

Я. Я. Рушицький<sup>1,2</sup>, В. М. Юрчук<sup>1,2</sup>

## СПОТВОРЕННЯ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПОДИНОКОЇ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ З ПРОФІЛЕМ ФРІДЛАНДЕРА

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,

вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: rushch@inmtech.kiev.ua; e-mail: rheol@inmtech.kiev.ua

<sup>2</sup>Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,

просп. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна

**Abstract.** The distortion of a nonlinear elastic plane wave of displacement is analyzed theoretically and numerically within the framework of the five-constant Murnaghan model in the case of characteristic for blast wave initial profile in the Friedlander form. In contrary to most nonlinear waves in materials, which have periodically arranged or solitary humps, this wave has no hump, is monotonically decreased, and has a concave down profile. The evolution of waves is studied by the approximate method by taking into account the first two approximations. Some essential distinctions just this wave are shown in detail theoretically and numerically – the not characteristic profile is evolved in the not characteristic way. The significant features of the Friedlander wave are shown – the initial profile is distorted in a non-characteristic way – the profile becomes much (for the materials with the soft nonlinearity) or less (for the materials with the hard nonlinearity) steeper, it is still without hump and remaining convex down, the maximal value of the profile increases.

**Key words:** solitary elastic plane wave, five-constant Murnaghan potential, approximate method, Friedlander initial wave profiles, distortion.

### 1. Про деякі особливості постановки задачі зазначеної у назві статті.

Явище поступової зміни чи спотворення початкового профілю хвилі при її поширенні є предметом аналізу сучасної теорії хвиль [7, 8, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 25]. В теорії хвиль терміни «еволюція – evolution» (поступова зміна початкового профілю хвилі при її поширенні) і «дисторсія – distortion» (спотворення початкового профілю хвилі при її поширенні) практично вважаються синонімами. У даній роботі використовується термін «дисторсія», оскільки проведені раніше дослідження поодиноких хвиль в матеріалах [1, 2, 4 – 6, 8, 9, 21, 23, 26, 32] дають підстави вважати, що максимальна амплітуда хвилі при її поширенні в нелінійно пружних матеріалах та її профіль змінюватимуться суттєво – спотворюватимуться.

Далі розглянемо плоску поздовжню хвилю, яка вивчалася досить докладно для багатьох форм початкового профілю [21, 23, 26, 32]. Середовищем поширення хвилі виберемо нелінійно пружні матеріали [1, 3, 9, 12, 14, 18, 21, 31].

*Примітка 1.* Хвиля поширюється одночасно в просторі і в часі. Оскільки вона характеризується фазою  $\sigma = x - vt$ , то при відомій швидкості хвилі  $v$  фіксована точка простору відповідає фіксованому часу. Тому поширення хвилі можна вивчати як процес, що розвивається в просторі або у часі. У випадку хвиль зміщення в матеріалах вираз  $u(x - vt)$ , отриманий звичайно як розв'язок нелінійного хвильового рівняння, можна вважати таким, що описує зміну початкового профілю хвилі.

Виберемо зпосеред плоских поздовжніх хвиль клас поодиноких хвиль.

*Примітка 2.* Поодинокі хвилі (solitary waves) вивчаються в теорії хвиль досить давно. Далі вважається, що профіль поодинокі хвилі описується фінітною функцією (відмінною від нуля лише на скінченному відрізку) або функцією скінченної ваги (величина площі під графіком функції є скінченною на скінченному відрізку і такою, що площею-вагою поза цим відрізком можна знехтувати – площа зосереджена на скінченному відрізку). У механіці матеріалів поодинокі хвилі спостерігаються в експериментальних студіях імпульсів, які формуються різними способами і діють на виготовлені з певних матеріалів зразки чи конструкції [3, 25]. Теоретично такі хвилі в матеріалах вивчені фрагментарно. Хвиля з профілем у вигляді функції Гаусса (дзвіноподібна чи горбоподібна хвиля, яка є якраз функцією скінченної ваги) вважається типовим прикладом поодинокі хвилі.

Найпростіша подинока хвиля може бути описана класичним розв'язком Д'Алямбера [21]  $u(x, t) = f(x - ct)$  лінійного хвильового рівняння (у даному випадку, лінійною частиною рівняння  $u_{,tt} - c^2 u_{,xx} = 0$ ) для одновимірної хвилі зміщення [9, 14, 19, 21, 22]. Хвиля Д'Алямбера відповідає лінійній теорії пружності, в рамках якої зміну початкового профілю описати не можна. Тому дисторсія чи еволюція хвиль в матеріалах (хвиль як гармонічних, так і подиноких) вивчається в рамках моделей нелінійної теорії пружності.

Далі подинока хвиля вивчається із застосуванням однієї з найбільш розвинених моделей нелінійної теорії пружності – п'ятиконстантної моделі Мернагана [1, 5, 6, 19, 22]. Ця модель допускає різні варіанти нелінійного хвильового рівняння. Найпростіший варіант нелінійного хвильового рівняння включає лише квадратичну нелінійність.

Отже, нехай лише плоска поздовжня хвиля початково збуджується і рухається в напрямку осі абсцис у вигляді хвилі зміщення  $u_1(x_1, t)$ . Тоді її рух описується в рамках моделі Мернагана квадратично нелінійним хвильовим рівнянням [2, 6, 9, 21, 31]

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \quad \text{або} \quad u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}, \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина;  $\lambda, \mu, A, B, C$  – пружні сталі моделі Мернагана;  $v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  – швидкість хвилі в лінійному наближенні,  $N_1 = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]$ .

