І.С.Баранюкова, В.Ф.Щербак

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ СИСТЕМИ ОСЦИЛЯТОРІВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Інститут прикладної математики і механіки НАНУ,
вул. Г. Батюка, 19, 84116, Донецька область, Слов'янськ, Україна;
e-mail: irina63m28@gmail.com; scherbakvf@ukr.net

Abstract. The problem of parameter identification of an oscillatory system consisting of coupled van der Pol oscillators is considered. The unknown parameters characterize the dissipation and frequencies of the system components. The method of invariant relations is used for identification scheme design. Such an approach allows to synthesize of the additional relations arising among the known and unknown quantities during the observed motion of the system. In the first step, the corresponding identification problem is solved for one of the autonomous van der Pol oscillators. Further, these results are extended to a system of coupled oscillators.

Key words: parameters identification, nonlinear oscillations, coupled van der Pol oscillators, invariant relations, asymptotic estimates.

Вступ.

У багатьох прикладних розділах фізики, біології та інших наук як наближену динамічну модель складних нелінійних коливальних процесів використовують модель, яка складається з одного або декількох зв'язаних між собою осциляторів ван дер Поля або деяких їх модифікацій [2]. З цієї причини нелінійні осцилятори вивчаються як спосіб моделювання, аналізу або навіть контролю у різних сферах, таких як електроніка [5], керування та робототехніка [10, 11], медико-біологічні дослідження [7], геологія [6] та ін. Природньо, що при цьому на практиці виникають проблеми визначення стану та параметрів таких динамічних моделей за результатами вимірювання вихідних сигналів у режимі реального часу.

Одну з таких проблем, а саме, ідентифікацію постійних параметрів в рівняннях системи осциляторів ван дер Поля розглянуто в даній роботі. Параметр μ характеризує величину нелінійного доданку, що описує змінне демпфування в рівнянні ван дер Поля. Другою константою є частота гармонійних коливань осцилятора ω в разі відсутності дисипації в системі. Спочатку побудовано нелінійний ідентифікатор, який формує асимптотичні оцінки невідомих для одного автономного осцилятора. Далі отриманий результат поширено на систему зв'язаних осциляторів.

Для побудови асимптотичних оцінок невідомих параметрів було використано відомий в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень [3], який використовується для отримання частинних розв'язків в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Модифікація цього методу щодо проблем теорії керування, спостереження та ідентифікації дозволяє синтезувати додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами вихідної системи, що виникають в процесі руху її розширеної моделі [1, 4, 12]. Варто зазначити, що більш загальний підхід, в якому розроблені відповідні методи розв'язку задач спостереження для нелінійних динамічних систем завдяки синтезу інваріантного многовиду в просторі розширеної системи, було запропоновано в роботах [8, 9] як певну модифікацію методу стабілізації нелінійних систем I&I (Input and Invariance – вхідний сигнал і інваріантність).

§1. Задача визначення характеристик осцилятора ван дер Поля.

Розглянемо рівняння ван дер Поля [13], яке описує процес релаксаційних коливань

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{1.1}$$

Тут x – відхилення від положення рівноваги; $\mu > 0$ – параметр, який характеризує амплітуду сил демпфування в системі. Відсутність нелінійного доданку в (1.1) відповідає гармонійним коливанням осцилятора без тертя з власною частотою ω. Розглянемо задачу визначення постійних параметрів μ і ω в припущенні, що значення фазового вектора $(x(t), \dot{x}(t))$ вимірюються, тобто є відомими функціями часу. При цьому передбачається, що спостережуваний рух – це коливання реального об'єкту, тобто функції $x(t)$, $\dot{x}(t)$ обмежені по модулю деякою константою для $t \in [0, \infty)$ і не рівні тотожно нулю. Позначивши $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$, перепишемо (1.1) у вигляді системи

$$\dot{x}_1 = x_2;\ \dot{x}_2 = \mu\left(1 - x_1^2\right)x_2 - \omega^2 x_1 \,. \tag{1.2}$$

