмісту SiC-частинок в усіх трьох випадках однакове.

Таблиця

Матеріал	$V_{\max}, \%$	$V_0, \%$	$V_{\min}, \%$
I	20	20	20
II	25	20	16
III	30	20	12

Деякі результати розрахунків у центрі циліндрів представлені на рис. 2 – 7. На рисунках цифрами 1 – 3 позначені графіки, що відповідають циліндрам із матеріалів I – III. Суцільними лініями показано результати розрахунків для прямого циліндра, а штриховими – результати для циліндра з вирізом. Рис. 2 ілюструє зростання радіальних переміщень у центрі на внутрішній поверхні циліндрів з однорідним розподілом

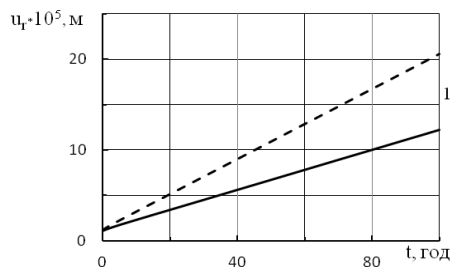


Рис. 2

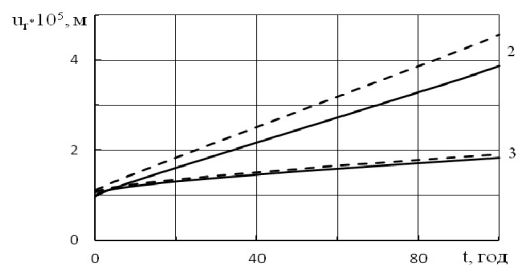


Рис. 3

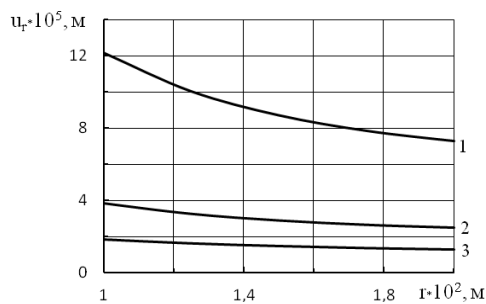


Рис. 4

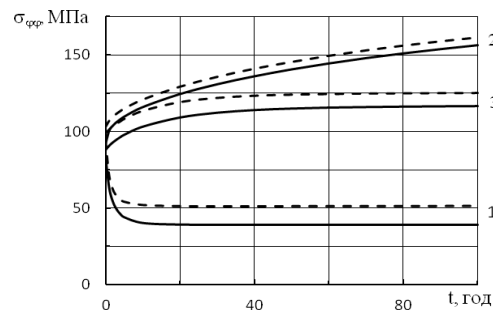


Рис. 5

SiC-частин, а рис. 3 – на внутрішній поверхні функціонально-градієнтних циліндрів. На рис. 4 показано розподіл радіальних переміщень у центрі за товщиною прямих циліндрів після 100 годин повзучості. На рис. 5 наведено зміну за часом колових напружень на внутрішній поверхні однорідних (криві 1) і функціонально-градієнтних циліндрів (криві 2, 3).

На рис. 6 представлено графіки напружень на зовнішній поверхні прямих циліндрів.

В процесі повзучості відбувається зростання переміщень та перерозподіл напружень. Радіальні переміщення у всіх трьох випадках зміни властивостей матеріалу за товщиною будуть максимальними на внутрішній поверхні циліндрів (рис. 4). Колові напруження в початковий момент часу максимальні на внутрішній поверхні. Потім, внаслідок повзучості, в циліндрі з однорідним розподілом армуючого матеріалу, на внутрішній поверхні в початкові моменти часу (до 20 годин) відбувається релаксація напружень (рис. 5, крива 1), а на зовнішній – зростання напружень (рис. 6, крива 1). Для функціонально-градієнтних циліндрів II та III спостерігається зворотна картина: на внутрішній поверхні, на початку процесу повзучості, напруження зростають (рис. 5, криві 2, 3), а на зовнішній поверхні відбувається релаксація (рис. 6, криві 2, 3).

