

Т.М.Воліна, С.Ф.Пилипака, В.М.Бабка

## РУХ ЧАСТИНКИ ПОХИЛОЮ ПЛОЩИНОЮ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ НАВКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЇ ОСІ

*Національний університет біоресурсів і природокористування України,  
вул. Героїв Оборони, 15, 03041, Київ, Україна; e-mail: t.n.zaharova@ukr.net*

**Abstract.** The relative motion of a particle over an inclined plane is considered using a moving coordinate system. The movable system is an accompanying Frenet trihedron, which moves in a plane on a circle. So, it rotates around a vertical axis. Frenet's formulas are used to obtain a system of differential equations for the relative motion of a particle. Therefore, in contrast to the traditional approach, the independent variable is not time, but the length of the arc of the directing curve along which the trihedron moves. The system of equations is composed of the projections on the orths of a moving trihedron. It is solved by a numerical method. The trajectories of the particle sliding on an inclined plane and graphs of other kinematic characteristics are constructed.

**Key words:** particle, accompanying triangle, directing circle, curvature, sliding trajectory, speed, friction coefficient.

### Вступ.

Взаємодія частинок технологічного матеріалу із робочими рухомими поверхнями машин відбувається при різних технологічних процесах. У процесі такої взаємодії частинки певним чином ковзають по поверхні у відносному русі і описують іншу траєкторію у абсолютному русі. Абсолютна траєкторія характеризується геометричною сумою відносного руху ковзання частинки і переносного руху поверхні. Для додавання цих рухів зручно користуватися двома системами координат: рухомою, по відношенню до якої описується відносний рух частинки, і нерухомою, по відношенню до якої описується переносний рух поверхні і абсолютний рух частинки. В механіці розглядається спосіб описання руху точки і розкладання швидкості і прискорення на одиничні орти супровідного тригранника траєкторії, однак це стосується простого руху. Формою ж просторової кривої однозначно задається рух супровідного тригранника Френе, як твердого тіла. У статті розглянуто рух тригранника як переносний, а рух точки в системі тригранника – як відносний. Така схема дозволяє застосувати формули Френе і отримати нові цікаві результати.

### §1. Постановка задачі.

Дослідження руху різних тіл інколи зводиться до дослідження окремої частинки. Рух окремої частинки або матеріальної точки не можна ототожнювати з рухом тіла або технологічного матеріалу, який складається з окремих частинок. Проте на основі руху окремої частинки можна виявити закономірності, які певною мірою можна перенести на тіло або виявити напрямком, в якому потрібно продовжувати подальші дослідження. Так, у роботі [7] розглядається розкидання мінеральних добрив відцентровим робочим пристроєм. Рух біомаси всередині горизонтального циліндра, який обертається навколо своєї осі, досліджено у [6]. Питання змішування кормів дозаторами пі-

днімається у [3]. Теорію руху частинки зернової суміші під час сепарації викладено у [5]. Вплив коливальних рухів на процес сепарування досліджується у [2]. Теорія розсіювання частинок мінеральних добрив висвітлена в монографії [1]. Це стосується того випадку, коли силами інерції від обертання тіла можна знехтувати через малі кутові швидкості їх обертання [8]. Рух частинки по внутрішній поверхні сферичного сегмента, що обертається навколо вертикальної осі, розглянуто в праці [10], а по зовнішній поверхні горизонтального циліндра із коливальним рухом – у праці [9]. Метою статті є показати можливість застосування тригранника і формул Френе для аналітичного опису складного руху матеріальної точки по його площині, переносне переміщення якої задане плоскою напрямною кривою, вздовж якої рухається тригранник.

## §2. Постановка задачі.

Оскільки формою просторової кривої однозначно задається рух супровідного тригранника Френе, то таким чином однозначно задається рух кожної із його граней. Якщо напрямна крива просторова, то закономірність руху тригранника залежить від двох диференціальних характеристик кривої: її кривизни і скруту. У статті розглянемо спрощений варіант для плоскої кривої, у якої скрут дорівнює нулеві. На рис. 1, а в площині  $\mu$  розташована крива  $C_e$ , вздовж якої рухається супровідний тригранник  $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ . У цьому випадку стична площина тригранника, утворена ортами дотичної  $\bar{\tau}$  і головної нормалі  $\bar{n}$ , буде збігатися із площиною самої напрямної кривої.