Нашою метою є ідентифікація параметрів μ і ω за відомою інформацією про рух. Такою інформацією є вихід – функція часу $y(t) = \left(x_1(t), x_2(t)\right)$, а також ті величини, які можуть бути отримані з використанням значень виходу. Зокрема, далі відомим будемо вважати будь-який розв'язок задачі Коші $\xi(t, \xi_0)$

$$\dot{\xi} = U\left(\xi,\ x_1(t),\ x_2(t)\right);\ \xi(0) = \xi_0 \in R^p \tag{1.3}$$

для будь-якої системи диференціальних рівнянь розмірності $p \geq 1$, праві частини $U(\xi,\ x_1(t),\ x_2(t))$ якої задовольняють достатнім умовам теореми існування і єдиності розв'язків для $t \in [0, \infty)$.

Задача 1. Знайти асимптотично точні оцінки параметрів μ і ω системи (1.2) за відомими значеннями виходу $y(t) = (x_1(t),\ x_2(t))$.

§2. Синтез додаткових співвідношень.

Для розв'язку використовуємо метод синтезу інваріантних співвідношень спеціального виду [2]. Ідея методу полягає в динамічному розширенні вихідної системи диференціальних рівнянь (1.2) додатковими рівняннями (1.3), розмірність яких $p = 2$ дорівнює кількості невідомих (константи μ і ω). При цьому праві частини допоміжної системи $U\left(\xi,\ x_1,\ x_2\right)$ підбираються таким чином, щоб отримана розширена система диференціальних рівнянь (1.2), (1.3) допускала на своїх розв'язках інваріантні співвідношення

$$G_i(x_1(t),\ x_2(t),\ \xi(t),\ \mu,\ \omega) = 0,\ i = 1, 2 \tag{2.1}$$

з наступними властивостями:

(i). Співвідношення (2.1) формують додаткові незалежні рівняння відносно невідомих μ і ω, тобто $\operatorname{rank}\dfrac{\partial(G_1,\ G_2)}{\partial(\mu,\ \omega)} = 2.$

(ii). Інваріантний многовид, який відповідає співвідношенням (2.1) у просторі

$$M = \left\{(x_1,\ x_2,\ \xi,\ \mu,\ \omega) \in R^6 :\ G_i(x_1,\ x_2,\ \xi,\ \mu,\ \omega) = 0,\ i = 1, 2\right\},$$

має властивість глобального тяжіння для будь-яких розв'язків розширеної системи (1.2), (1.3), тобто на будь-яких таких розв'язках $\lim\limits_{t\to\infty} G_i(x_1(t),\ x_2(t),\ \xi(t),\ \mu,\ \omega) = 0,\ i = 1,\ 2.$

Існування інваріантних співвідношень. Покажемо, що для даної задачі співвідношення виду (2.1) існують. Щоб властивість (і) було виконано у всій розглянутій області, шукатимемо ці співвідношення у вигляді

$$\begin{aligned} G_1 &= \mu - \xi_1(t) - \Phi\left(x_1(t),\ x_2(t)\right) = 0; \\ G_2 &= \omega^2 - \xi_2(t) - \Psi\left(x_1(t),\ x_2(t)\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

де змінні $\xi_i(t),\ i = 1,\ 2$ є розв'язками деякого допоміжного диференціального рівняння (1.3). На функції $\Phi(x_1, x_2),\ \Psi(x_1, x_2),\ U(\xi, x_1, x_2)$ поки не накладаємо ніяких обмежень, окрім вимоги неперервної диференційованості по своїх аргументах. Якщо ці функції будуть обрані так, що співвідношення (2.2) виявляться інваріантними на даному розв'язку системи (1.2), (1.3), то тоді невідомі параметри μ і ω можуть бути знайдені безпосередньо з цих рівностей.

Твердження 1. Для будь-яких диференційованих за своїми аргументами функцій $\Phi(x_1, x_2), \Psi(x_1, x_2)$ можна підібрати праву частину $U(\xi, x_1, x_2)$ в системі диференціальних рівнянь (1.3) так, що рівності (2.2) будуть виконуватись тотожно на деяких розв'язках розширеної системи диференціальних рівнянь (1.2), (1.3).

