

П.З.Луговий¹, В.В.Гайдайчук², С.П.Орленко¹,
К.Е.Котенко²

ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК З ДИСКРЕТНО
НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ
НАВАНТАЖЕННЯХ

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
Київ, Україна; e-mail: plugovyy@inmtech.kiev.ua

²Київський національний університет будівництва і архітектури,
Київ, Україна; e-mail: viktor_gaydaychuk@ukr.net

Abstract. The dynamics of three-layer conical shells under non-stationary loads is investigated. The motion equations of three-layer conical shells with a discrete-symmetric lightweight, rib-reinforced filler are obtained for the case axisymmetric impulse loading. In the analysis of the elastic structure elements, the model of the Timoshenko shells theory and rods was used under independent static and kinematic hypotheses for each layer. In asymmetric shells, the bearing layers are made of different materials. The motion equations of a three-layer asymmetric conical shell with a discrete-inhomogeneous aggregate are derived according to the Hamilton-Ostrogradsky variational principle. The numerical results on the nature of the three-layer elastic structure oscillations are obtained by the finite element method. The influence of physical and mechanical parameters of symmetric and asymmetric shell layers on the stress-strain state under axisymmetric internal impulse loading is investigated.

Keywords: dynamics, three-layer symmetric, asymmetric conical shells, discrete-symmetric lightweight aggregate, reinforcing ribs, non-stationary loads, stress-strain state, mechanical effects.

Вступ.

Шаруваті конічні оболонки широко застосовуються в авіа-, ракето-, суднобудуванні та багатьох інших галузях техніки та будівництва. Вимоги щодо міцності і ваги до сучасних конструкцій постійно підвищуються, а умови експлуатації виробу стають все більш жорсткими. Необхідність одночасного виконання цілого ряду часом суперечливих вимог призводить до ідеї розробки багатошарових конструкцій, в яких кожен шар виконує тільки одну або краще кілька функцій. При цьому шари можуть відрізнятися як за товщиною, так і за фізико-механічними властивостями, тобто пакет може бути істотно неоднорідним. В даній роботі розглядаються тришарові конічні симетричні і несиметричні оболонки обертання з врахуванням неоднорідного легкого заповнювача, армованого дискретно-симетричними ребрами, які розташовані по лініях головних кривизн і з'єднують несучі шари, при вимушених динамічних навантаженнях. При цьому розміри ребер значно менші, ніж відстані між ними. Використання в заповнювачі матеріалів з низькими масовими характеристиками дозволяє при порівняно невеликому збільшенні ваги конструкції істотно підвищити її жорсткість на згин; в такому випадку доцільно застосовувати теорію шаруватих оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів [12]. Це підвищує загальний порядок системи рівнянь, але дозволяє детальніше вивчити динамічну поведінку тришарової структури при вимушених динамічних навантаженнях. Одною з перших робіт щодо динаміки тришарових конічних оболонок з дискретно-неоднорідним заповнювачем

була робота [8]. Дослідження динаміки тришарових конічних оболонок з дискретно-неоднорідним заповнювачем при нестационарних навантаженнях започатковано в роботах [6, 9, 10]. Визначення характеру коливань тришарових циліндричних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем проведено в [3, 7, 11, 19, 21 – 23].

В основу розв'язування задачі покладена теорія оболонок і стержнів, заснована на зсувній моделі Тимошенка. Для виведення рівнянь коливань тришарової неоднорідної за товщиною структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського. Чисельне моделювання динаміки тришарових конічних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем проведено скінченно-елементним методом. Наведено числові результати розв'язку конкретних задач і виявлені нові механічні ефекти.