Рівняння (1) проаналізоване досить докладно у випадку плоских хвиль різного початкового профілю [6, 21, 23]. Саме плоскі хвилі при поширенні виявляють найбільш характерні особливості зміни форми початкового профілю.

## **2. Базова формула для наближеного розв'язку нелінійного рівняння (1) при застосуванні методу обмеження на градієнт зміщення.**

Класичною задачею в теорії нелінійних хвиль при вивченні плоских хвиль є задача про хвилі з гармонічним початковим профілем (гармонічні хвилі). Класичними методами дослідження є методи послідовних наближень і повільно змінних амплітуд. При переході до подиноких хвиль застосування цих методів призводить до суттєвих математичних ускладнень [5, 6, 9, 21]. Тому далі до аналізу рівняння (1) стосовно подиноких хвиль буде застосований метод обмеження на градієнт зміщення.

Однією з особливостей цього методу [22, 24, 27 – 30, 32] є те, що нелінійне хвильове рівняння, до аналізу якого він застосовується, повинно мати особливу структуру: рівняння має включати як окрему частину лінійне хвильове рівняння і, очевидно, один чи декілька нелінійних доданків. Ця особливість чи умова є характерною і для двох згаданих вище класичних методів. Тоді (наприклад, стосовно рівняння (1)), праву нелінійну частину рівняння можна у певних випадках переносити в ліву лінійну частину, а потім формально нелінійне рівняння (1) можна записувати як рівняння щодо лінійної хвилі зі змінною швидкістю хвилі.

*Примітка 3.* Піонерськими роботами щодо методу обмеження на градієнт зміщення можна вважати знамениту роботу Ріманна про прості плоскі хвилі, де характерна

ознака простої хвилі (хвилі Ріманна) означена як змінність швидкості хвилі. Більш конкретно, швидкість простої хвилі залежить від стану хвилі у даний момент. Формально математично, хвиля описується виразом  $u(x, t) = u[x - v(u)t]$ . Більш докладно з точки зору сучасної теорії хвиль прості хвилі описані в класичній книзі Лайтхілла.

Для аналізу поодиноких хвиль в рамках хвильового рівняння (1) слід це рівняння представити у вигляді

$$u_{1,t} - \left\{ (v_L)^2 + (N_1/\rho)u_{1,1} \right\} u_{1,11} = 0 \rightarrow u_{1,t} - \{1 + \alpha u_{1,1}\} (v_L)^2 u_{1,11} = 0; \quad (2)$$

$$\alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]. \quad (3)$$

Далі хвиля, що описується рівнянням (2), розглядається за умови певної гладкості розв'язку рівняння (2): початковий профіль хвилі описується достатньо гладкою функцією  $u_1(x_1, t = 0) = F(x_1)$ . Припускається, що хвиля поширюється у вигляді

$$u_1(x_1, t) = F[a(x_1 - vt)] \quad (4)$$

зі змінною швидкістю хвилі

$$v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} v_L. \quad (5)$$

Тепер хвилю (4) можна розглядати як конкретний випадок простої хвилі, коли довільне представлення швидкості простої хвилі  $v = v(u)$  має конкретний вираз (5).

Далі аналіз хвилі (2) проведемо наближеним способом, першим кроком у якому є наближене представлення кореня у виразі (5). Для цього накладемо обмеження на вираз  $\alpha u_{1,1}$ , який є добутком певної константи (3) середовища поширення хвилі (матеріалу) на градієнт зміщення в момент часу поширення хвилі  $t$

$$|\alpha u_{1,1}| \ll 1. \quad (6)$$

Оскільки константа (3) має для більшості матеріалів порядок  $10^1$ , то умова (6) фактично накладає обмеження на градієнт зміщення.

Умова (6) дозволяє представити корінь в (5) у вигляді ряду

$$\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} = (1 + \alpha u_{1,1})^{1/2} = 1 + (1/2)\alpha u_{1,1} - (1/8)(\alpha u_{1,1})^2 + \dots \quad (7)$$

Зважаючи на обмеження (6), наближене представлення простої хвилі (4) можна записати через два перші члени формули (7)

$$u_1(x_1, t) \approx F[a(x_1 - v_L t) - (1/2)t\alpha v_L u_{1,1}]. \quad (8)$$

*Примітка 4.* Особливістю наближеного представлення хвилі (8) є те, що воно вже включає постійну швидкість хвилі  $v_L$ , яка відповідає лінійному наближенню.

*Примітка 5.* Також зазначимо, що адекватність наближення (8) залежить від точності виконання умови (6).

Позначимо через  $\sigma = a(x_1 - v_L t)$  фазу хвилі з постійною фазовою швидкістю  $v_L$  і масштабним коефіцієнтом підшови поодинокі (простої) хвилі  $a$ . Тоді формулу (8) можна записати коротшим виразом

$$u(x_1, t) \approx F(\sigma + \delta).$$

Далі представимо функцію  $F(\sigma + \delta)$  наближено формулою

$$F(\sigma + \delta) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)\delta \quad (9)$$

за умови малості величини  $\delta$

$$|\delta| = \left| -(1/2) t a v_L u_{1,1} \right| \ll 1. \quad (10)$$

*Примітка 6.* Оскільки малість  $|\alpha u_{1,1}|$  вже припущена в (6), то умова (10) фактично є умовою щодо малості  $av_L t$ . Нагадаємо, що  $a$  визначає величину підшви хвилі і  $t$  є пройдений хвилею час.

