

Я.М.Григоренко¹, **О.Я.Григоренко¹**, **Л.С.Рожок²**

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН НЕТОНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК
БЛИЗЬКИХ ДО КРУГОВИХ З НЕПЕРЕРВНО-НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ**

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: ayagrigenko1991@gmail.com*

²*Національний транспортний університет,
вул. Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна; e-mail: r.l.s@ua.fm*

Abstract. The stress state of circular non-thin cylindrical shells with a dent under certain boundary conditions at the ends is considered. The shells are made of continuously inhomogeneous materials and subjected to uniform internal pressure. The problem of the linear theory of elasticity in a three-dimensional formulation is solved based on the method of separation of variables using the method of function approximation through the discrete Fourier series. The cross-section of the shells is described by the Pascal snail equation. A continuously inhomogeneous material with a gradient profile is selected as the shell's material, which corresponds to the quadratic law of variation of Young's modulus through the shell thickness. A comparative analysis of the results on the stress state of the circular shells with a dent and without dents both of equal perimeter is carried out.

Key words: discrete Fourier series, method of discrete orthogonalization, stress state, non-thin cylindrical shells with a dent, continuously inhomogeneous materials.

Вступ.

Оболонки та оболонкові конструкції знаходять застосування у багатьох галузях. Для забезпечення міцності та надійності експлуатації оболонкових конструкцій необхідно визначати їх напружений стан. На етапі конструювання на допомогу приходять математичні методи моделювання [4, 10, 12, 14 – 16], що дають змогу розглянути велику кількість варіантів, враховуючи як геометричні параметри майбутніх оболонкових конструкцій, так і механічні характеристики матеріалу [6, 8], з метою вибору оптимального варіанту, що найкращим чином задовольнятиме поставленим вимогам експлуатації.

Для підвищення зносостійкості при виготовленні конструктивних елементів широко використовуються неоднорідні матеріали [13 – 17], що мають змінні (наприклад, за товщиною) механічні параметри. При виготовленні кругових циліндричних оболонок, або в процесі їх експлуатації, можливі певні відхилення поперечного перетину від початкової кругової форми [5, 19].

Застосування просторової моделі лінійної теорії пружності до визначення напруженого стану циліндричних оболонок, близьких до кругових, дає змогу врахувати як неоднорідність механічних характеристик матеріалу оболонки, так і зміну її геометричних параметрів в поперечному перетині.

В даній роботі розв'язується задача лінійної теорії пружності в просторовій постановці про напружений стан нетонких циліндричних оболонок, близьких до кругових, що перебувають під дією внутрішнього тиску, за певних граничних умов на тор-

цях. Задача розв'язується методом апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, що базується на поєднанні аналітичних методів послідовного розділення змінних в двох координатних напрямках (за твірною та напрямною оболонки). За допомогою цих методів тривимірна крайова задача для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами зводиться до одновимірної, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами більш високого порядку, та стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації. При цьому, щоб позбутися змінних коефіцієнтів, до системи диференціальних рівнянь в частинних похідних на етапі відокремлення змінних вздовж напрямної оболонки вводяться доповнюючі функції, які апроксимуються в процесі застосування чисельного методу дискретними рядами Фур'є. Даний підхід дозволяє отримувати розв'язок задачі з достатньою степінню точності за рахунок варіації точок ортогоналізації та кількості членів дискретного ряду Фур'є [2].

§1. Постановка задачі та метод розв'язування.