Наявність на зовнішній поверхні циліндра прямокутного вирізу призводить у всіх трьох випадках до збільшення переміщень і напружень (рис. 2, 3, 5). При цьому ступінь впливу геометричної форми на НДС при повзучості істотно залежить від властивостей матеріалу. З рис. 2, 5 видно, що для циліндра з вирізом, виконаного з матеріалу з однорідним розподілом армуючих частинок, спостерігається значне зростання переміщень ($\approx 70\%$) і напружень ($\approx 32\%$) через 100 год повзучості, порівняно з прямим циліндром. Для тіл, виконаних із ФГМ II та III, вплив вирізу на НДС менш виражений (рис. 3, 5). Це пояснюється тим, що була видалена та частина циліндра, де вміст армуючих частинок мінімальний, а повзучість найбільш інтенсивна.

Рис. 7 ілюструє зміну колових напружень по товщині прямих циліндрів. Тут жирною лінією показано напруження у початковий момент часу для циліндра із ФГМ II. Для циліндрів з матеріалів I і ФГМ III напруження в початковий момент часу відрізняються від напружень, показаних жирною лінією, не більше ніж на 8% меншу або

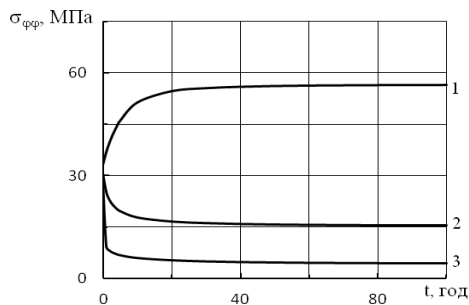


Рис. 6

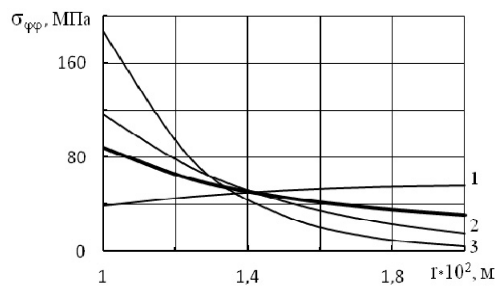


Рис. 7

більшу сторону, відповідно. Інші графіки отримані для моментів часу, що відповідають переходу процесу повзучості в стадію, що встановилася. Для циліндрів із матеріалів I та II цей час становить приблизно 100 год, а для циліндра з матеріалу III – 800 год. З рис. 7 видно, що при повзучості напруження в функціонально-градієнтних циліндрах поблизу внутрішньої поверхні зростають, а поблизу зовнішньої, де вміст SiC-частинок менший, відбувається релаксація (криві 2, 3). Для циліндра з постійним за товщиною об'ємним вмістом кераміки навпаки – на внутрішній поверхні відбувається релаксація, а на зовнішній – зростання напружень (крива 1).

Висновки.

Виконано постановку задачі повзучості для тіл обертання складної форми із функціонально-градієнтних матеріалів. Розроблено чисельно-аналітичний метод розв'язування початково-крайової задачі повзучості, оснований на використанні методів R -функцій, Рітца та Рунге – Кутта – Мерсона. Розв'язано задачі повзучості порожнистого прямого циліндра і тіла обертання складної форми (циліндр із прямокутним вирізом на зовнішній поверхні), виконаних із матеріалів на основі алюмінію, армованого частинками карбиду кремнію. Досліджено вплив градієнтних властивостей матеріалу та геометричної форми на напружено-деформований стан циліндрів при повзучості. Показано, що рівень впливу геометричної форми на напружено-деформований стан істотно залежить від властивостей матеріалу.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу повзучості порожнистих циліндрів і тіл обертання складної форми із функціонально-градієнтних матеріалів. Для варіаційної постановки задачі використовується функціонал у формі Лагранжа, заданий на кінематично можливих швидкостях переміщень. Розроблено чисельно-аналітичний метод розв'язання нелінійної початково-крайової задачі повзучості, який базується на спільному застосуванні методів R -функцій, Рітца і Рунге – Кутта – Мерсона. До переваг запропонованого методу можна віднести: точне врахування геометричної інформації про крайову задачу в аналітичному вигляді, без будь-якої її апроксимації, подання наближеного розв'язку задачі в аналітичному вигляді, автоматичний вибір часового кроку. Розв'язано задачі повзучості порожнистого циліндра і тіла обертання складної форми (циліндра з прямокутним вирізом на зовнішній поверхні) під дією постійного внутрішнього тиску, виконаних із ФГМ на основі алюмінію, армованого частинками SiC. Повзучість матеріалу описується законом Нортгона. Модуль Юнга і характеристики повзучості матеріалу залежать від об'ємного вмісту армуючого матеріалу. Досліджено вплив градієнтних властивостей матеріалу і геометричної форми на напружено-деформований стан при повзучості.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: функціонально-градієнтний матеріал, тіло обертання, складна форма, повзучість, метод R -функцій.