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Дискретно-симетрична неоднорідна за товщиною пружна структура конічного типу являє собою систему, що складається з внутрішньої і зовнішньої гладких конічних оболонок (внутрішній і зовнішній несучий шар) з відповідними товщинами і радіусами. Припустимо, що серединні лінії цих оболонок паралельні, тобто кут конусності α є однаковим. Тришарова конічна оболонка з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішнього (індекс 1), зовнішнього (індекс 2) несучих шарів, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з зазначеними несучими шарами. Оболонка має постійну загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі координат s, z . Координатна лінія s на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ збігається з твірною лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Будемо вважати величину z позитивною, якщо точка знаходиться з боку опуклості серединної поверхні. При розгляді осесиметричних коливань конічних оболонок звичайно використовується система координат s, t , причому координата s відраховується від вершини конуса. У випадку зрізаної конічної оболонки, більш зручним є використання координати s , яка відраховується від краю оболонки з радіусом R_0 . В такому випадку поточний радіус конічної оболонки вираховується згідно формули: $R_s = R_0 + s \cdot \sin \alpha$, де α – кут конусності. Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні конічної оболонки записуються наступним чином: $A_1 = 1$; $A_2 = R_s$; $k_1 = 0$; $k_2 = \cos \alpha / R_s$. Оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами і легким заповнювачем. Вид деформованого стану внутрішнього і зовнішнього несучих шарів може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\bar{U}_1 = (u_s^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_s^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$ [14]. Поля переміщень для легкого ребристого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщення $\bar{U}_t = (u_s^t, u_3^t, \varphi_1^t)^T$ згідно моделі, запропонованої в [15]. Деформований стан армуючого ребра, спрямованого вздовж колової координати, визначатимемо узагальненим вектором переміщень $\bar{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$.

На основі теорії деформації зсуву в оболонках [14], переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах в напрямку s (поздовжній), z (товщина) і t (час) при малих лінійних переміщеннях виражаються через наступні залежності:

$$\begin{aligned} u_1^i(s, z, t) &= u_0^i(s, t) + z_i \varphi_1^i(s, t); \\ u_3^i(s, z, t) &= u_{03}^i(s, t) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \tag{1.1}$$

де φ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

При цьому деформаційні співвідношення для несучих шарів і j -го ребра приймаються у вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s_1} u_1 + k_2 u_3; \\ \varepsilon_{13} &= \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}; \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}; \quad \kappa_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s_1} \varphi_1; \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Виходячи з припущень жорсткого з'єднання армуючих ребер з кінчними несучими шарами, записуються умови контакту центрів ваги ребер з несучими шарами [17]

$$u_1^j = u_1^{jk}(s_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(s_j); \quad u_3^j = u_3^{jk}(s_j); \quad \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(s_j) \quad (k = 1, 2), \quad (1.3)$$

де s_j – координата лінії множин точок проєкцій центрів тяжіння поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучого шару; h_i ($i = 1, 2$) – товщини сферичних несущих шарів; $H_j/2$ – відстань від осі j -го ребра до поверхні гладких оболонок; товщина легкого заповнювача $h_i = H_j$.

Вирази для переміщень легкого заповнювача записуються згідно моделі [15]:

$$\begin{aligned}u_1^t(s, z, t) &= \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(s, t) + z_t u_1^t(s, t); \\ u_3^t(s, z, t) &= u_0^t(s, t).\end{aligned}\quad (1.4)$$

Кінематичні залежності для легкого заповнювача прийняті на основі малих деформацій:

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{\partial u_0^t}{\partial s} + z \frac{\partial u_1^t}{\partial s}; \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_{03}^t}{R_{st} + z_t}; \quad 2\varepsilon_{13}^t = \frac{\partial u_{03}^t}{\partial s} + u_1^t; \quad \kappa_{11}^t = \frac{\partial u_1^t}{\partial s}. \quad (1.5)$$

Умови сумісності, які передбачають ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування, представлені в наступному вигляді [16]:

$$u_1^t(z = z_t^1) = u_0^t + \frac{1}{2}(-1)^k h_i \varphi_1^i; \quad u_{03}^t = u_{03}^t; \quad \begin{cases} \text{для } i = 1 \rightarrow \left(k = 0; z_t^1 = -\frac{h_i}{2}\right); \\ \text{для } i = 2 \rightarrow \left(k = 1; z_t^2 = \frac{h_i}{2}\right). \end{cases} \quad (1.6)$$

Використовуючи вирази для поля переміщень для несучих шарів (1.2), легкого заповнювача (1.4) і умов міжшарової неперервності переміщень (1.6), виведемо спрощені умови сумісності:

$$\begin{aligned}u_0^t &= \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2 \varphi_1^2 - h_1 \varphi_1^1); \quad u_1^t = \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2 \varphi_1^2 + h_1 \varphi_1^1); \\ u_{03}^t &= \frac{1}{2}(u_{03}^1 + u_{03}^2).\end{aligned}\quad (1.7)$$

Рівняння руху для несучих шарів і легкого заповнювача виводяться згідно варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського, згідно з яким

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (1.8)$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу.