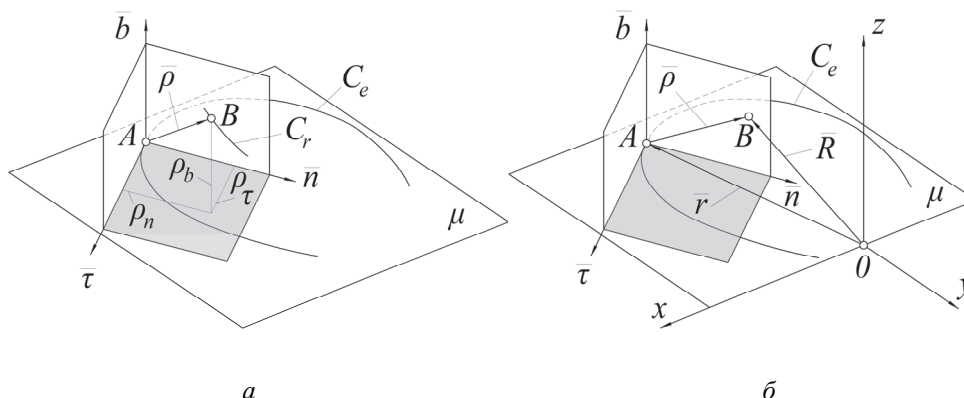


Рис. 1

При русі тригранника вздовж напрямної кривої  $C_e$  із швидкістю  $V_e$  стична площина ще і повертатиметься. Кут її повороту  $\alpha$  визначається кутом повороту дотичної  $\bar{\tau}$ . При переміщенні тригранника по кривій на довжину її дуги  $\Delta s$  дотична повернеться на кут  $\Delta\alpha$ . Відомо, що границя відношення  $\Delta\alpha/\Delta s$  при прямуванні  $\Delta s$  до нуля, є величиною кривизни  $k$  кривої. З іншої сторони, границя  $\Delta\alpha/\Delta t$ , де  $\Delta t$  – час, за який відбувся поворот, дає величину кутової швидкості  $\omega$  повороту стичної площини. Очевидно, що між кривизною  $k$  кривої і кутовою швидкістю  $\omega$  повороту стичної площини існує взаємозв'язок:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = kV_e. \quad (2.1)$$

Із залежності (2.1) випливає, що при сталих значеннях швидкості руху тригранника і кривизни напрямної кривої (тобто кола), кутова швидкість обертання стичної площини теж є сталою величиною.

Абсолютний рух частинки складатиметься з двох рухів – переносного руху тригранника Френе і відносного руху частинки в системі тригранника. Нехай частинка буде розташована на певній відстані  $\rho$  від вершини тригранника. Тоді її положення у векторному вигляді запишеться (рис. 1, б):

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\rho}, \quad (2.2)$$

де  $\bar{R}$  – радіус-вектор положення частинки в нерухомій системі  $OXYZ$ ;  $\bar{r}$  – радіус-вектор точки на кривій, в якій знаходиться вершина  $A$  тригранника;  $\bar{\rho}$  – радіус-вектор положення частинки в системі тригранника.

Вважатимемо, що координати  $\rho_\tau, \rho_n, \rho_b$  в системі тригранника є змінними і залежними від положення його на кривій  $C_e$ , тобто залежними від довжини дуги  $s$  на прямої кривої. У такому випадку при русі тригранника по кривій точка  $B$  певним чином рухатиметься в його системі, описуючи відносну траєкторію  $C_r$  (рис. 1, а). Перепишемо вираз (2.2) із врахуванням розкладання вектора  $\bar{\rho}$  на орти тригранника:

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\tau}\rho_\tau + \bar{n}\rho_n + \bar{b}\rho_b. \quad (2.3)$$

Щоб знайти абсолютну швидкість руху частинки  $V_a$ , потрібно векторне рівняння (2.3) продиференціювати за часом  $t$ . Застосування тригранника Френе дає можливість використати формули Френе, які широко відомі у диференціальній геометрії. Вони дозволяють просто знаходити похідні ортів тригранника в проєкціях на ці ж орти. Однак, у цьому випадку незалежною змінною має бути довжина дуги  $s$  – шляху, який проходить вершина тригранника, рухаючись по кривій  $C_e$ . Приймаючи  $s$  за незалежну змінну, знайдемо взаємозв'язок між абсолютною швидкістю  $V_a$  і похідною вектора  $\bar{R}$  за змінною  $s$ :

$$V_a = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}}{ds} \frac{ds}{dt} = V_e \frac{d\bar{R}}{ds}. \quad (2.4)$$

Таким чином, щоб отримати вираз абсолютної швидкості  $V_a$ , потрібно швидкість  $V_e$  переносного руху тригранника по кривій  $C_e$  помножити на похідну виразу (2.3). З таких же міркувань знаходять і відносну швидкість  $V_r$ ;

$$V_r = \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}}{ds} \frac{ds}{dt} = V_e \frac{d\bar{\rho}}{ds}. \quad (2.5)$$

Продиференціюємо векторний вираз (2.3) за змінною  $s$ , маючи на увазі, що  $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ ;  $\rho_n = \rho_n(s)$  і  $\rho_b = \rho_b(s)$ :