Розглянемо криволінійну систему координат s, t, γ , в рамках якої описуються нетонкі циліндричні оболонки, близькі до кругових. В ортогональній криволінійній системі координат s, t криволінійна циліндрична поверхня вибирається за поверхню відліку, а координата γ напрямлена вздовж нормалі до цієї поверхні [9]. Квадрат довжини лінійного елемента, в вибраній системі координат, визначається рівністю

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(t, \gamma)dt^2 + d\gamma^2, \quad (1.1)$$

де $H_1 = H_3 = 1$; $H_2 = 1 + \gamma / R_\gamma$ – параметри Ламе; R_γ – радіус кривизни поверхні відліку поперечного перетину. За поверхню відліку вибрано серединну поверхню циліндричної оболонки, що рівновіддалена від бічних поверхонь. Тоді (L – довжина оболонки, h – її товщина) $0 \leq s \leq L$; $t_1 \leq t \leq t_2$; $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$.

Розглядаються нетонкі циліндричні оболонки з круговим поперечним перетином, які мають вм'ятину в околі одного з кінців діаметру (рис. 1) під дією рівномірного внутрішнього тиску $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s / L)$ ($q_0 = \text{const}$). На рис. 1 цифрою 1 позначена поверхня відліку оболонки з вм'ятиною; цифрою 2 – кругової оболонки.

Поперечний перетин поверхні відліку оболонок описано рівнянням равлика Паскаля в полярній системі координат [3]

$$\rho = a \cos \psi + l, \quad (1.2)$$

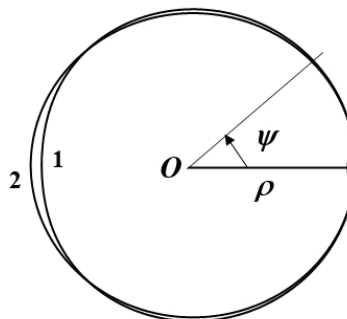


Рис. 1

тут ρ – полярний радіус; ψ – полярний кут в поперечному перетині $0 \leq \psi \leq 2\pi$; a – радіус кола; l – відстань, на яку зміщується точка вздовж радіуса-вектора.

Рівняння (1.1) при переході від координати t до координати ψ набуває вигляду

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(\psi, \gamma)\omega(\psi)d\psi^2 + d\gamma^2,$$

де $\omega(\psi) = [\rho^2 + (\rho')^2]^{1/2}$ – коефіцієнт переходу і $R_\psi = R(\psi) = \frac{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}$ – радіус кривизни серединної поверхні в поперечному перетині.

За основні приймаються рівняння лінійної просторової теорії пружності для ізотропного тіла [18]. На обмежуючих поверхнях розглядаються такі граничні умови:

а) на торцях оболонки – умови простого опирання

$$\sigma_s = u_\psi = u_\gamma = 0 \text{ при } s = 0; \quad s = l; \quad (1.3)$$

б) на бічних поверхнях

$$\sigma_\gamma = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = h/2; \quad (1.4)$$

$$\sigma_\gamma = -q_0 \sin(\pi s / L); \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = -h/2;$$

в) оболонки замкнені вздовж напрямної, тому відповідні граничні умови мають вигляд умов періодичності факторів напружено-деформованого стану (T – період)

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma(s, \psi, \gamma) &= \sigma_\gamma(s, \psi + T, \gamma); \quad \tau_{s\gamma}(s, \psi, \gamma) = \tau_{s\gamma}(s, \psi + T, \gamma); \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots; \quad u_\psi(s, \psi, \gamma) &= u_\psi(s, \psi + T, \gamma). \end{aligned} \quad (1.5)$$

За розв’язувальні оберемо ті функції, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях, а саме: три компоненти напружень $\sigma_\gamma, \tau_{\psi\gamma}, \tau_{s\gamma}$ і додамо до них три компоненти переміщень u_s, u_ψ, u_γ . Після певних перетворень відносно розв’язувальних функцій, з основних рівнянь можна отримати розв’язувальну систему диференціальних рівнянь шостого порядку в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами [2, 9].

§2. Метод розв’язування.