Доведення. Введемо змінні $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, які характеризують нев'язку в формулах (2.2) на розв'язках системи (1.2), (1.3)

$$\begin{aligned} \mu - \xi_1(t) - \Phi\left(x_1(t),\ x_2(t)\right) &= \varepsilon_1; \\ \omega^2 - \xi_2(t) - \Psi\left(x_1(t),\ x_2(t)\right) &= \varepsilon_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Диференціюючи (2.3) в силу системи (1.2), (1.3), отримуємо систему диференціальних рівнянь для відхилень $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -\dot{\xi}_1 - \Phi'_{x_1} x_2 - \Phi'_{x_2}\left[-x_1(\xi_2 + \Psi + \varepsilon_2) + (\xi_1 + \Phi + \varepsilon_1)(1 - x_1^2)x_2\right]; \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\dot{\xi}_2 - \Psi'_{x_1} x_2 - \Psi'_{x_2}\left[-x_1(\xi_2 + \Psi + \varepsilon_2) + (\xi_1 + \Phi + \varepsilon_1)(1 - x_1^2)x_2\right]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Щоб рівності (2.2) виконувалися тотожно на деяких розв'язках системи диференціальних рівнянь (1.2), (1.3), досить показати, що система диференціальних рівнянь (2.4) допускає тривіальний розв'язок $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$. Забезпечимо виконання цієї вимоги за рахунок вибору $U(\xi,\ x_1,\ x_2)$ – правих частин допоміжної системи (1.3). А саме: для будь-яких функцій, що диференціюються $\Phi(x_1, x_2)$ і $\Psi(x_1, x_2)$ покладемо

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\Phi'_{x_1} x_2 - \Phi'_{x_2}\left[-x_1(\xi_2 + \Psi) + (\xi_1 + \Phi)(1 - x_1^2)x_2\right]; \\ \dot{\xi}_2 &= -\Psi'_{x_1} x_2 - \Psi'_{x_2}\left[-x_1(\xi_2 + \Psi) + (\xi_1 + \Phi)(1 - x_1^2)x_2\right]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В результаті, система диференціальних рівнянь (2.4) стає лінійною і однорідною відносно відхилень $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \Phi'_{x_2}\left[-x_2\left(1 - x_1^2\right)\varepsilon_1 + x_1\varepsilon_2\right];\ \dot{\varepsilon}_2 = \Psi'_{x_2}\left[-x_2\left(1 - x_1^2\right)\varepsilon_1 + x_1\varepsilon_2\right], \tag{2.6}$$

тобто допускає тривіальний розв'язок $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$. Твердження доведено.

Таким чином, можна стверджувати, що для будь-яких функцій $\Phi(x_1,\ x_2)$, $\Psi(x_1,\ x_2)$ початкові значення $\xi_i(0),\ i = 1,\ 2$ в задачі Коші для допоміжної системи диференціальних рівнянь (2.5) можуть бути обрані таким чином, що в момент $t = 0$ формули (2.2) стають вірними рівностями. Зокрема, це означає, що початкові значення для відхилень $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0) = 0$. В цьому випадку рівності (2.2) на траєкторії розширеної системи (1.2), (2.5) виконуються тотожно, утворюючи, тим самим, додаткові рівняння відносно μ і ω.

В загальному випадку здійснити такий вибір $\xi_i(0)$, $i = 1, 2$ не вдається, але можна спробувати використати формули (2.3) для отримання асимптотичних оцінок параметрів на розв'язках розширеної системи (1.2), (2.5). Для цього, зокрема, достатньо з можливих функцій $\Phi(x_1, x_2)$ і $\Psi(x_1, x_2)$ вибрати такі, для яких тривіальний розв'язок системи (2.6) мав би властивість глобальної асимптотичної стійкості. Дійсно, якщо при такому виборі вільних функцій вдасться забезпечити прямування відхилень $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ до нуля зі зростанням *t*, то в рівностях (2.3) єдиними невизначеними величинами залишаться шукані параметри μ і ω.