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds} + \left( \frac{d\bar{\tau}}{ds} \rho_\tau + \bar{\tau} \frac{d\rho_\tau}{ds} \right) + \left( \frac{d\bar{n}}{ds} \rho_n + \bar{n} \frac{d\rho_n}{ds} \right) + \left( \frac{d\bar{b}}{ds} \rho_b + \bar{b} \frac{d\rho_b}{ds} \right). \quad (2.6)$$

Похідні  $d\bar{r}/ds$ ,  $d\bar{\tau}/ds$ ,  $d\bar{n}/ds$ ,  $d\bar{b}/ds$  згідно формул Френе розписуються в проєкціях на орти тригранника через кривизну  $k$  і скрут  $\sigma$  прямої кривої. Формули Френе мають наступний вигляд [4]:

$$\bar{r}' = \bar{\tau}; \quad \bar{\tau}' = k\bar{n}; \quad \bar{n}' = \sigma\bar{b} - k\bar{\tau}, \quad \bar{b}' = \sigma\bar{n}. \quad (2.7)$$

Напрямна крива  $C_e$  є плоскою кривою, отже скрут  $\sigma = 0$ . З урахуванням цього підставимо формули (2.7) у вираз (2.6) і після групування проєкцій за ортами  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  отримаємо

$$\bar{R}' = \bar{\tau} + \bar{n}k\rho_\tau + \bar{\tau}\rho'_\tau - \bar{\tau}k\rho_n + \bar{n}\rho'_n + \bar{b}\rho'_b = \bar{\tau}(1 + \rho'_\tau - k\rho_n) + \bar{n}(\rho'_n + k\rho_\tau) + \bar{b}\rho'_b. \quad (2.8)$$

Диференціюванням абсолютної швидкості (2.4) за часом  $t$  при умові, що  $V_e = \text{const}$ , отримуємо вираз абсолютного прискорення  $w$ :

$$w = \frac{d}{dt} \left( V_e \frac{d\bar{R}}{ds} \right) = V_e^2 \frac{d^2\bar{R}}{ds^2}. \quad (2.9)$$

Другу похідну  $\bar{R}''$  знаходимо диференціюванням векторного виразу (2.8) за змінною  $s$  із застосуванням формул Френе. У загальному випадку кривизна  $k$  є змінною величиною, тобто  $k = k(s)$  і при диференціюванні це потрібно враховувати.

Метою нашої статті є дослідження руху точки похилою площиною, розташованою у триграннику, який рухається по колу радіуса  $r$  (рис. 2, а). У такому випадку похила площина здійснює обертальний рух навколо осі  $OZ$  з кутовою швидкістю  $\omega$ . Переносна швидкість  $V_e$  руху тригранника, згідно (2.1), запишеться:  $V_e = \omega/k$ . Кривизна  $k$  кола є сталою величиною, оберненою до радіуса  $k = 1/r$ , тому  $V_e = \omega r$ . Оскільки  $k = \text{const}$ , диференціювання виразу (2.8) спрощується:

$$\begin{aligned} \bar{R}'' &= \bar{\tau}'(1 + \rho'_\tau - k\rho_n) + \bar{\tau}(\rho''_\tau - k\rho'_n) + \\ &+ \bar{n}'(\rho'_n + k\rho_\tau) + \bar{n}(\rho''_n + k\rho'_\tau) + \bar{b}'\rho'_b + \bar{b}\rho''_b = \\ &= \bar{\tau}[\rho''_\tau - k(k\rho_\tau + 2\rho'_n)] + \bar{n}[\rho''_n + k(1 - k\rho_n + 2\rho'_\tau)] + \bar{b}\rho''_b. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Векторний вираз (2.10) нам дає другу похідну  $\bar{R}''$  за дуговою координатою  $s$  в проєкціях на орти тригранника. При його отриманні ми знову скористалися формулами Френе (2.7) і знову згрупували складові після диференціювання за ортами тригранника.