1. Айзикович С.М., Александров В.М., Васильев А.С., Кренив Л.И., Трубочик И.С. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. – Москва: Физматлит, 2011. – 192 с.
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – Москва: Мир, 1976. – 464 с.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – Москва: Наука, 1966. – 752 с.

4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
5. Arya V.K., Bhatnagar N.S. Creep of thick-walled orthotropic cylinders subjected to combined internal and external pressures // J. Mech. Eng. Sci. – 1976. – **18**, N 1. – P. 1 – 5.
6. Breslavs'kyi D.V., Korytko Yu.M., Morachkovs'kyi O.K. Cyclic thermal creep model for the bodies of revolution // Strength of Materials. – 2011. – **43**, N 2. – P. 134 – 143.
7. Chen J., Yoon K.B., Tu. S.T. Creep behavior of pressurized tank composed of functionally graded materials // J. Pressure Vessel Technology. – 2011. – **133**. – P. 69 – 77.
8. Galishin A.Z., Sklepus S.N. Estimating the Strength of Layered Cylindrical Shells under Creep // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 1. – P. 64 – 74.
9. Galishin A.Z., Zolochovsky A.A., Sklepus S.N. Feasibility of Shell Models for Determining Stress-Strain State and Creep Damage of Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 4. – P. 398 – 406.
10. Kashkoli M.D., Nejad M.Z. Time dependent thermo-elastic creep analysis of thick-walled spherical pressure vessels made of functionally graded materials // J. Theor. Appl. Mech. – 2015. – **53**, N 4. – P. 051401-1 – 051401-9.
11. Loghman A., Atabakhshian V. Semi-analytical solution for time-dependent creep analysis of rotating cylinders made of anisotropic exponentially graded material (EGM) // J. Solid Mech. – 2012. – **4**, N 3. – P. 313 – 326.
12. Nejad M.Z., Kashkoli M.D. Time-Dependent thermo-creep analysis of rotating FGM thick-walled cylindrical pressure vessels under heat flux // Int. J. Engng. Sci. – 2014. – **82**. – P. 222 – 237.
13. Ogierman W., Kokot G. Mean field homogenization in multi-scale modelling of composite materials // J. of Achievements in Materials Manufacturing Engng. – 2013. – **61**, N 2. – P. 343 – 348.
14. Shrikant K.V. Creep analysis of an isotropic functionally graded cylinder // J. Advances in Sci. and Technology. – 2012. – **3**, N 4. – P. 1 – 9.
15. Shupikov A.N., Smetankina N.V. Non-stationary vibration of multilayer plates of an uncanonical form. The elastic immersion method // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**, N 14. – P. 2271 – 2290.
16. Singh T., Gupta V.K. Modeling steady state creep in functionally graded thick cylinder subjected to internal pressure // J. Comp. Mater. – 2009. – **44**, N 11. – P. 1317 – 1333.
17. Singh T., Gupta V.K. Creep analysis of an internally pressurised thick cylinder of a functionally graded composite // J. Strain Analysis for Engng. Design. – 2009. – **44**. – P. 583 – 594.
18. Singh S.B., Ray S. Steady-state creep behavior in an isotropic functionally graded material rotating disc of Al-SiC composite // Metallurgical and Materials Transact. – 2001. – **32**, N 7. – P. 1679 – 1685.
19. Singla A., Gard M., Gupta V.K. Steady state creep behavior of functionally graded composite by using analytical method // Int. J. Comp. Applications: Proc. Int. Conf. on Advancements in Engineering and Technology (ICAET, August-2015). – 2015. – N 8. – P. 13 – 17.
20. Williamson R.L., Rabin B.H., Drake J.T., Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces, Part 1, Model description and geometrical effects // J. Appl. Phys. – 1993. – **74**, N 2. – P. 1310 – 1320.

Надійшла 17.02.2020

Затверджена до друку 31.05.2022