Стабілізація відхилень. Розглянемо задачу вибору вільних функцій $\Phi(x_1, x_2)$ і $\Psi(x_1, x_2)$ з метою стабілізації тривіального розв'язку системи (2.6). Візьмемо позитивно-визначену функцію $V = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)/2$. Її похідна дорівнює

$$\dot{V} = \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 = -\left(\Phi'_{x_2}\varepsilon_1 + \Psi'_{x_2}\varepsilon_2\right)\left[x_2\left(1-x_1^2\right)\varepsilon_1 - x_1\varepsilon_2\right].$$

Із останньої рівності випливає, що у випадку $\Phi'_{x_2} = x_2(1-x_1^2)$, $\Psi'_{x_2} = -x_1$ похідна від функції стає негативно напіввизначеною $\dot{V} = -\left[x_2\left(1-x_1^2\right)\varepsilon_1 - x_2\varepsilon_2\right]^2 \le 0.$

Тому вільні функції виберемо у вигляді

$$\Phi(x_1, x_2) = (1-x_1^2)\frac{x_2^2}{2};\ \Psi(x_1, x_2) = -x_1 x_2. \tag{2.7}$$

Тоді рівняння у відхиленнях (2.6) приймають вигляд

$$\dot{\varepsilon}_1 = x_2(1-x_1^2)\left[-x_2(1-x_1^2)\varepsilon_1 + x_1\varepsilon_2\right];\ \dot{\varepsilon}_2 = -x_1\left[-x_2(1-x_1^2)\varepsilon_1 + x_1\varepsilon_2\right]. \tag{2.8}$$

Твердження 2. Вибір вільних функцій $\Phi(x_1, x_2)$, $\Psi(x_1, x_2)$ у вигляді (2.7) гарантує асимптотичну стійкість тривіального розв'язку системи (2.8).

Доведення. Відома лема Барбалата стверджує: якщо функція $f(t)$ має кінцеву границю при $t \to \infty$ та якщо $df(t)/dt$ рівномірно неперервна, то $df(t)/dt \to 0$ при $t \to \infty$.

Позначимо $d(x_1, x_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = -x_2(1-x_1^2)\,\varepsilon_1 + x_1\varepsilon_2$ і застосуємо лему Барбалата до функції $V(t)$. Легко побачити, що

(i). Функція $V(t)$ має негативно напіввизначену похідну, тому не зростає і обмежена знизу нулем. Отже, існує $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = V^* < \infty$.

(ii). З урахуванням зробленого припущення функції $x_1(t), x_2(t)$ описують неперервні обмежені коливання осцилятора; функції $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ також неперервні і обмежені, так як $\varepsilon_1^2(t) + \varepsilon_2^2(t) \le \varepsilon_1^2(0) + \varepsilon_2^2(0)$. Тому похідна від функції $V(t)$ є рівномірно неперервною.

Умови леми виконано, тобто $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{V}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} d(x_1(t), x_2(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) = 0$. Покажемо, що з цього випливає $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_i(t) = 0$, $i = 1, 2$. Для цього досить встановити, що рівність $d\left(x_1(t), x_2(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)\right) \equiv 0$ не є інваріантним співвідношенням для системи диференціальних рівнянь (1.2), (2.8).

Припустимо протилежне, а саме: нехай $d\left(x_1(t),\, x_2(t),\, \varepsilon_1(t),\, \varepsilon_2(t)\right) \equiv 0$ на деяких траєкторіях цієї системи і при цьому існують не нульові розв'язки $\varepsilon_1(t),\, \varepsilon_2(t)$. Тоді з (2.8) випливає, що ці рішення є стаціонарними точками $\varepsilon_i(t) \equiv \varepsilon_i^* - \text{const},\ i = 1, 2$. Тобто компоненти фазового вектора осцилятора задовольняють співвідношенню $d(x_1(t),\, x_2(t),\, \varepsilon_1^*,\, \varepsilon_2^*) \equiv 0.$ Введемо в розгляд похідну, взяту в силу системи (1.2)

$$D(x_1, x_2, \varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*) = \left(\partial d / \partial x_1\right)\dot{x}_1 + \left(\partial d / \partial x_2\right)\dot{x}_2. \tag{2.9}$$

Нескладно пересвідчитись, що $\operatorname{rank}\dfrac{\partial(d, D)}{\partial(x_1, x_2)} = 2,$ тобто функції $x_1(t),\, x_2(t)$ задовольняють системі трансцендентних рівнянь $d = 0,\quad D = 0.$ А це означає, що вони є сталими величинами. Останнє твердження протирічить коливальному режиму руху осцилятора. Отримане протиріччя доводить твердження.