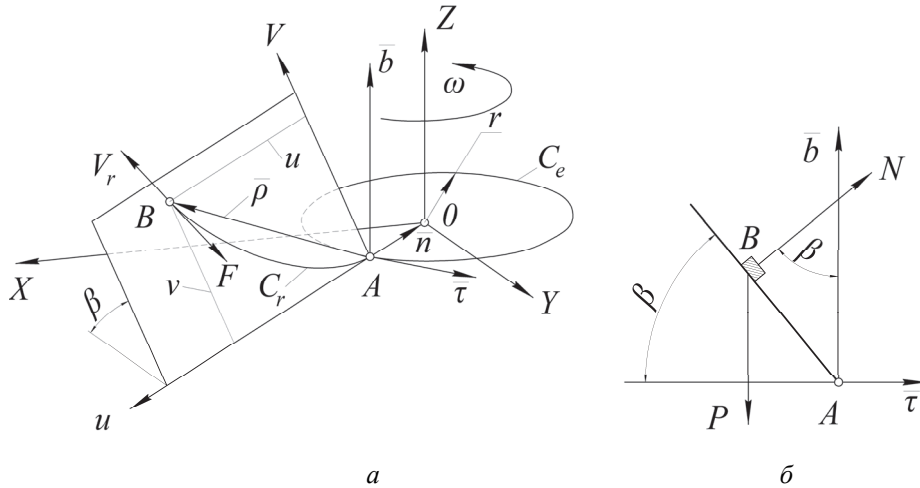


Рис. 2

На похилій площині скористаємося місцевою системою координат, у якій одна вісь  $u$  збігається із ортом головної нормалі  $\bar{n}$  і спрямована у протилежну сторону, а друга  $v$  перпендикулярна до  $u$  (рис. 2, а). В такому випадку  $\rho_n(s) = -u(s)$ . Для двох інших координат  $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$  і  $\rho_b = \rho_b(s)$  можна записати, згідно рис. 2, б, на якому зображено діючі на частинку сили в системі тригранника, коли орт головної нормалі  $\bar{n}$  проєкціюється в точку, а похила площина – в пряму лінію:  $-\rho_\tau/v = \cos \beta$  і

$\rho_b / v = \sin \beta$ . Таким чином  $\rho_\tau(s) = -v(s) \cdot \cos \beta$  і  $\rho_b(s) = v(s) \cdot \sin \beta$ . Отже, перші і другі похідні вектора  $\bar{\rho}$  в проекціях на орти тригранника запишуться:

$$\rho'_\tau = -v' \cdot \cos \beta; \quad \rho''_\tau = -v'' \cdot \cos \beta; \quad \rho'_n = -u'; \quad \rho''_n = -u''; \quad \rho'_b = v' \cdot \sin \beta; \quad \rho''_b = v'' \cdot \sin \beta.$$

Після підстановки цих виразів у (2.10) і множення отриманих результатів на  $V_e^2$  ( $V_e = \omega r$ ), згідно (2.9) запишемо вирази абсолютного прискорення точки  $B$  в проекціях на орти тригранника:

$$\begin{aligned} w_\tau &= \omega^2 r^2 [-v'' \cos \beta + k(kv \cos \beta + 2u')]; \\ w_n &= \omega^2 r^2 [-u'' + k(1 + ku - 2v' \cos \beta)]; \\ w_b &= \omega^2 r^2 v'' \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Якщо задати дві залежності  $u = u(s)$  і  $v = v(s)$ , тобто траєкторію ковзання точки  $B$  по площині, то за формулами (2.4) можна знайти закон зміни її абсолютного прискорення в проекціях на орти тригранника. Ми будемо розв'язувати обернену задачу – знаходження закону відносного руху матеріальної точки (частинки), яка рухається під дією прикладених до неї сил.

Диференціальне рівняння абсолютного руху частинки у векторному записі має вигляд  $m\bar{w} = \bar{F}$ , де  $m$  – маса частинки;  $\bar{w}$  – вектор абсолютного прискорення;  $\bar{F}$  – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги  $P = mg$  ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ), реакція  $N$  площини, сила тертя  $F = fN$  при ковзанні частинки по площині, де  $f$  – коефіцієнт тертя. Усі сили мають строго визначений напрям дії в системі тригранника (рис. 2).

Сила ваги  $P = mg$  спрямована вниз, тобто в протилежну сторону напрямку орта бінормалі  $\bar{b}$ . Її одиничний напрямний вектор в системі тригранника запишеться:

$$P: \{0; 0; -1\}. \quad (2.12)$$

Одиничний напрямний вектор  $N$  реакції площини розкладається на орти  $\bar{\tau}$  і  $\bar{b}$ . Згідно рис. 2, б його проекції на орти тригранника мають вигляд:

$$N: \{\sin \beta; 0; \cos \beta\}. \quad (2.13)$$

Сила тертя спрямована в протилежну сторону швидкості  $V_r$  ковзання частинки. Згідно (2.5) її знаходимо множенням модуля вектора  $\bar{\rho}$  на величину переносної швидкості  $V_e = \omega r$ :

$$V_r = \omega r \sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2 + \rho_b'^2} = \omega r \sqrt{u'^2 + v'^2}.$$

Проекції одиничного напрямного вектора дії сили тертя  $F$  знайдемо діленням складових швидкості на її величину:

$$F: \left\{ \frac{v' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; -\frac{v' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \right\}. \quad (2.14)$$