Граничні умови (1.3) та умови періодичності факторів напружено-деформованого стану, шляхом подання розв’язувальних функцій та компонент навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур’є послідовно за координатами s, ψ

$$F_1(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^K F_{1,nk} \sin(\lambda_n s) \cos(k\psi); \quad F_1 = \{\sigma_\gamma; u_\gamma; q\};$$

$$F_2(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K F_{2,nk} \cos(\lambda_n s) \cos(k\psi); \quad F_2 = \{\tau_{s\gamma}; u_s\};$$

$$F_3(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K F_{3,nk} \sin(\lambda_n s) \sin(k\psi); \quad F_3 = \{\tau_{\psi\gamma}; u_\psi\},$$

дозволяють відокремити змінні і отримати систему звичайних диференціальних рівнянь, з формально сталими коефіцієнтами, відносно змінної γ . Тоді для кожного n ($n = \overline{0, N}$), після відокремлення змінних, маємо розв’язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у вигляді

$$\frac{d\sigma_{\gamma,nk}}{d\gamma} = \lambda_n \tau_{s\gamma,nk} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_{4,k}^3 + \varphi_{1,k}^5);$$

$$\frac{d\tau_{s\gamma,nk}}{d\gamma} = -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,nk} + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_{s,nk} - \varphi_{1,k}^2 - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 -$$

$$-\frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{6,k};$$

$$\frac{d\tau_{\psi\gamma,nk}}{d\gamma} = \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_{\psi,nk} - 2\varphi_{2,k}^1 + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 -$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2}(\varphi_{7,k} + \varphi_{5,k}) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_{3,k}^1 \quad (k = \overline{0, K});$$

$$\frac{du_{\gamma,nk}}{d\gamma} = \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E} \sigma_{\gamma,nk} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_{s,nk} - \varphi_{4,k}^2 - \varphi_{1,k}^3); \quad (2.1)$$

$$\frac{du_{s,nk}}{d\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma,nk} - \lambda_n u_{\gamma,nk}; \quad \frac{du_{\psi,nk}}{d\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma,nk} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2,$$

де $\lambda_n = \pi ns / L$; $E = E(\gamma)$ – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона. Граничні умови (1.4) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \gamma = h/2: \quad & \sigma_{\gamma,nk} = 0; \quad \tau_{s\gamma,nk} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,nk} = 0; \\ \gamma = -h/2: \quad & \sigma_{\gamma,nk} = -q_0; \quad \tau_{s\gamma,nk} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,nk} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

На етапі відокремлення змінних вздовж кутової координати ψ до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь вводяться доповняльні функції φ_i^j ($i = \overline{1, 7}$; $j = 1, 2, \dots, 5$), що являють собою добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, які перешкоджають відокремленню змінних в цьому напрямку, у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_1^j &= h_1 \{ \sigma_{\gamma,n}; \tau_{s\gamma,n}; u_{\gamma,n}; u_{s,n}; h_1 u_{\gamma,n} \} \quad (j = \overline{1, 5}); \\ \varphi_2^j &= h_1 \{ \tau_{\psi\gamma,n}; u_{\psi,n} \} \quad (j = 1, 2); \quad \varphi_3^j = h_2 \left\{ \frac{\partial \sigma_{\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_4^j &= h_2 \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma,n}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_{\psi,n}}{\partial \psi}; h_1 \frac{\partial u_{\psi,n}}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_5 &= h_2 \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = h_2 \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = h_2 \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_4^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де

$$h_1 = \frac{1}{(1 + \gamma / R_{\psi}) R_{\psi}}; \quad h_2 = \frac{1}{\omega(1 + \gamma / R_{\psi})}.$$

Ряди Фур'є для доповняльних функцій мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\psi, \gamma) &= \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos k\psi; \quad \tilde{Y}(\psi, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin k\psi; \\ \tilde{X} &= \{ \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6 \}; \quad \tilde{Y} = \{ \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7 \} \quad (j = 1, 2, \dots, 5). \end{aligned}$$