Присутню в формулі (9) похідну  $F'(\sigma)$  знайдемо теж наближено за формулою

$$u_{1,1}(x_1, t) \approx F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \sigma'_{x_1} = F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \left[ a - (1/2) t a v_L u_{1,1} \right] \approx a F'(\sigma) \rightarrow F'(\sigma) \approx a^{-1} u_{1,1}.$$

Тоді розв'язок (8) можна записати наближено у вигляді суми лінійного представлення і нелінійної добавки

$$u_1(x_1, t) \approx F(\sigma) - F'(\sigma) a^2 \times (1/2) t a v_L F'(\sigma) = F(\sigma) - (1/2) \alpha a^2 v_L t \left[ F'(\sigma) \right]^2. \quad (11)$$

Наближене представлення (11) хвилі (4) має загальний характер. У ньому для різних початкових профілів описується один і той же нелінійний ефект – початковий профіль хвилі (1-а гармоніка у випадку гармонічного профілю чи початковий профіль поодинокі хвилі) доповнюється породженою нелінійністю матеріалу частиною формули (11). З точки зору механіки хвиль наявність цієї нової частини означає спотворення початкового профілю хвилі, тому що вплив цієї частини збільшується з часом поширення хвилі.

*Примітка 7.* Достовірність наближеного представлення (11) регулюється певними обмеженнями – перш за все, це обмеження на величину градієнта зміщення, по-друге, це обмеження на час поширення хвилі; крім того, в обмеження входять фізичні сталі матеріалу та величина підшви хвилі.

Формула (11) створює можливість для числового моделювання спотворення поодинокі хвилі при відомому початковому профілі цієї хвилі.

*Примітка 8.* Незважаючи на, здавалось би, сильні обмеження (6) та (10), формула (11) дає сприйнятні результати. Зокрема, проведене порівняння графіків еволюції початкового гармонічного профіля, отриманих класичним методом послідовних наближень і методом обмеження на градієнт зміщення, показало практично ідентичні результати [21, 23, 25].

Далі виберемо відомий у фізичній теорії вибуху (початково, атомного вибуху) початковий профіль, який досліджується вже майже сто років і ці дослідження продовжуються до нашого часу. В основному, це дослідження експериментальні, які стосуються сучасних проблем науки, не пов'язаних з атомними вибухами, а, зокрема, інших військових і медичних проблем [11, 15].

Отже, виберемо профіль Фрідландера [10, 11, 16] і запишемо його у вигляді

$$F(x_1) = A^o e^{-bx_1/x_{att}} \left( 1 - x_1/x_{att} \right), \quad (12)$$

де  $A^o$  є амплітудним множником, постійна  $b$  визначає підшву профілю і постійна  $x_{att}$  характеризує затухання профіля (крутизну).

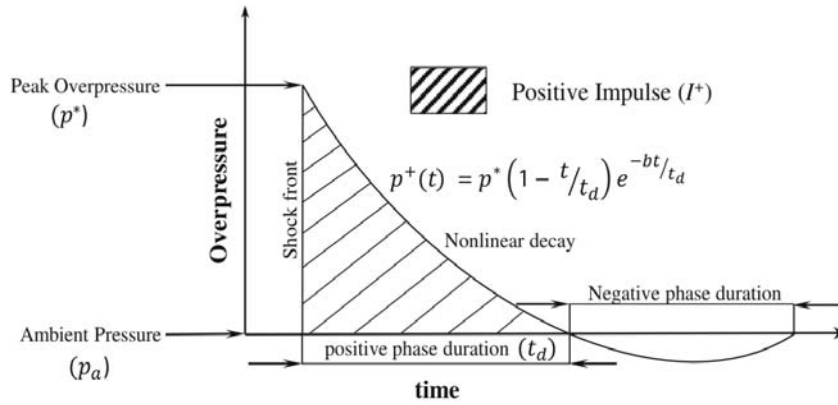
Профіль (12) вважається одним з найпростіших і часто використовується в інтерпретації експериментів.

На рис. 1, *a* зображена форма початкового імпульсу Фрідландера, яка приведена в недавній експериментальній роботі [10]. Також на рис. 1, *b* показана експериментально досліджена еволюція початкового імпульсу, генерованого вибухом. Автори публікації [10] вважають профіль Фрідландера цілком сприйнятним для інтерпретації експерименту.

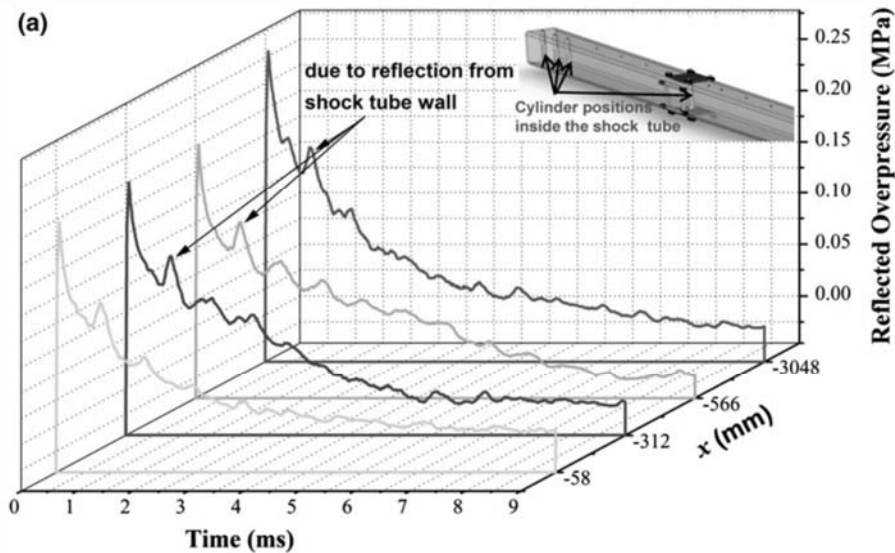
При підстановці виразу (12) у формулу (11) отримується наближена формула для числового моделювання спотворення початкового профілю Фрідландера