При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер і заповнювача з легкого матеріалу.

Вирази для варіацій повної потенціальної і кінетичної енергії вказаних компонентів записуються у вигляді:

$$\delta\Pi = \delta\sum_{i=1}^2\Pi^i + \delta\sum_{j=1}^J\Pi^j + \delta\sum_{S_i}\Pi^i; \quad \delta K = \delta\sum_{i=1}^2K^i + \delta\sum_{j=1}^JK^j + \delta\sum_{S_i}K^i; \quad (1.9)$$

де

$$\delta\Pi^i = \int_{S_i} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (T_{11}^i \delta\varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta\varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta\varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta\kappa_{11}^i + M_{22}^i \delta\kappa_{22}^i) dz_i \right] dS_i; \quad (1.10)$$

$$\delta\Pi^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (T_{11}^t \delta\varepsilon_{11}^t + T_{13}^t \delta\varepsilon_{13}^t + M_{11}^t \delta\kappa_{11}^t) dz_t \right] dS_i; \quad (1.11)$$

$$\delta\Pi^j = \int_{L_j} (T_{11j} \delta\varepsilon_{11j} + T_{13j} \delta\varepsilon_{13j} + M_{11j} \delta\kappa_{11j}) dL_j; \quad (1.12)$$

$$\delta K^i = \int_{S_i} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_0^i}{\partial t^2} \delta u_0^i + \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2} \delta u_{03}^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \delta \varphi_1^i \right) \right] dz_i \right\} dS_i; \quad (1.13)$$

$$\delta K^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2} \delta u_0^t + \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2} \delta u_1^t + \frac{h_i^2}{12} \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2} \delta u_{03}^t \right) dz_t \right] dS_i; \quad (1.14)$$

$$\delta K^j = \int_{L_j} \left[\rho_j F^j \left(\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial t^2} \delta u_1^j + \frac{\partial^2 u_3^j}{\partial t^2} \delta u_3^j \right) + \rho_j \left(I_{kr}^j \frac{\partial^2 \varphi_1^j}{\partial t^2} \delta \varphi_1^j \right) \right] dL_j. \quad (1.15)$$

В рівняннях (1.10) – (1.15) величини F^j , I_{kr}^j відповідають геометричним характеристикам поперечних перетинів армуючих ребер; ρ_j – питома вага матеріалу армуючого ребра; ρ_i ($i = 1, 2$), ρ_t – питома вага матеріалів несучих шарів і легкого заповнювача, відповідно.

Вважається, що тришарова конічна структура навантажена внутрішнім осесиметричним розподіленням нестационарним нормальним навантаженням $P_1(s, t)$, де s і t – просторова і часова координати.

Слід зазначити, що при розрахунку потенціальної і кінетичної енергії для легкого заповнювача в виразах $\delta\Pi^t$ та δK^t інтегрування проводиться за об'ємом, величина якого збільшена на величину обсягу армуючих ребер. Але цей факт практично не впливає на загальну похибку теорії оболонок, оскільки обсяг армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для тришарових оболонок обертання менше 5%.

При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванні підлягають: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер і заповнювача з легкого матеріалу.

Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянні (1.8), з урахуванням співвідношень (1.9) – (1.15), отримуємо систему гіперболічних рівнянь руху 9-го порядку для тришарової несиметричної конічної оболонки з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами при осесиметричному імпульсному навантаженні і граничні умови:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i T_{11}^i) - \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i T_{22}^i) - \frac{1}{R_t} T_{13}^t &= \left(\rho_i h_i + \frac{\rho_t h_t}{3} \right) \frac{\partial^2 u_0^i}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i M_{11}^i) - \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i M_{22}^i) - T_{13}^i - T_{13}^t &= \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i T_{13}^i) - k_2 T_{22}^i + \frac{1}{h_t} T_{13}^t - \left(1 \pm \frac{h_i}{2R_{1s}} \right) P_1 &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} + \frac{1}{R_t} N_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T_{13}^t}{\partial x} = \rho_t h_t \frac{\partial^2 w_0^t}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} - T_{13}^t = \rho_t \frac{h_t^3}{12} \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2}; \\ [T_{11}^{i\pm}]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad [T_{13}^{i\pm}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad [M_{11}^{i\pm}]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Це дві системи рівнянь дев'ятого порядку. На лініях розривів в рівняннях коливань (1.16) $[T_{11}^{i\pm}]_j$; $[T_{13}^{i\pm}]_j$; $[M_{11}^{i\pm}]_j$ – відповідають зусиллям-моментам, які діють на j -й дискретний елемент з боку несучих шарів.