Векторне рівняння  $m\bar{w} = \bar{F}$  в проекціях на орти тригранника запишеться:

$$mw_\tau = F_\tau; \quad mw_n = F_n; \quad mw_b = F_b. \quad (2.15)$$

Після підстановки у рівняння (2.15) виразів абсолютного прискорення (2.11), сили ваги  $P = mg$ , реакції площини  $N$ , сили тертя  $F = fN$  згідно напрямних векторів (2.12), (2.13) і (2.14) отримуємо систему трьох диференціальних рівнянь з трьома невідомими функціями  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$  і  $N = N(s)$ :

$$\begin{aligned} m\omega^2 r^2 \left[ -v'' \cos \beta + k(kv \cos \beta + 2u') \right] &= N \sin \beta + fN \frac{v' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ m\omega^2 r^2 \left[ -u'' + k(1 + ku - 2v' \cos \beta) \right] &= fN \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ m\omega^2 r^2 v'' \sin \beta &= -mg + N \cos \beta - fN \frac{v' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Розв'яжемо систему (2.16) відносно  $u'' = u''(s)$ ,  $v'' = v''(s)$  і  $N = N(s)$ :

$$u'' = \frac{1}{r^2} (r + u - 2rv' \cos \beta) - \frac{fu'}{r\sqrt{u'^2 + v'^2}} \left[ \frac{g}{r\omega^2} \cos \beta + \sin \beta \left( 2u' + \frac{v}{r} \cos \beta \right) \right]; \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} v'' &= \frac{\cos \beta}{r} \left( 2u' + \frac{v}{r} \cos \beta \right) - \frac{g \sin \beta}{r^2 \omega^2} - \\ &- \frac{fv'}{r\sqrt{u'^2 + v'^2}} \left[ \frac{g}{r\omega^2} \cos \beta + \sin \beta \left( 2u' + \frac{v}{r} \cos \beta \right) \right]; \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$N = m \left[ g \cos \beta + r\omega^2 \sin \beta \left( 2u' + \frac{v}{r} \cos \beta \right) \right]. \quad (2.19)$$

Оскільки  $k$  і  $r$  є взаємно обернені величини, то ми в отриманих результатах (2.17), (2.18) і (2.19) перейшли до більш звичної величини – радіуса  $r$  напрямного кола. Диференціальні рівняння (2.17) і (2.18) складають систему з двома невідомими:  $u = u(s)$  і  $v = v(s)$ . Вони визначають відносну траєкторію ковзання частинки по площині. Для їх знаходження потрібно застосовувати чисельні методи. Після цього стає відомою залежність (2.19) сили  $N$  реакції площини.

Спочатку розглянемо часткові випадки положення площини. Зокрема, при  $\beta = 90^\circ$  і  $f = 0$ , тобто для абсолютно гладенької вертикальної площини, що обертається, диференціальні рівняння (2.17), (2.18) приймають вигляд:

$$u'' = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{u}{r} \right); \quad v'' = -\frac{g}{r^2 \omega^2}.$$

Кожне із цих рівнянь є самостійним і має наступний розв'язок при умові, що в початковий момент переносного руху тригранника, тобто при  $s = 0$ , відносна швидкість і шлях ковзання частинки теж рівні нулеві:

$$u = 2r \sinh^2 \frac{s}{2r}; \quad v = -\frac{gs^2}{2r^2 \omega^2}. \quad (2.20)$$

Рівняння (2.20) є параметричними рівняннями траєкторії ковзання частинки по вертикальній площині при її обертанні за відсутності тертя. При русі тригранника по колу радіуса  $r$  існує зв'язок між шляхом  $s$  і відповідним часом його проходження  $t$ :  $s = r\omega t$ . Підстановка цього виразу у (2.20) дає параметричні рівняння траєкторії у функції часу:

$$u = 2r \sinh^2 \frac{\omega}{2} t; \quad v = -\frac{g}{2} t^2. \quad (2.21)$$

Залежність  $v = v(t)$  у другому рівнянні (2.21) є відомою формулою вільного падіння тіла. Таким чином, у вертикальному напрямі частинка рухається за законом вільного падіння, а у горизонтальному – відповідно першого рівняння (2.21), тобто залежить від радіуса  $r$  і кутової швидкості  $\omega$ .

На рис. 3, а за рівняннями (2.21) побудовано траєкторії ковзання частинки при  $r = 0,2$ ;  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$  (для  $f = 0$ ) і чисельними методами для  $f = 0,3$ . На рис. 3, б при тих же параметрах побудовано траєкторії ковзання частинки по горизонтальній площині, тобто при  $\beta = 0^\circ$ . При зростанні кутової швидкості обертання площини у першому випадку (рис. 3, а) зміна траєкторії ковзання відбувається у її наближенні до горизонтальної прямої, а у другому (рис. 3, б) – в ущільненні витків спіралі. Ці положення площини є граничними серед усіх можливих положень її розташування. У зв'язку із цим виникає питання: при яких кутах нахилу площини і як саме відбувається перехід траєкторії ковзання від спіралі до лінії, що наближається до прямої.