$$u_1(x_1, t) = A^o e^{-ba(x_1 - v_L t)/x_{att}} [1 - a(x_1 - v_L t)/x_{att}] - (13)$$

$$-(1/2)\alpha a^4 v_L t (1/x_{att})^2 (A^o)^2 \{1 + b[1 - a(x_1 - v_L t)/x_{att}]\}^2 e^{-2ba(x_1 - v_L t)/x_{att}}.$$



a



б

Рис. 1

Формула (13) описує зміну початкового профілю хвилі через пряму залежність нелінійного доданку від часу. Нехарактерною особливістю профілю Фрідляндера, яка вирізняє її з-поміж функцій, якими описувались поодинокі хвилі, є те, що графік цієї функції не має горба, є спадним і опуклим вниз.

Для в'яснення того, чи не є спотворення профілю (12) теж нехарактерним, проводилось числове моделювання процесу еволюції для двох типів композитних матеріалів при їх описі моделлю Мернагана – матеріалів з м'якою та жорсткою характеристиками нелінійності [14, 21, 26].

*Примітка 9.* Приналежність матеріалу до одного з вказаних вище типів визначається формулою зв'язку між напруженням та деформацією в умовах універсальної деформації однонапрявленого стиску – розтягу і пружними постійними Мернагана. Ця формула має вигляд

$$\sigma_{11} = (3\lambda + 2\mu)e + (A + 5B + 3C)e^2 - 2(A + 3B + C)\alpha, \quad (14)$$

де

$$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}; \quad \alpha = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}.$$

Якщо зразок є круглим, то  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ ,  $\varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11}$ ,  $e = (1-2\nu)\varepsilon_{11}$ ,  $\alpha = -\nu(2-\nu)(\varepsilon_{11})^2$ .

Тоді формула (14) спрощується

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \left[ (A+5B+3C)(1-2\nu)^2 + 2(A+3B+C)\nu(2-\nu) \right] (\varepsilon_{11})^2. \quad (15)$$

Формула (15) є зручною для виявлення, чи є той або інший матеріал нелінійним з м'якою чи жорсткою характеристикою нелінійності.

*Примітка 10.* М'яка нелінійність характеризується кривою лінією  $\sigma_{11} \sim \varepsilon_{11}$ , яка лежить під прямою лінією  $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ , що відповідає лінійному закону Гука. Таким чином, напруження зі збільшенням деформації приймають менші значення, ніж за лінійним законом Гука (матеріал якби більш м'який). Жорстка нелінійність відповідає розміщенню кривої над прямою лінією. Переважна більшість інженерних матеріалів характеризується від'ємними значеннями всіх трьох пружних постійних Мернагана [1, 3, 26, 30] і вони є матеріалами з м'якою характеристикою нелінійності. Жорстка характеристика властива дуже малій кількості матеріалів. У тому числі, вона властива склу PIREX.

У проведеному числовому моделюванні розглянуто чотири композитні гранульовані матеріали з такими механічними параметрами [1, 3, 6, 21, 31].

Матеріал 1 (матеріал з м'якою характеристикою нелінійності, матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам, об'ємний вміст матриці 0,8)

$$\rho = 0,594 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 5,59 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 3,26 \cdot 10^{-10}; \\ A = -0,658 \cdot 10^{-11}; \quad B = -2,18 \cdot 10^{-11}; \quad C = -4,35 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 1,763 \cdot 10^3.$$

Матеріал 2 (матеріал з м'якою характеристикою нелінійності, матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам, об'ємний вміст матриці 0,6)

$$\rho = 0,918 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 11,6 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 0,721 \cdot 10^{-10}; \\ A = -1,33 \cdot 10^{-11}; \quad B = -4,45 \cdot 10^{-11}; \quad C = -9,5 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 2,179 \cdot 10^3.$$

Матеріал 3 (матеріал з жорсткою характеристикою нелінійності, матриця – смола EPOX 828, наповнювач – боросилікатне скло PIREX, об'ємний вміст матриці 0,6)

$$\rho = 1,31 \cdot 10^3; \quad \lambda = 0,265 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 0,181 \cdot 10^{10}; \\ A = +3,60 \cdot 10^{-11}; \quad B = -1,24 \cdot 10^{-11}; \quad C = +0,90 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 2,188 \cdot 10^3.$$

Матеріал 4 (матеріал з жорсткою характеристикою нелінійності, матриця – смола EPOX 828, наповнювач – боросилікатне скло PIREX, об'ємний вміст матриці 0,8)

$$\rho = 1,42 \cdot 10^3; \quad \lambda = 0,400 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 0,265 \cdot 10^{10}; \\ A = +3,20 \cdot 10^{-11}; \quad B = -1,10 \cdot 10^{-11}; \quad C = +0,80 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 2,559 \cdot 10^3.$$

Характерну залежність амплітуди хвилі  $u_1$  від відстані поширення хвилі  $r$  показано на рис. 2 – 5. Усі графіки побудовані за формулою (13) і відповідають матеріалам: Рис.  $N$  – матеріал  $N-1$  ( $N = 2, \dots, 5$ ).