Для інтегрування отриманої системи диференціальних рівнянь (2.1) з граничними умовами (2.2) застосовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації [1] для кожного n ($n = \overline{0, N}$), одночасно для всіх гармонік k ($k = \overline{0, K}$). При цьому, для замикання розв'язувальної системи рівнянь (2.1), на кожному кроці застосування чисельного методу, амплітудні значення доповняльних функцій обчислюються за поточним значенням амплітуд розв'язувальних функцій, згідно виразів (2.3), за допомогою апроксимації їх дискретними рядами Фур'є [11]. На початку інтегрування амплітудні значення доповняльних функцій визначаються за значеннями амплітуд розв'язувальних функцій, згідно відповідних граничних умов (2.2) [2, 9].

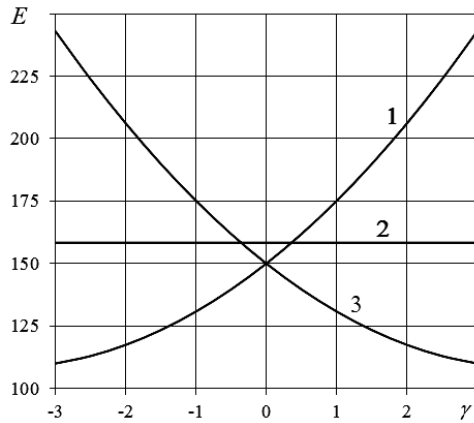


Рис. 2

§3. Числові результати та їх аналіз.

Деякі оцінки точності використаної методики для ізотропних циліндричних оболонок даного класу наведені в роботі [2].

Проведемо аналіз напруженого стану нетонких циліндричних оболонок з вм'ятиною, виготовлених з неперервно-неоднорідного матеріалу (ННМ), що знаходяться під дією внутрішнього тиску.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки $L = 60$; товщина $h = 6$; параметри равлика Паскаля для рівняння (1.2) – $a = 5; 15; l = 40$; механічні характеристики полімерного ННМ з градієнтним профілем, що відповідають квадратичному закону зміни модуля Юнга

за товщиною ($-h/2 \leq \gamma \leq h/2$) [7] $E(\gamma) = a_1\gamma^2 + a_2\gamma + a_3$ (рис. 2). Для коефіцієнтів a_1, a_2, a_3 вибрано такі величини:

- 1) зростаючий модуль Юнга ($E(-h/2) = 110$ МПа; $E(0) = 150$ МПа; $E(h/2) = 243$ МПа); $a_1 = 2,944$ МПа; $a_2 = 22,167$ МПа; $a_3 = 150$ МПа;
- 2) усереднений за товщиною модуль Юнга $E = 158,33$ МПа;
- 3) спадаючий модуль Юнга ($E(-h/2) = 243$ МПа; $E(0) = 150$ МПа; $E(h/2) = 110$ МПа); $a_1 = 2,944$ МПа; $a_2 = -22,167$ МПа; $a_3 = 150$ МПа.

Для коефіцієнта Пуассона прийнято значення $\nu = 0,4$, що пов'язано з незначними розбіжностями коефіцієнта Пуассона для полімерних ННМ.

Усі лінійні розміри і значення переміщень віднесені до одиниці довжини, напруження – до одиничного навантаження.

У випадку $a = 5$ кругова оболонка без вм'ятини однакового периметру має радіус серединної поверхні $r = 40$; для $a = 15$ – відповідно $r = 41,4$. При цьому, радіус кривизни поверхні відліку в перерізі $\psi = \pi$ (в зоні максимальної величини вм'ятини) відрізняється від радіуса відповідного кола на 2% для $a = 5$ і у 1,5 рази для $a = 15$.

В табл. 1 наведено значення нормальних переміщень u_γ , а в табл. 2 – напружень σ_ψ та σ_s на внутрішній ($\gamma = -h/2$) та зовнішній ($\gamma = h/2$) поверхнях оболонки в двох перетинах напрямної $\psi = 0; \pi$ для трьох варіантів зміни модуля пружності: 1 – зростаючого, 2 – усередненого, 3 – спадаючого.