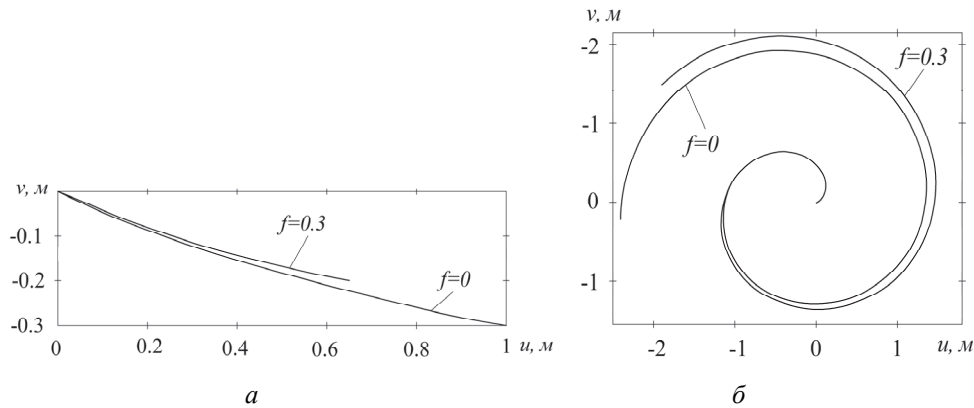


Рис. 3

Суттєвий вплив на характер ковзання частинки має реакція  $N$  площини. Згідно виразу (2.19) вона є сталою при  $\beta = 0^\circ$ , тобто при горизонтальному розташуванні площини. Але вже навіть при нахилі площини на  $1^\circ$  ( $\beta = 1^\circ$ ) реакція поверхні набуває знакозмінного характеру (рис. 4, а). Тут розглянуто ковзання частинки масою  $m = 0,01 \text{ kg}$  по площині, яка обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 20 \text{ c}^{-1}$  при  $r = 0,2 \text{ m}$ ,  $\beta = 1^\circ$ ,  $f = 0,3$ . У певний момент часу, що відповідає значенню  $s = 1,8 \text{ m}$ , реакція  $N$  стає рівною нулеві. Відповідна ділянка траєкторії ковзання частинки до цього моменту зображена штриховою лінією (рис. 4, б).

Продовження траєкторії руху частинки тонкою лінією відповідає умові, що вона знаходиться між двома площинами і реакцію чинить уже інша площина. Насправді у нас одна площина, тому в момент закінчення штрихової траєкторії відбуватиметься відрив частинки, тобто подальший її рух стає непередбачуваним. Відірвавшись від площини, частинка втрачає швидкість і знову попадає на площину. Процес розгону частинки повторюється до наступного її відриву від площини. Можна висловити припущення, що частинку на похилій площині не вдається перемістити на велику відстань від осі обертання, як це можна зробити на горизонтальній площині.

Із рис. 4, б видно, що частинка зробила один повний виток і при підйомі на другому витку відривається від площини. Це можна пояснити тим, що вектор відцентрової сили в цей момент має вертикальну складову, яка врівноважує вагу частинки. Якщо збільшити кут нахилу  $\beta$  площини, то відрив відбувається раніше – уже при підйомі частинки на першому витку.

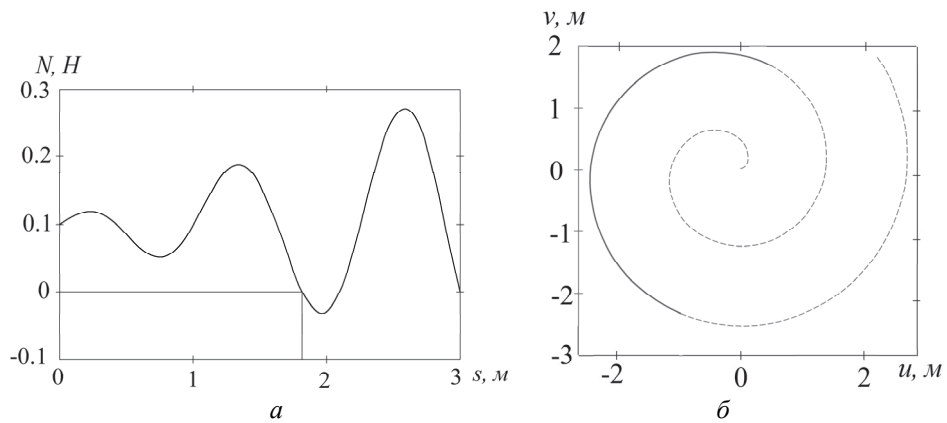


Рис. 4

На рис. 5 показано такі ж графічні ілюстрації, як і на рис. 4 з однією тільки різницею – кут нахилу площини  $\beta = 30^\circ$ .