Таким чином, з наведених вище викладок випливає, що співвідношення (2.2) і допоміжна система диференціальних рівнянь (2.5) формує для системи (1.2) асимптотичний ідентифікатор. З урахуванням вибору вільних функцій в формі (2.7) маємо

Твердження 3. Для будь-якого нетривіального розв'язку $x_1(t),\, x_2(t)$ системи (1.2) і будь-якого початкового значення $\xi_1(0),\ \xi_2(0)$ в задачі Коші для допоміжної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= x_1 x_2^3 + x_1 x_2^2 \left\{ -x_1\left(\xi_2 - x_1 x_2\right) + \left[\xi_1 + \left(1 - x_1^2\right)\frac{x_2^2}{2}\right]\left(1 - x_1^2\right)x_2 \right\}; \\ \dot{\xi}_2 &= x_2^2 + x_1 \left\{ -x_1\left(\xi_2 - x_1 x_2\right) + \left[\xi_1 + \left(1 - x_1^2\right)\frac{x_2^2}{2}\right]\left(1 - x_1^2\right)x_2 \right\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

формули

$$\hat{\mu} = \xi_1(t) + \left(1 - x_1^2(t)\right)\frac{x_2^2(t)}{2};\ \ \hat{\omega}^2 = \xi_2(t) - x_1(t)x_2(t) \tag{2.11}$$

визначають асимптотичні оцінки параметрів μ і ω^2, відповідно.

§3. Система зв'язаних осциляторів.

Розглянемо систему, що складається з n зв'язаних між собою неідентичних осциляторів ван дер Поля

$$\dot{x}_{i1} = x_{i2};\ \dot{x}_{i2} = \mu_i(1 - x_{i1}^2)x_{i2} - \omega_i^2 x_{i1} + F_i(t,\, x_{i1},\, \ldots,\, x_{n2}),\ i = \overline{1, n}. \tag{3.1}$$

Тут змінні x_{i1} означають зміщення від власного положення рівноваги i-го осцилятора; x_{i2} – швидкість відповідного зміщення; функції $F_i(t,\, x_{11},\, \ldots,\, x_{n2})$ формалізують зовнішній вплив і вплив зв'язків в мережі на динаміку i-го осцилятора, $i = \overline{1, n}$. У задачах наближеного моделювання коливань складних об'єктів за допомогою моделей виду (3.1) ці функції підбираються з різних міркувань і можуть не мати фізичного або механічного сенсу, описуючи, наприклад, односторонні зв'язки.

Незалежно від виду і структури цих функцій для побудови конструкції ідентифікатора параметрів системи (3.1) вимагатимемо виконання наступних припущень:

а) значення функцій $F_i\left(t,\, x_{11}(t),\, \ldots,\, x_{n2}(t)\right)$ відомі в будь-який момент часу;

б) розв'язки систем диференціальних рівнянь, які будуть синтезовані при побудові ідентифікатора і які містять в своїх правих частинах ці функції, є обмеженими.

Задача 2. Знайти асимптотично точні оцінки параметрів $\mu_i,\ \omega_i^2,\ i = \overline{1, n}$ системи (3.1) за відомими значеннями фазового вектору $x(t) = \left(x_{11}(t),\, x_{12},\, \ldots,\, x_{n2}(t)\right)$.