Окрім цього, для несиметричних тришарових оболонок система рівнянь (1.16) розпадається не лише за рахунок розривів «дискретний елемент – несучий шар», а через те, що несучі шари виготовлені з різних матеріалів.

Співвідношення між величинами зусиль – моментів та відповідними величинами деформацій для несучих шарів і армуючих ребер мають вигляд:

$$\begin{aligned} T_{11}^i &= B_{11}^i (\varepsilon_{11}^i + \nu_2^i \varepsilon_{22}^i); \quad T_{22}^i = B_{22}^i (\varepsilon_{22}^i + \nu_1^i \varepsilon_{11}^i); \quad T_{13}^i = k^2 G_{13}^i \varepsilon_{13}^i; \\ M_{11}^i &= D_{11}^i \kappa_{11}^i; \quad M_{22}^i = D_{22}^i \kappa_{22}^i; \quad T_{22j} = B_{22j} \varepsilon_{22j}; \end{aligned} \quad (1.17)$$

E_i, G_{13}^i, ν_i – фізико-механічні параметри матеріалу несучих шарів; k^2 – інтегральний коефіцієнт поперечного зсуву теорії оболонок Тимошенка; E_j, F_j – модуль пружності матеріалу і площа поперечного перетину j -го ребра, відповідно.

Зусилля і моменти для легкого заповнювача представимо в такому вигляді:

$$T_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma'_{11} dz_t; \quad M_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma'_{11} dz_t; \quad T_{13}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) \sigma'_{13} dz_t. \quad (1.18)$$

Рівняння коливань (1.16) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

§2. Числові результати.

Розглянута задача динамічного деформування тришарової конічної оболонки з жорстко защемленими торцями під дією внутрішнього розподіленого навантаження $P_1(s, t)$.

Граничні умови при $s = s_0, s = s_N$ для несучих шарів мають вигляд:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (2.1)$$

початкові умови нульові для несучих шарів при $t = 0$:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0; \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (2.2)$$

Нестационарне імпульсне навантаження задавалося у вигляді

$$P_3 = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)], \quad (2.3)$$

де $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

В розрахунках покладалося $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Розрахунки проводились при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах тришарової структури:

$E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $\nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,3$; $R_0 = 0,3$ м; $R_0 / h_1 = 30$; $h_1 = h_2 = h_j = 0,01$ м; $H_j = 2h_1$; $\alpha = \pi/12 = 15^\circ$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м². Легкий заповнювач відсутній.

Розглянуті також випадки наявності легкого заповнювача з відповідними властивостями $E_{1,2}/E_t = 50$ і $E_{1,2}/E_t = 500$; $\rho_t = 25$ кг/м³; $\nu_t = 0,33$.

Дискретні підкріплюючі елементи розташовані в точках $s_j = [6 + (k-1)16]\Delta s$; $k = \overline{1, 5}$; $\Delta s = (s_N - s_0)/80$; $(s_N - s_0) = 0,39$ м.

Відповідна початково-крайова задача (1.16), (2.1) – (2.3) вирішується за допомогою скінченно-елементного методу. Створена скінченно-елементна модель оболонки відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в тілі з потенціалом прикладених сил:

$$\Pi = E - W, \quad (2.4)$$

де E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал прикладених сил.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (2.4) приймає вигляд:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (2.5)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.6)$$

відповідають співвідношенням:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}. \quad (2.7)$$

Досліджено динамічний напружено-деформований стан симетричної тришарової конічної оболонки. У моделях використаний тривимірний об'ємний скінченний елемент, який гарантує точність і достовірність отриманих результатів [13].