Використані при моделюванні параметри є такими:

- матеріал 1 –  
 для 2D графіків  $A^0 = 10^{-3}$ ;  $a = 0,02$ ;  $\nu_L = 4,515 \cdot 10^3$ ;  $b = 2,5 \times 10^2$ ;  $x_{att} = 2 \times 10^{-2}$ ;  
 для 3D графіка  $A^0 = 10^{-3}$ ;  $a = 0,02$ ;  $\nu_L = 4,515 \cdot 10^3$ ;  $b = 1,5 \times 10^2$ ;  $x_{att} = 3 \times 10^{-2}$ ;  
 матеріал 2 –  
 для 2D графіків  $A^0 = 10^{-3}$ ;  $a = 0,02$ ;  $\nu_L = 3,769 \cdot 10^3$ ;  $b = 2,5 \times 10^2$ ;  $x_{att} = 2 \times 10^{-2}$ ;  
 для 3D графіка  $A^0 = 10^{-3}$ ;  $a = 0,02$ ;  $\nu_L = 3,769 \cdot 10^3$ ;  $b = 1,5 \times 10^2$ ;  $x_{att} = 3 \times 10^{-2}$ ;  
 матеріал 3 –  
 для 2D графіків  $A^0 = 10^{-3}$ ;  $a = 0,02$ ;  $\nu_L = 2,188 \cdot 10^3$ ;  $b = 2,5 \times 10^2$ ;  $x_{att} = 2 \times 10^{-2}$ ;

для 3D графіка  $A^o = 10^{-3}$ ;  $a = 0,02$ ;  $\nu_L = 2,188 \cdot 10^3$ ;  $b = 6,5 \times 10^{-1}$ ;  $x_{att} = 4 \times 10^{-2}$ ;  
 матеріал 4 –

для 2D графіків  $A^o = 10^{-3}$ ;  $a = 0,02$ ;  $\nu_L = 2,559 \cdot 10^3$ ;  $b = 2,5 \times 10^2$ ;  $x_{att} = 2 \times 10^{-2}$ ;

для 3D графіка  $A^o = 10^{-3}$ ;  $a = 0,02$ ;  $\nu_L = 2,559 \cdot 10^3$ ;  $b = 6,5 \times 10^{-1}$ ;  $x_{att} = 4 \times 10^{-2}$ .