Розв'язання задачі 2 проведемо за описаною вище схемою ідентифікації параметрів автономного осцилятора. Введемо в розгляд динамічне розширення системи (3.1) – допоміжну систему диференціальних рівнянь (1.3) розмірності $p = 2n$. Аналогічно (2.3) представимо невідомі у вигляді суми невизначених поки величин

$$\begin{aligned} \mu_i &= \xi_{i1}(t) + \Phi_i\left(x_{i1}(t),\ x_{i2}(t)\right) + \varepsilon_{i1}; \\ \omega_i^2 &= \xi_{i2}(t) + \Psi_i(x_{i1}(t), x_{i2}(t)) + \varepsilon_{i2}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

де $\Phi_i(x_{i1}, x_{i2})$, $\Psi_i(x_{i1}, x_{i2})$ – вільні функції; ξ_{i1}, ξ_{i2} – компоненти розв'язку ξ системи (1.3) з невизначеною поки правою частиною $U(\xi, x, F_1, \ldots F_n)$; $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}$ – нев'язки в рівняннях інваріантних співвідношень. Для отримання диференціальних рівнянь відносно $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}$ диференціюємо рівності (3.2) в силу системи (3.1), (1.3)

$$\dot{\varepsilon}_{i1} = -\dot{\xi}_{i1} - \Phi'_{x_{i1}} x_{i2} - \Phi'_{x_{i2}}\left[-x_{i1}(\xi_{i2} + \Psi_i + \varepsilon_{i2}) + (\xi_{i1} + \Phi_i + \varepsilon_{i1})(1 - x_{i1}^2)x_{i2}\right];$$

$$\dot{\varepsilon}_{i2} = -\dot{\xi}_{i2} - \Psi'_{x_{i1}} x_{i2} - \Psi'_{x_{i2}}\left[-x_{i1}(\xi_{i2} + \Psi_i + \varepsilon_{i2}) + (\xi_{i1} + \Phi_i + \varepsilon_{i1})(1 - x_{i1}^2)x_{i2}\right],\ i = \overline{1, n}.$$

Нехай, по аналогії з (2.7), $\Phi_i(x_{i1}, x_{i2}) = (1 - x_{i1}^2)x_{i2}^2 / 2;\ \Psi_i(x_{i1}, x_{i2}) = -x_{i1}x_{i2},\ i = \overline{1, n}$. Щоб система рівнянь у відхиленнях допускала тривіальний розв'язок, запишемо допоміжну систему диференціальних рівнянь (1.3) у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{i1} &= x_{i1}x_{i2}^3 + x_{i1}x_{i2}^2\left\{-x_{i1}\left(\xi_{i2} - x_{i1}x_{i2}\right) + \left[\xi_{i1} + \left(1 - x_{i1}^2\right)\frac{x_{i2}^2}{2}\right]\left(1 - x_{i1}^2\right)x_{i2} + F_i\right\}; \\ \dot{\xi}_{i2} &= x_{i2}^2 + x_{i1}\left\{-x_{i1}\left(\xi_{i2} - x_{i1}x_{i2}\right) + \left[\xi_{i1} + \left(1 - x_{i1}^2\right)\frac{x_{i2}^2}{2}\right]\left(1 - x_{i1}^2\right)x_{i2} + F_i\right\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

тобто функції, які визначають взаємовплив осциляторів, містяться у допоміжних рівняннях (3.3). В результаті система рівнянь для відхилень декомпонується на *n* однакових підсистем диференціальних рівнянь, які повністю співпадають з аналогічною системою для автономного осцилятора ван дер Поля (2.8)

$$\dot{\varepsilon}_{i1} = x_{i2}(1 - x_{i1}^2)\left[-x_{i2}(1 - x_{i1}^2)\varepsilon_{i1} + x_{i1}\varepsilon_{i2}\right];$$

$$\dot{\varepsilon}_{i2} = -x_{i1}\left[-x_{i2}(1 - x_{i1}^2)\varepsilon_{i1} + x_{i1}\varepsilon_{i2}\right],\ i = \overline{1, n}.$$

Скориставшись результатами попереднього розділу, отримуємо

Твердження 4. Для будь-якого нетривіального розв'язку $x(t)$ системи (3.1) і будь-якого початкового значення $\xi(0)$ в задачі Коші для допоміжної системи диференціальних рівнянь (3.3) формули

$$\hat{\mu}_i = \xi_{i1}(t) + \left(1 - x_{i1}^2(t)\right)\frac{x_{i2}^2(t)}{2};\ \hat{\omega}_i^2 = \xi_{i2}(t) - x_{i1}(t)x_{i2}(t)$$

визначають асимптотичні оцінки параметрів $\mu_i,\ \omega_i^2,\ i = \overline{1, n}$.