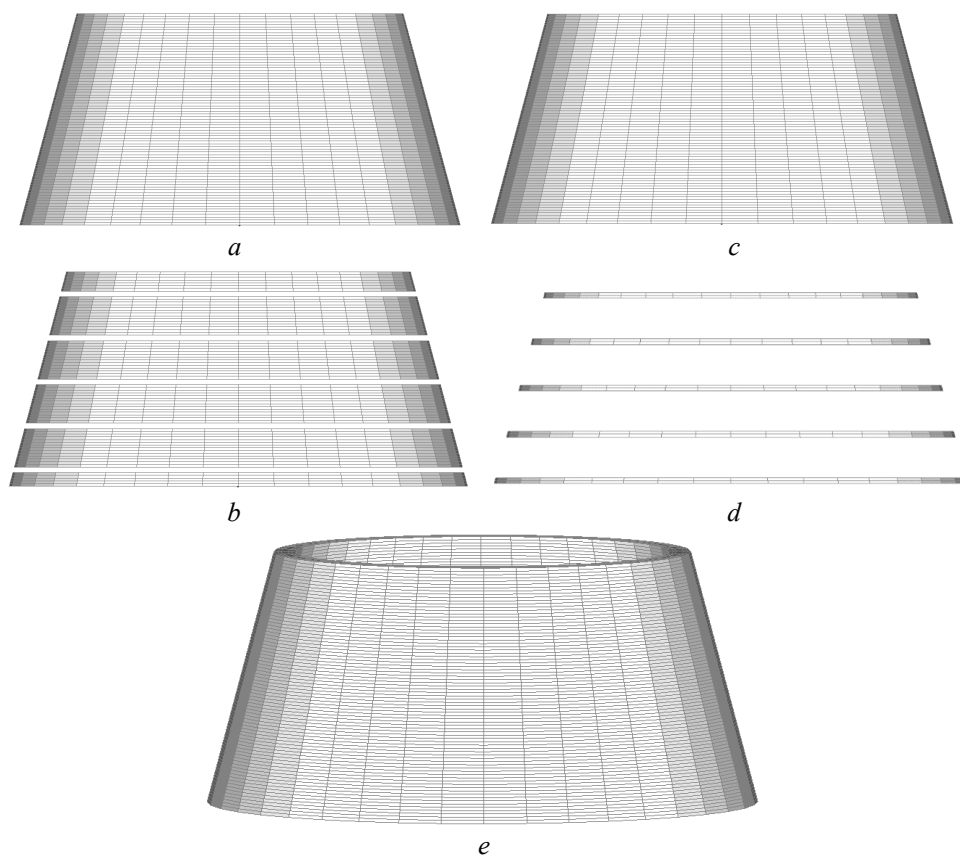


Рис. 1

На рис. 1. наведено скінченно-елементну модель тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем і її складові: *a* – зовнішня несуча оболонка; *b* – внутрішня несуча оболонка; *c* – легкий заповнювач; *d* – армуючі ребра; *e* – тришарова оболонка з заповнювачем. Скінченно-елементна модель з довжиною твірної 0,39 м і кутом конус-ності 15° налічувала 15600 об'ємних скінченних елементів і 18960 вузлів.