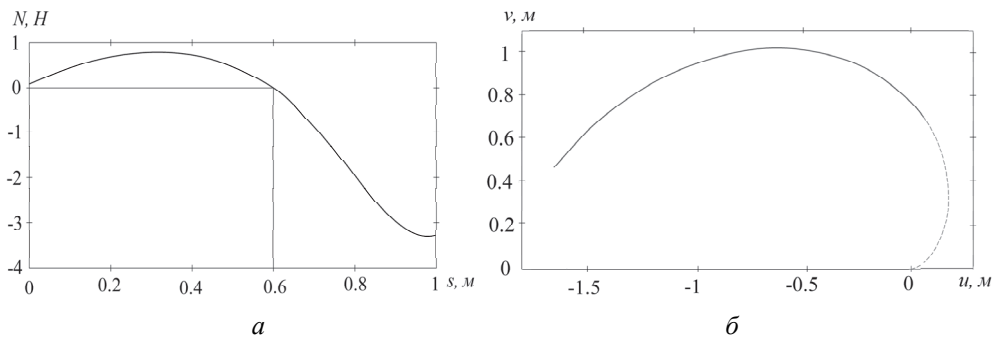


Рис. 5

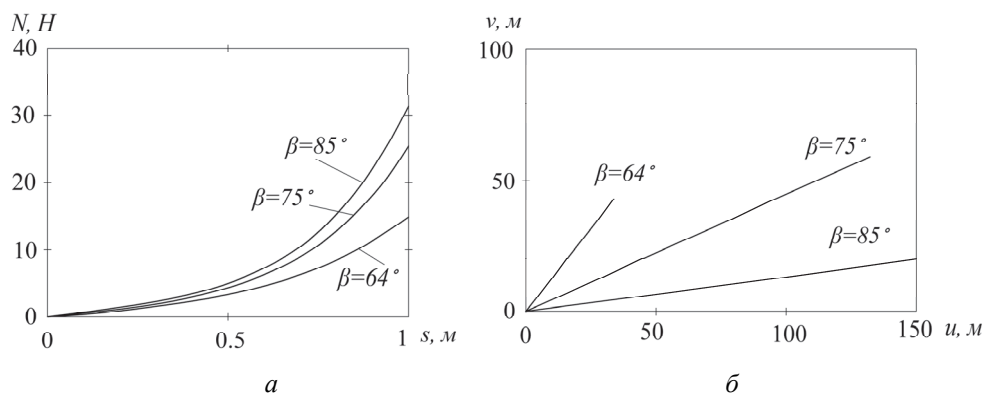


Рис. 6

Подібна ситуація відбувається при збільшенні кута нахилу площини до  $63^\circ$ . При подальшому збільшенні кута  $\beta$  реакція площини не набуває від'ємних значень, вона монотонно зростає. Це означає, що відриву частинки від площини не буде. Про це свідчать графіки зміни сили реакції площини для різних значень її нахилу (рис. 6, а).



При цьому траєкторія ковзання частинки практично є прямою лінією. По мірі збільшення кута нахилу площини ця траєкторія все більше наближається до горизонтальної прямої (рис. 6, б). Коли площина стає вертикальною (при  $\beta = 90^\circ$ ), траєкторія починає відхилятися від горизонтального напрямку вниз (рис. 3, а). Таким чином, проведені дослідження дають можливість прослідкувати трансформацію траєкторії ковзання частинки по площині по мірі збільшення кута її нахилу. Коли площина горизонтальна ( $\beta = 0^\circ$ ), частинка буде описувати у відносному русі спіраль, віддаляючись від осі обертання на яку завгодно відстань. Коли площину нахилили, то існують межі кута  $\beta$ , при яких частинка може відриватися від площини, тобто її переміщення від осі обертання буде обмеженим. Відрив відбувається при підйомі частинки по площині. При подоланні умовного значення кута  $\beta$ , величина якого залежить від коефіцієнта тертя  $f$ , кутової швидкості обертання площини  $\omega$  (для нашого випадку  $\beta \approx 63^\circ$ ) частинка уже не відривається від площини, а її траєкторія ковзання наближається до прямої лінії.

Такі зміни вдається виявити на площині доволі великих розмірів. При невеликих розмірах площини, співрозмірних із розмірами робочих лопаток розсіювальних апаратів відцентрового типу, спостерігаються початкові ділянки відносних траєкторій, що мають криволінійну форму.

#### **Висновок.**

При попаданні частинки на похилу площину, яка обертається навколо вертикальної осі із постійною кутовою швидкістю, частинка описує на площині відносну траєкторію (слід ковзання), форма якої залежить від кута нахилу площини. Якщо площина горизонтальна (кут нахилу  $\beta = 0^\circ$ ), то відносною траєкторією буде спіраль, параметри якої певною мірою залежать від коефіцієнта тертя  $f$ , кутової швидкості  $\omega$  обертання площини. Якщо площина вертикальна (кут нахилу  $\beta = 90^\circ$ ), то частинка, опускаючись вниз і одночасно переміщуючись в поперечному напрямі спочатку описує криву, у якій кривизна зменшується і з часом траєкторія перетворюється у лінію, близьку до горизонтальної прямої. При збільшенні кута нахилу  $\beta$  від нуля відбувається відрив частинки від площини при її підйомі по спіралі. Згодом настає момент, коли форма відносної траєкторії змінюється різко: вона перетворюється у близьку до прямої. При цьому відриву частинки не відбувається. Перспективи подальших досліджень полягають у експериментальній перевірці отриманих теоретичних результатів.