§4. Чисельне моделювання.

Запропонована в роботі схема розв'язання задачі ідентифікації була чисельно змодельована для широкого спектру початкових умов і параметрів динамічної системи, яка утворюється ланцюжком з трьох послідовно з'єднаних неідентичних осциляторів ван дер Поля

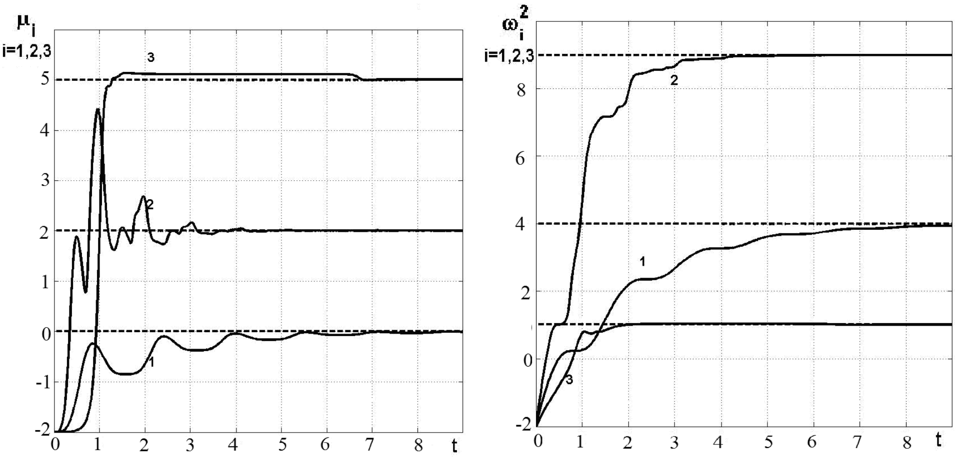
$$\dot{x}_{11} = x_{12};\ \dot{x}_{12} = \mu_1(1 - x_{11}^2)x_{12} - \omega_1^2 x_{11} + F_1;$$
$$\dot{x}_{21} = x_{22};\ \dot{x}_{22} = \mu_2(1 - x_{21}^2)x_{22} - \omega_2^2 x_{21} + F_2; \qquad (4.1)$$
$$\dot{x}_{31} = x_{32};\ \dot{x}_{32} = \mu_3(1 - x_{31}^2)x_{32} - \omega_3^2 x_{31} + F_3,$$

зв'язаних за допомогою пружних і дисипативних зв'язків, що задаються функціями

$$F_1 = \nu(x_{11} - x_{21}) + \kappa(x_{12} - x_{22});$$
$$F_2 = \nu(x_{21} - x_{11}) + \nu(x_{21} - x_{31}) + \kappa(x_{22} - x_{12}) + \kappa(x_{22} - x_{32});$$
$$F_3 = \nu(x_{31} - x_{21}) + \kappa(x_{32} - x_{22}).$$

Тут ν – коефіцієнт жорсткості; κ – коефіцієнт дисипативного зв'язку. Вихід системи – вектор $y(t) = \left(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ x_4(t),\ x_5(t),\ x_6(t)\right)$ отримано в результаті чисельного розв'язку системи диференціальних рівнянь (4.1), у якій параметри $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ дорівнюють 0,0; 2,0; 5,0, а частоти $\omega_1^2,\ \omega_2^2,\ \omega_3^2$ дорівнюють 4,0; 9,0; 1,0, відповідно. Інші параметри: $\nu = 1,2$, $\kappa = 0,3$.