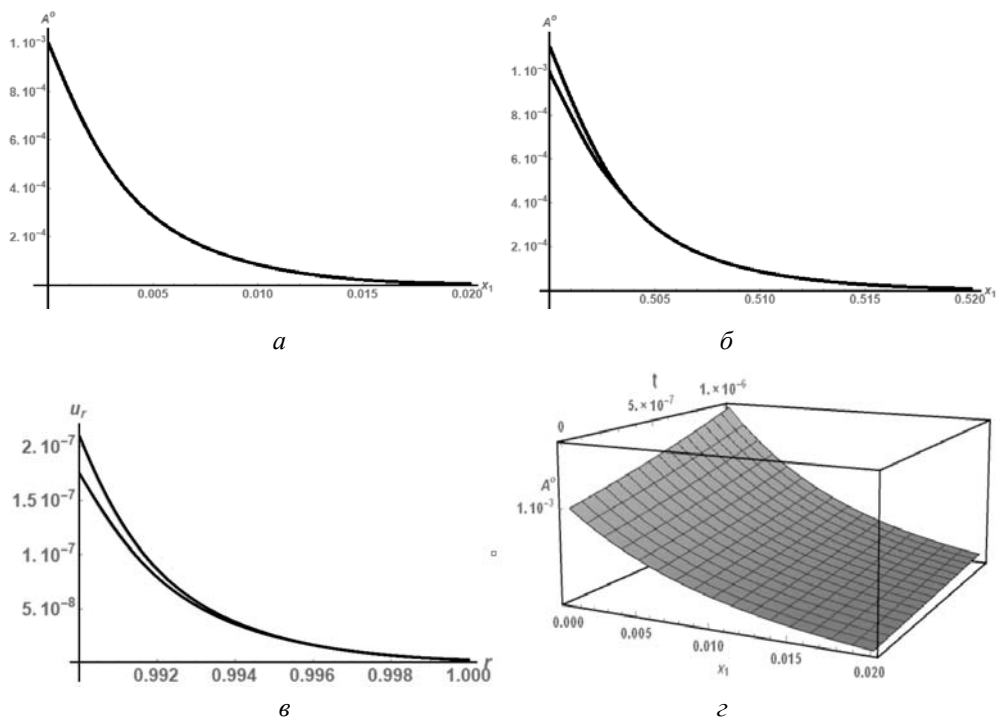


Рис. 2

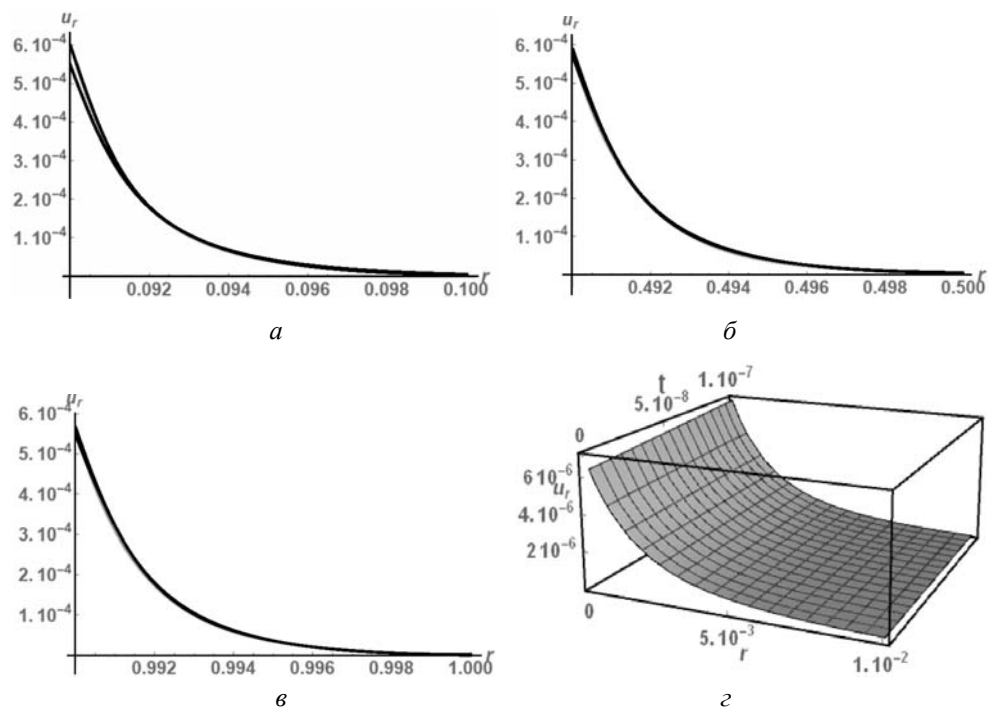


Рис. 3

Рис. 2, *a* і 3, *a* відповідають стадії, коли нелінійність має невеликий вплив на профіль хвилі. Ліва (нижня) лінія відповідає лінійному наближенню (неспотворений профіль), права (верхня) – двом першим наближенням. Отже, спотворений профіль зберігає форму опуклості вниз початкового профілю і лежить вище початкового (вони ніде не перетинаються), стає дещо крутішим і його амплітуда збільшується. Підшва спотвореного профілю не змінюється. Рис. 2, *б* і 3, *б* показують більш розвинену еволюцію початкового профілю (довша відстань поширення). Він зберігає відображені на попередній стадії особливості. У тому числі, спотворений профіль стає більш крутим і амплітуда ще більшою. Підшва спотвореного профілю не змінюється. На рис. 2, *в* і 3, *в* показано ще більш розвинену еволюцію початкового профілю (ще довша відстань поширення). Він зберігає відображені на попередніх стадіях особливості. Зокрема, стає ще крутішим і амплітуда продовжує збільшуватись. Підшва спотвореного профілю не змінюється. Рис. 2, *г* і 3, *г* показують тривимірне зображення еволюції в координатах «час поширення – відстань поширення – зміщення».

На рис. 2 – 5 порівнюються перші два наближення і перші три наближення. Вони показують дві лінії. Ліва відповідає першим двом наближенням, а права – першим трьом.

Характерну залежність амплітуди хвилі  $u_r$  від відстані поширення хвилі  $r$  показано на рис. 4. Усі графіки побудовані за формулою (30) і відповідають матеріалу 3. Інші параметри вказані на рисунках. Рис. 4, *a* відповідає стадії, коли нелінійність має невеликий вплив на еволюцію. Ліва лінія відповідає лінійному наближенню (неспотворений профіль), права – двом першим наближенням. Отже, спотворений профіль зберігає форму опуклості вниз початкового профілю і лежить нижче початкового (вони ніде не перетинаються) і стає дещо пологішим. Амплітуда спотвореного профілю зменшується. Рис. 4, *б* показує більш розвинену еволюцію початкового профілю (довша відстань поширення). Він зберігає відображені на попередній стадії особливості. У тому числі, спотворений профіль стає більш пологим. Амплітуда спотвореного профілю зменшується. На рис. 4, *в* показано ще більш розвинену еволюцію початкового профілю (ще довша відстань поширення). Він зберігає відображені на попередніх стадіях особливості. Зокрема, стає ще пологішим. Амплітуда спотвореного профілю продовжує зменшуватись.