Таким чином, у статті розглянуто застосування тригранника і формул Френе для аналітичного опису складного руху матеріальної точки по його площині, що рухається по плоскій кривій по колу, тобто обертається навколо вертикальної осі. Це важливо, тому що застосування супровідного тригранника кривої у ролі рухомої системи координат дає можливість розв'язувати задачі складного руху матеріальної точки. Форма прямої кривої, заданої параметричними рівняннями у функції її довжини, визначає переносний рух тригранника і дає можливість застосувати формули Френе для опису відносного руху точки в системі тригранника. Такий підхід дає можливість задавати переносний рух стичної площини тригранника по кривій зі змінною кривизною, тобто розширити клас задач на складний рух точки. Це означає, що отриманий науковий результат у вигляді аналітичного опису складного руху матеріальної точки по площині тригранника Френе, переносне переміщення якої задане плоскою прямою кривою, вздовж якої рухається тригранник, є цікавим з теоретичної точки зору.

З практичної точки зору запропонований підхід може бути застосовано до широкого ряду прикладних задач. Побудовано траєкторії ковзання частинки похилою площиною та графіки інших кінематичних характеристик. Таким чином, прикладним аспектом використання отриманого наукового результату є можливість вдосконалення конструкції робочих лопаток розсіювальних апаратів відцентрового типу. Це складає передумови для застосування отриманих розв'язків у практичну діяльність.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто відносний рух частинки похилою площиною, розташованою в рухомій системі координат. За рухому систему прийнято супровідний тригранник Френе, який рухається по плоскій кривій по колу, тобто обертається навколо вертикальної осі. Для отримання системи диференціальних рівнянь відносного руху частинки було використано формули Френе. У зв'язку із цим, на відміну від традиційного підходу, за незалежну змінну було взято не час, а довжину дуги прямої кривої, вздовж якої рухається тригранник. Система рівнянь складена в проекціях на орти рухомого тригранника. Її розв'язано чисельним методом. Побудовано траєкторії ковзання частинки похилою площиною та графіки інших кінематичних характеристик.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** частинка, супровідний тригранник, напрямне коло, кривизна, траєкторія ковзання, швидкість руху, коефіцієнт тертя.

1. *Адамчук В.В.* Теория центробежных рабочих органов машин для внесения минеральных удобрений. – Киев: Аграрна наука, 2010. – 177 с.
2. *Адамчук В.В., Прилуцкий А.Н.* Теоретические исследования влияния колебательного движения решет на эффективность сепарирования зерновых смесей // Механизация и электрификация сельского хозяйства. – 2018. – Р. 28 – 34.
3. *Дмитрів В.Т., Городняк Р.В., Дмитрів Г.М., Підлісний В.В.* Моделирование перемещения частинок конусным дисковым дозатором-змішувачем з криволінійними лопатками // Збірник наукових праць Подільського державного аграрно-технічного ун-ту. Техн. науки. – 2016. – **24**, № 2. – С. 80 – 89.
4. *Милицкий В.И.* Дифференциальная геометрия. – Ленинград: Кубуч, 1934. – 332 с.
5. *Bulgakov V., Nikolaenko S., Holovach I., Boris A., Kiurchev S., Ihnatiev Y., Olt J.* Theory of motion of grain mixture particle in the process of aspiration separation // Agronomy Research. – 2020. – **18**, N 2. – P. 1177 – 1188.
6. *Golub G.A., Szalay K., Kukharets S.M., Marus O.A.* Energy efficiency of rotary digesters // Progress in Agricultural Engng. Sci. – 2017. – **13**, № 1. – P. 35 – 49.
7. *Kobets A.S., Ponomarenko N.O., Kharytonov M.M.* Construction of centrifugal working device for mineral fertilizer spreading // INMATEH – Agricultural Engng. – 2017. – **51**, N 1. – P. 5 – 14.
8. *Loveikin V.S., Romesevych Yu.O.* Dynamic optimization of a mine winder acceleration mode // Наук. Вісник нац. гірничого ун-ту. – 2017. – **4**. – P. 81 – 87.
9. *Pylypaka S., Klendiy M., Zaharova T.* Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes // Lecture Notes in Mech. Engng. – 2019. – **F2**. – P. 336 – 345.
10. *Pylypaka S., Nesvidomin V., Volina T., Sirykh L., Ivashyna L.* Movement of the Particle on the Internal Surface of the Spherical Segment Rotating About a Vertical Axis // INMATEH – Agricultural Engng. – 2020. – **62**, N 3. – P. 79 – 86.

Надійшла 30.03.2021

Затверджена до друку 31.05.2022