Розглянутий варіант розрахунку моделює випадок, коли ланцюжок осциляторів містить гармонічний осцилятор, $\mu_1 = 0$. Початкові умови задачі Коші для системи (4.1) були прийняті рівними $x(0) = (1,0;\ 0,0;\ -1,0;\ 0,0;\ 1,0;\ 0,0\ )$; початкові умови для змінних допоміжної системи диференціальних рівнянь (3.3) обираються довільним чином, в даному випадку: $\xi_{i1}(0) = -2,0;\ \xi_{i2}(0) = -2,0,\ \ i = 1,\ 2,\ 3$.



а *б*

Рис. 1

На рис 1, *а* під номерами *i* = 1, 2, 3 зображено графіки функцій $\xi_{i1}(t) + \left(1 - x_{i1}^2(t)\right)x_{i2}^2(t)/2$, які, відповідно до твердження 4, асимптотично прямують до шуканих значень параметрів $\mu_1 = 0,0;\ \mu_2 = 2,0;\ \mu_3 = 5,0$. На рис. 1, *б,* відповідно, зображено графіки функцій $\xi_{i2}(t) - x_{i1}(t)\ x_{i2}(t),$ які сходяться до шуканих значень $\omega_1^2 = 4,0;\ \omega_2^2 = 9,0;\ \omega_3^2 = 1,0$. Результати моделювання як для даного, так і для багатьох інших наборів значень параметрів підтверджують працездатність запропонованої схеми розв'язання задачі ідентифікації.

Р Е З Ю М Е. Розглянуто задачу ідентифікації постійних параметрів динамічної системи, яка описує коливання зв'язаних між собою осциляторів ван дер Поля. Запропоновано метод побудови нелінійного ідентифікатора, який дозволяє отримувати асимптотичні оцінки невідомих за результатами вимірювання початкових сигналів (фазового вектора системи) в реальному масштабі часу. Використовується відомий в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень, який в задачах управління на траєкторіях руху розглянутих систем дозволяє синтезувати додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами. Проведене чисельне моделювання підтверджує застосовність запропонованої схеми розв'язання задачі ідентифікації.

К Л Ю Ч О В І С Л О В А: ідентифікація параметрів, нелінійні коливання, зв'язані осцилятори ван дер Поля, інваріантні співвідношення, асимптотичні оцінки.

1. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Тр. ИПММ НАНУ – 2015. – **29**. – С. 69 – 76.
2. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – **22**, № 4. – С. 3 – 42.
3. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15 – 24.
4. *Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Тр. инст. прикл. математики и механики НАНУ. – 2003. – **8**. – С. 229 – 235.
5. *Algaba A., Fernandez-Sanchez F., Freire E., Gamero E., Rodriguez-Luis A.J.* Oscillation-sliding in a modified van der Pol-Duffing electronic oscillator // J. Sound Vibration. – 2002. – **249**, N 9. – P. 899 – 907.
6. *Cartwright J., Eguiluz V., Hernandez-Garcia E., Piro O.* Dynamics of elastic excitable media // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 2002. – **9**. – P. 2197 – 2202.
7. *Kaplan B.Z., Gabay I., Saraan G., Saraan D.* Biological application of the altered Van der Pol oscillator // J. Franklin Inst. – 2007. – **345**, N 3. – P. 226 – 232.
8. *Karagiannis D., Astolfi A*. Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications // Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference, Seville, Spain, 2005. – P. 7775 – 7780.
9. *Karagiannis D., Carnevale D., Astolfi A.* Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2008. – **53**, N 11. – P. 2602 – 2614.
10. *Landau I.D., Bouziani F., Bitmead R., Voda A.* Analysis of control relevant coupled nonlinear oscillatory systems // European J. of Control. – 2008. – **10**. – P. 263 – 282.
11. *Murray J.D.* Mathematical biology. I: An Introduction (3rd ed.). – Berlin: Springer, 2002. – 576 p.
12. *Shcherbak V.F.* Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem // PAMM. – 2004. – **4**, N 1. – P. 139 – 140.
13. *Van der Pol B.* On relaxation oscillations // The London, Edinburgh, and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci. – 1926. – **2**, N 7. – P. 978 – 992.

Надійшла 25.05.2021 Затверджена до друку 31.05.2022