Таблиця 1

E		$u_\gamma E_0 / q_0$								
		$\gamma = -h/2$				$\gamma = h/2$				
		r	a = 5		a = 15		r	a = 15		a = 15
40	$\psi = 0$	$\psi = \pi$	$\psi = 0$	$\psi = \pi$	40	$\psi = 0$	$\psi = \pi$	$\psi = 0$	$\psi = \pi$	
41,4					41,4					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1,616 1,726	1,674	1,706	1,948	2,862	1,510 1,617	1,567	1,598	1,834	2,755
2	1,594 1,703	1,652	1,684	1,928	2,841	1,487 1,593	1,543	1,575	1,812	2,718
3	1,563 1,672	1,622	1,655	1,899	2,827	1,455 1,560	1,512	1,544	1,779	2,688

Значення відповідних величин для кругової оболонки наведено у 2 та 7 стовпчиках табл. 1, 2.

З табл. 1 видно, що для всіх варіантів зміни модуля пружності, значення переміщень в зоні максимальної величини вм'ятини ($\psi = \pi$) як на внутрішній, так і на зовнішній поверхнях збільшуються приблизно в 1,7 рази в оболонках із вм'ятиною для $a = 15$, порівняно з оболонкою без вм'ятини. У випадку незначної вм'ятини ($a = 5$), переміщення збільшуються приблизно на 4 – 6 %.

З табл. 2 видно, що у випадку незначної вм'ятини ($a = 5$) значення напружень σ_ψ і σ_s в круговій та в оболонці з вм'ятиною знаходяться в межах 5%. При збільшенні розміру вм'ятини ($a = 15$) в зоні її найбільшої величини ($\psi = \pi$) на внутрішній поверхні значення напружень σ_ψ зменшуються приблизно в 2 – 4 рази і збільшуються в середньому в 1,6 рази на зовнішній поверхні, порівняно з круговою оболонкою.

Напруження σ_s збільшуються як на внутрішній, так і на зовнішній поверхні приблизно вдвічі, порівняно з оболонкою без вм'ятини.

Таблиця 2

E	σ_s / q_0					σ_ψ / q_0					
	r	a=5		a=15		r	a=5		a=15		
	40	$\psi = 0$	$\psi = \pi$	$\psi = 0$	$\psi = \pi$	40	$\psi = 0$	$\psi = \pi$	$\psi = 0$	$\psi = \pi$	
	41,4					41,4					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$\gamma = -h/2$											
1	3,57	3,56	3,47	3,71	0,92	-2,07	-2,13	-2,19	-	2,38	-4,25
	3,66					-2,21					
2	5,45	5,44	5,32	5,68	2,16	-2,43	-2,49	-2,56	-	2,80	-5,13
						5,59					
3	8,69	8,68	8,53	9,10	4,39	-2,96	-3,04	-3,13	-	3,41	-6,48
						8,91					
$\gamma = h/2$											
1	9,79	9,97	10,12	10,8	15,43	3,14	3,32	3,45	4,01	7,64	
						10,2					3,35
2	6,38	6,51	6,62	7,01	10,5	2,26	2,39	2,49	2,90	5,57	
						6,65					2,42
3	4,40	4,49	4,59	4,89	7,61	1,69	1,79	1,88	2,19	4,29	
						4,59					1,82

На рис. 3 – 5 наведені графіки розподілу напружень σ_ψ (а) та σ_s (б) за товщиною оболонки при $a = 15$. Цифрою 1 позначені криві в зоні максимальної вм'ятини ($\psi = \pi$), цифрою 2 – в перетині $\psi = 0$. Пунктирною лінією позначені графіки напружень для кругової оболонки без вм'ятини. Рис. 3 відповідає зростаючому закону зміни модуля пружності, рис. 4 – усередненому, рис. 5 – спадаючому.