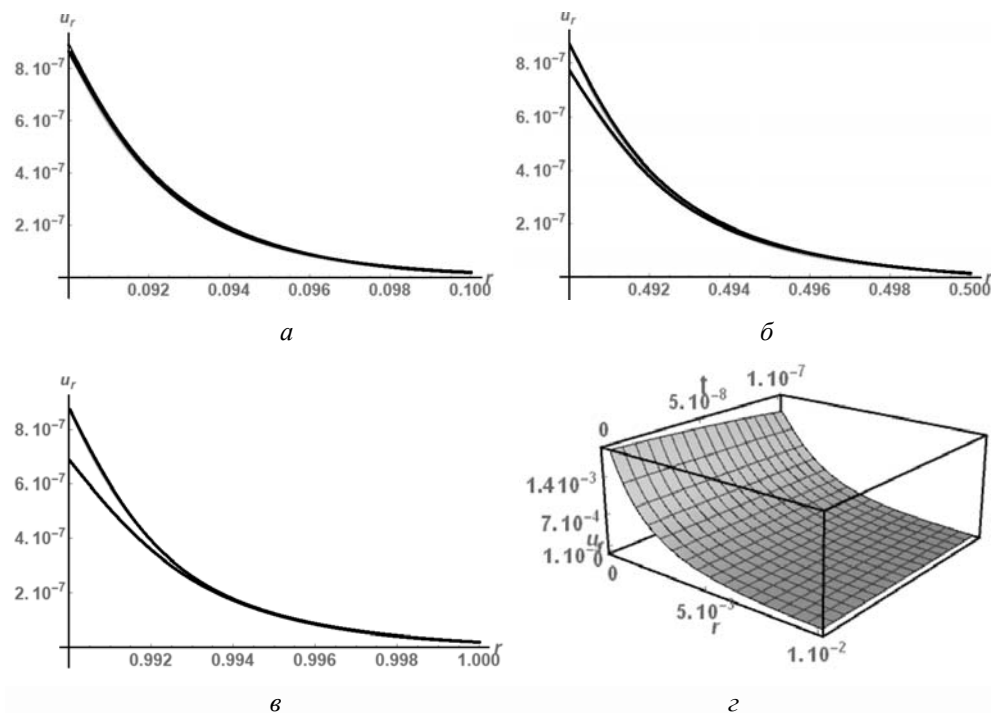


Рис. 4



На рис. 5 порівнюються перші два наближення і перші три наближення для матеріалу 3. Він показує дві лінії. Ліва відповідає першим двом наближенням, а права – першим трьома.

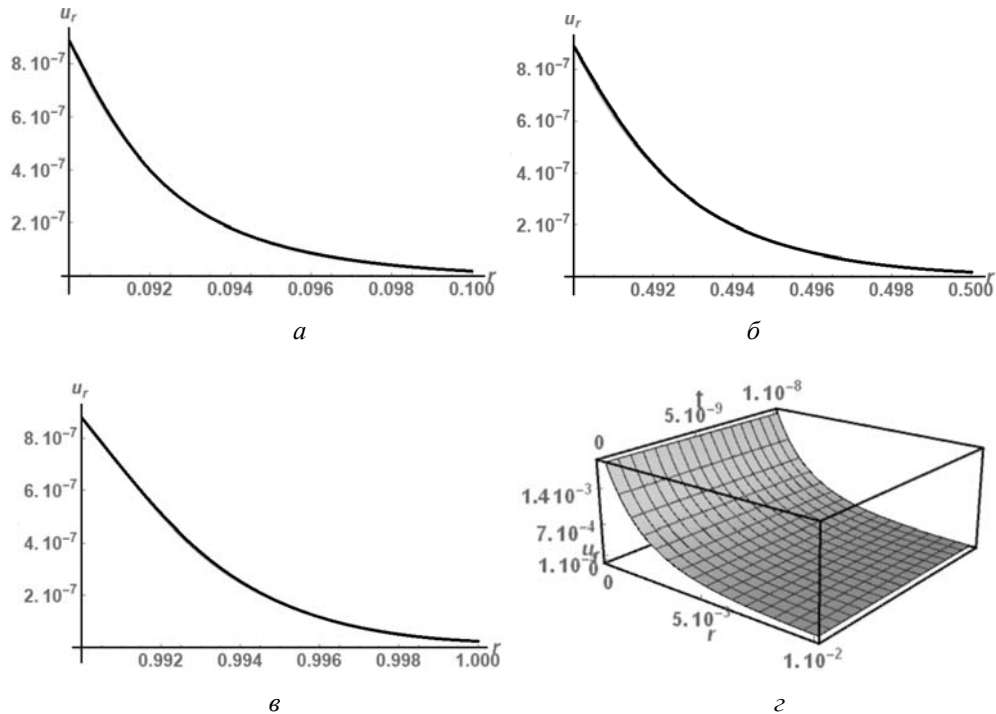


Рис. 5

Рис. 5, а – в порівнюють профілі для випадків довших відстаней поширення хвилі. Це порівняння свідчить, що для стандартного набору параметрів третє наближення вводить невеликий порівняно з другим внесок. Внесок не спостерігається наглядно, тому що вплив дуже незначний. Рис. 5, г показує тривимірне зображення еволюції в координатах «час поширення – відстань поширення – зміщення».

Таким чином, проведене числове моделювання показало, що нехарактерний початковий профіль (профіль без звичного горба) еволюціонує нехарактерно – профіль далі не має горба і стає значно крутішим, залишаючись опуклим вниз.

#### Загальні висновки.

Проаналізовано спотворення нелінійно пружної плоскої поздовжньої хвилі зміщення для нехарактерного початкового профілю хвилі у вигляді профілю Фрідляндера. На відміну від більшості нелінійних хвиль в матеріалах, які мають періодичну систему горбів чи поодинокі горби, профіль цієї хвилі не має горба, монотонно спадає і є опуклим вниз.

Основна новизна аналізу полягає в тому, що профіль Фрідляндера раніше не вивчався в рамках нелінійної теорії пружності. Показані суттєві відмінності хвилі – нехарактерний початковий профіль (профіль без звичного горба) еволюціонує у нехарактерний спосіб – профіль далі не має горба і стає значно крутішим, залишаючись опуклим вниз.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Спотворення нелінійної пружної плоскої хвилі зміщення проаналізовано теоретично та чисельно в рамках п'ятиконстантної моделі Мурнагана у випадку характерного для вибухової хвилі початкового профілю у вигляді функції Фрідляндера. На відміну від більшості нелінійних хвиль у матеріалах, які мають періодичну систему горбів чи поодинокі горби, ця хвиля не має горба, монотонно спадає і має увігнутий вниз профіль. Еволюцію хвиль вивчають наближеним методом з урахуванням перших двох наближень. Деякі суттєві відмінності саме цієї хвилі детально показані теоретично та чисельно – нехарактерний профіль еволюціонує нехарактерним чином. Показано суттєві особливості хвилі Фрідляндера – початковий профіль спотворюється нехарактерним чином – профіль стає значно (для матеріалів з м'якою нелінійністю) або менш (для матеріалів з жорсткою нелінійністю) крутішим, він все ще без горба і залишається опуклим вниз, максимальне значення профілю збільшується.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** подинокі пружна плоска хвиля, п'ятиконстантний потенціал Мурнагана, наближений метод, початкові профілі хвиль Фрідляндера, спотворення.

1. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.1. Общие вопросы, Т.2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка. – 1986. – 376 с., 536 с.
2. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 519 с.
3. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 464 с.
4. *Руцицький Я.Я.* Про наближений аналіз еволюції поздовжньої хвилі, що поширюється в пружному середовищі // Доп. НАН України. – 2019. – № 8. – С. 46 – 58.
5. *Руцицький Я.Я.* Нетипова еволюція подинокі хвилі, що поширюється в нелінійно пружному середовищі // Доп. НАН України. – 2020. – № 12. – С. 34 – 40.
6. *Руцицький Я.Я., Цурнал С.І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
7. *Alonso M., Reguera N.* Numerical detection and generation of solitary waves for a nonlinear wave equation // Wave Motion. – 2015. – **56**. – P. 137 – 146.
8. *Beli D., Arruda J.R.F., Ruzzene M.* Wave propagation in elastic metamaterial beams and plates with interconnected resonators // Int. J. Solids Struct. – 2018. – **139-140**. – P. 105 – 120.
9. *Cattani C., Rushchitsky J.* Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostructure. – Singapore – London: World Scientific, 2007. – 466 p.
10. *Chandra N., Ganpule S., Kleinschmit N.N., Feng R., Holmberg A.D., Sundaramurthy A., Selvan V., Alai A.* Evolution of blast wave profiles in simulated air blasts: experiment and computational modeling // Shock Waves. – 2012. – **22**. – P. 403 – 415.
11. *Freidlander F.G.* The diffraction of sound pulses. I. Diffraction by a semi-infinite plate // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1946. – **186**. – P. 322 – 344.
12. *Guz I.A., Rushchitskii Y.Y.* Comparison of mechanical properties and effects in micro-and nanocomposites with carbon fillers (carbon microfibers, graphite microwhiskers, and carbon nanotubes) // Mech. Comp. Mater. – 2004. – **40**, N 3. – P. 179 – 190.
13. *Guz I.A., Rushchitsky J., Guz A.N.* Modelling properties of micro- and nanocomposites with brush like reinforcement // Math. - Wiss. und Werkstofftech. – 2009. – **40**, N 3. – P. 33 – 39.
14. *Guz A.N., Rushchitsky J.* Short Introduction to Mechanics of Nanocomposites. – Rosemead (CA): Scientific and Academic Publishing, 2013. – 270 p.
15. *Ishii Y., Biwa S., Adachi T.* Second-harmonic generation of two-dimensional elastic wave propagation in an infinite layered structure with nonlinear spring-type interfaces // Wave Motion. – 2020. – **97**, N 9. – P. 102569.
16. *Kuriakose M., Skotak M., Misistia A., Kahali S., Sundaramurthy A., Chandra N.* Tailoring the Blast Exposure Conditions in the Shock Tube for Generating Pure, Primary Shock Waves: The End Plate Facilitates Elimination of Secondary Loading of the Specimen // PLoS ONE – 2016. – **11**, N 9. – e0161597.
17. *Li Z.N., Wang Y.Z., Wang Y.S.* Three-dimensional nonreciprocal transmission in a layered nonlinear elastic wave metamaterial // Int. J. Non-Linear Mech. – 2020. – 125, N 10. – P. 193531.
18. *Murnaghan F.* Finite Deformation in an Elastic Solid. 3<sup>rd</sup> ed. – Gloucester, MA, USA: Peter Smith Publisher Inc. 1985. – 140 p.
19. *Rushchitsky J.J.* Theory of waves in materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011. – 270 p.
20. *Rushchitsky J.J.* Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects // Int. J. Appl. Math. Mech. 2012. – **8**, N 6. – P. 400 – 443.
21. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.

22. *Rushchitsky J.J.* On Constraints for Displacement Gradients in Elastic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **51**, N 2. – P. 119 – 133.
23. *Rushchitsky J.J.* Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution. Chapter in the book “Understanding Plane Waves” Ed. William A. Cooper. – London: Nova Science Publishers, 2019. – 300 p. – P. 201 – 220.
24. *Rushchitsky J.J.* Foundations of Mechanics of Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 276 p.
25. *Rushchitsky J.J.* Scenarios of Evolution of Some Types of Simple Waves in Nonlinear Elastic Materials // *Archive of Appl. Mech.* – 2021. – **91**, N 7. – P. 3151 – 3170.
26. *Rushchitsky J.J., Cattani C., Sinchilo S.V.* Physical Constants for One Type of Nonlinearly Elastic Fibrous Micro- and Nanocomposites with Hard and Soft Nonlinearities // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 12. – P. 1368 – 1377.
27. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* One Approximate Method for Analyzing Solitary Waves in Nonlinearly Elastic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 3. – P. 282 – 290.
28. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Numerical Analysis of the Evolution of Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 1. – P. 104 – 110.
29. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1 // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 5. – P. 581 – 589.
30. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 2 // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 6. – P. 666 – 673.
31. *Structural and Residual Stress Analysis.* Ed. V. Hauk. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1997 (e-variant 2006). – 640 p.
32. *Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J.* Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // *Int. App. Mech.* – 2017. – **53**, N 1. – P. 104 – 110.

Надійшла 16.06.2021

Затверджена до друку 31.05.2022