Графіки розподілу напружень σ_ψ, σ_s для оболонок з незначною вм'ятиною ($a = 5$) близькі до кривих 2.

З графіків, наведених на рис. 3 – 5 видно, що у випадку усередненого закону зміни модуля пружності за товщиною (рис. 4) розподіл напружень σ_ψ, σ_s носить лінійний характер, який порушується у випадку зростаючого (рис. 3) та спадаючого (рис. 5) закону зміни модуля пружності.

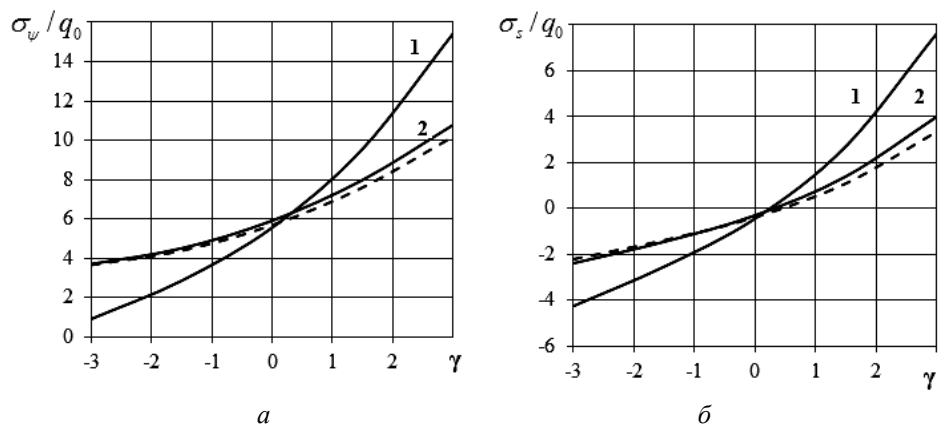


Рис. 3

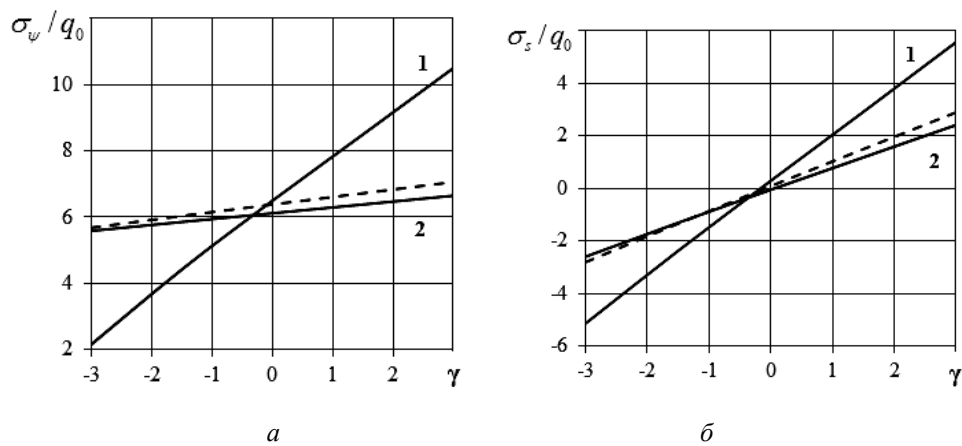


Рис. 4

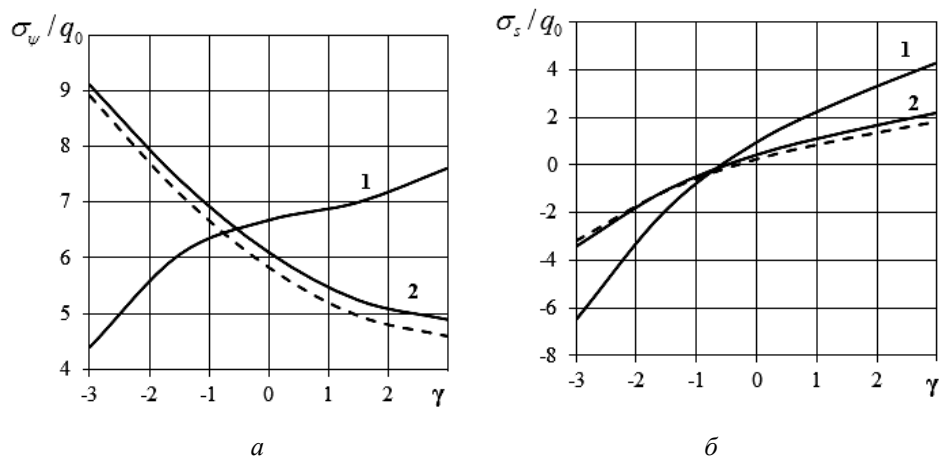


Рис. 5

При цьому, для зростаючого і усередненого закону зміни модуля пружності, максимальних значень напруження σ_w набувають на зовнішній ($\gamma = h/2$) поверхні в перетині $\psi = \pi$, збільшуючись, порівняно з перетином $\psi = 0$ приблизно в 1,5 рази.

Для спадаючого закону зміни модуля пружності, максимальних значень напруження σ_ψ досягають на внутрішній поверхні ($\gamma = -h/2$) в перетині $\psi = 0$, при цьому збільшуючись приблизно в 2 рази, порівняно з напруженнями в перетині $\psi = \pi$.

Напруження σ_s для усіх трьох варіантів закону зміни модуля пружності досягають своїх максимальних абсолютних значень в зоні максимальної величини вм'ятини ($\psi = \pi$), збільшуючись при цьому приблизно вдвічі; у випадку спадаючого закону зміни модуля пружності максимальні амплітудні значення напружень σ_s мають місце на внутрішній поверхні оболонки ($\gamma = -h/2$), у випадку усередненого та зростаючого – на зовнішній ($\gamma = h/2$).

Висновки.

В просторовій постановці на основі методів відокремлення змінних, з використанням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та застосуванням чисельного методу дискретної ортогоналізації, розв'язано задачу про напружений стан циліндричних оболонок із вм'ятиною, що виготовлені з неперервно-неоднорідного матеріалу.

Проведено аналіз напруженого стану оболонок із вм'ятиною, виготовлених з неперервно-неоднорідного матеріалу з градієнтним профілем, що відповідає квадратичному закону зміни модуля пружності за товщиною. Розглянуто три випадки зміни модуля пружності: зростаючий, спадаючий та усереднений. Проведено порівняльний аналіз факторів напруженого стану розглядуваних оболонок із вм'ятиною та кругових оболонок без вм'ятини однакового периметру. Отримані результати можуть бути використані при розрахунках на міцність функціональних елементів кругових циліндричних оболонкових конструкцій, або їх елементів, що мають вм'ятину в поперечному перетині.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено напружений стан кругових нетонких циліндричних оболонок, що мають вм'ятину і виготовлені з неперервно-неоднорідних матеріалів, за певних граничних умов на торцях та перебувають під дією рівномірного внутрішнього тиску. Розв'язано задачу лінійної теорії пружності в просторовій постановці на основі методу відокремлення змінних з використанням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації. Поперечний перетин оболонок описано за допомогою рівняння равлика Паскаля. Для матеріалу оболонок вибрано неперервно-неоднорідний матеріал з градієнтним профілем, що відповідає квадратичному закону зміни модуля Юнга за товщиною оболонки. Проведено порівняльний аналіз результатів щодо напруженого стану кругових оболонок із вм'ятиною та без вм'ятини однакового периметру.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: дискретні ряди Фур'є, метод дискретної ортогоналізації, напружений стан, нетонкі циліндричні оболонки з вм'ятиною, неперервно-неоднорідні матеріали.

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, № 3. – С. 171 – 174.
2. Григоренко Я.М., Рожок Л.С. Про рівновагу нетонких циліндричних оболонок із вм'ятиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – 63, № 2. – С. 72 – 82.
3. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. (Справочное руководство). – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 292 с.
4. Abrosimov N.A., Elesin A.V., Igumnov, L.A. Numerical Simulation of the Process of Loss of Stability of Composite Cylindrical Shells Under Combined Quasi-Static and Dynamic Actions // Mech. Compos. Mater. – 2019. – 55. – P. 41 – 52.

5. Aydin A.C., Yaman Z., Açcakoca E. et al. CFRP Effect on the Buckling Behavior of Dented Cylindrical Shells // *Int. J. Steel Struct.* – 2020. – **20**. – 425 – 435.
6. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Aeroelastic Stability of Cylindrical Shells with Elliptical Cross-Section // *Mech. Solids.* – 2020. – **55**. – P. 728 – 736.
7. Grigorenko A.Y., Efimova T.L., Korotkikh Y.A. Free Axisymmetric Vibrations of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 6. – P. 654 – 663.
8. Grigorenko A.Y., Grigorenko Y.M., Loza I.A. Numerical Analysis of Dynamical Processes in Inhomogeneous Piezoceramic Cylinders (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 5. – P. 523 – 571.
9. Grigorenko Y.M., Rozhok L.S. Influence of Curvature on the Stress State of Hollow Cylinders with Complex-Shaped Noncircular Cross-Section // *Int. App. Mech.* – 2010. – **46**, N 7. – P. 37 – 743.
10. Grigorenko A.Y., Yaremchenko S.N. Three-Dimensional Analysis of the Stress – Strain State of Inhomogeneous Hollow Cylinders Using Various Approaches // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 5. – P. 487 – 494.
11. Hamming R.W. *Numerical Methods for Scientists and Engineers.* – New York: MG Graw-Hill, 1962. – 400 p.
12. Hart E.L., Hudramovich V.S. Projection-Iterative Schemes for the Implementation of Variational-Grid Methods in the Problems of Elastoplastic Deformation of Inhomogeneous Thin-Walled Structures // *J. Math. Sci.* – 2021. – **254**. – P. 21 – 38.
13. Lu W.Y., Jin H., Foulk J. et al. Solid Cylinder Torsion for Large Shear Deformation and Failure of Engineering Materials // *Exp. Mech.* – 2021. – **61**. – P. 307 – 320.
14. Najibi A., Alizadeh P., Ghazifard P. Transient thermal stress analysis for a short thick hollow FGM cylinder with nonlinear temperature-dependent material properties // *J Therm. Anal. Calorim.* – 2021. – **146**. – P. 1971 – 1982.
15. Nguyen-Sy T., Vu M.N., Nguyen T.K. et al. Poroelastic response of a functionally graded hollow cylinder under an asymmetric loading condition // *Arch. Appl. Mech.* – 2021. – **91**. – P. 3171–3189.
16. Pengpeng S., Jun X., Shuai H. Static response of functionally graded piezoelectric-piezomagnetic hollow cylinder/spherical shells with axial/spherical symmetry // *J. Mech. Sci. Technol.* – 2021. – **35**. – P. 1583 – 1596.
17. Rahnama H., Salehi S.D., Taheri-Behrooz F. Centrosymmetric equilibrium of nested spherical inhomogeneities in first strain gradient elasticity // *Acta Mech.* – 2020. – **231**. – P. 1377 – 1402.
18. Timoshenko S.P. *Theory of Elasticity.* – New York: MG Graw-Hill, 1934. – 452 p.
19. Yu C., Qiu B., Hu J. et al. Mechanical Behavior and Evaluation of Dented Pipe Caused by Cylindrical Indenter // *J. Fail. Anal. Preven.* – 2019. – **19**. – P. 519 – 535.

Надійшла 03.06.2021

Затверджена до друку 31.05.2022