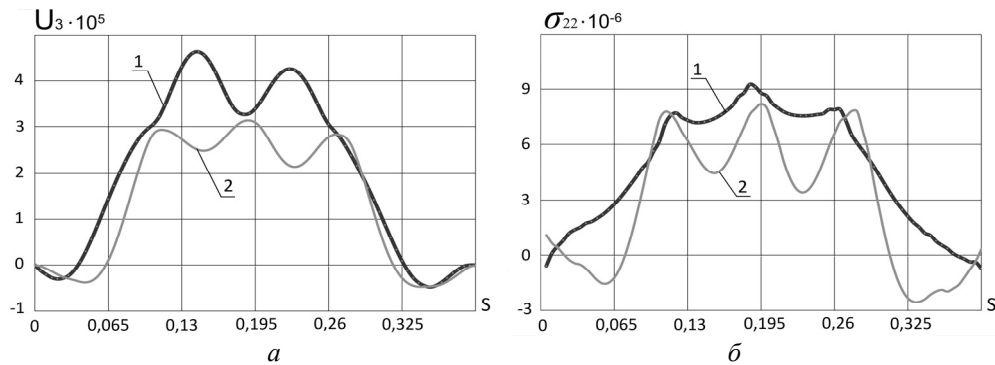


Рис. 2

Отримані скінченно-елементним методом чисельні результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану тришарової пружної структури конічного типу в будь-який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \leq t \leq 40T$). Зокрема, на рис. 2, *a* в приведеному масштабі наведено залежності величин нормальних прогинів u_3 серединних поверхонь несучих шарів просторової координати s . Тут і в подальших графіках крива з індексом 1 відповідає величині u_3^1 внутрішньої конічної оболонки, а з індексом 2 – величині u_3^2 зовнішньої конічної оболонки в момент часу $t = 3,15T$ (час досягнення максимального значення величин u_3). Легкий заповнювач відсутній. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу, можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин u_3 за просторовою координатою s . Перша власна частота даної тришарової структури складає 1602 Гц.

Отримані результати добре узгоджуються з результатами, які наведено в роботі [17].

Окрім цього, для верифікації обчислювальної програми в розрахунках було прийнято $\alpha = 0, s = x$. При цьому отримано рівняння для циліндра радіусом R_0 і довжиною $L = S_N = 0,39$ м. Динамічні процеси досліджувалися в проміжку часу $0 \leq t \leq 40T$. На рис. 3 наведено графіки залежності нормальних прогинів для несучих шарів u_3^1 і u_3^2 циліндричної оболонки від поздовжньої координати x в момент часу $t = 3,15T$ (час досягнення максимального значення величин u_3). З графіка на рис. 3 видно, що прогини u_3 для тришарової циліндричної оболонки симетричні відносно центрального перетину оболонки, що також є побічним підтвердженням достовірності результатів, отриманих для тришарової конічної оболонки скінченно-елементним методом. Ці результати також добре узгоджуються з результатами роботи [18], які отримано за допомогою методу скінченних різниць. Перша власна частота даної циліндричної тришарової структури становить 1533 Гц.

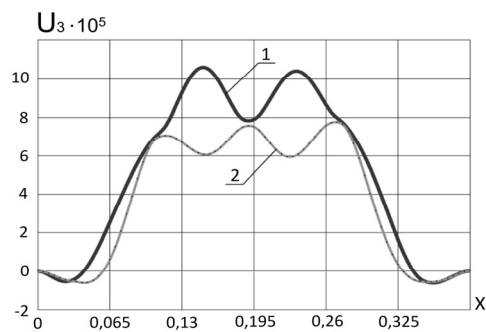


Рис. 3

На рис. 2, б в приведенному масштабі наведено залежності величин нормальних напружень σ_{22} від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці. Тут 1 в подальших графіках крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішньої конічної оболонки, а з індексом 2 – величині σ_{22}^2 зовнішньої конічної оболонки в момент часу $t = 3,15 T$ (час досягнення максимального значення величин σ_{22}). Легкий заповнювач відсутній. Перша власна частота даної тришарової структури становить 1602 Гц.

Дослідимо вплив легкого заповнювача, який розташований між несучими шарами і дискретно-симетричними ребрами тришарової конічної структури. Фізико-механічні властивості легкого заповнювача (пінопласт) наступні: $E_{1,2}/E_t = 50$; $E_{1,2}/E_t = 500$; $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$; $\nu_t = 0,33$.

На рис. 4, а в приведенному масштабі наведено графіки залежності нормальних прогинів для несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від поздовжньої координати s в момент часу $t = 2,25 T$ (час досягнення максимального значення величин u_3). Відношення модуль пружності несучих шарів до легкого заповнювача $E_{1,2}/E_t = 50$. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 за просторовою координатою s . Перша власна частота даної тришарової структури становить 1774 Гц.

На рис. 4, б в приведенному масштабі наведено залежності величин нормальних напружень σ_{22}^1 і σ_{22}^2 серединних поверхонь несучих шарів від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці в момент часу $t = 2,25 T$ (час досягнення максимального значення величин σ_{22}). $E_{1,2}/E_t = 50$. Перша власна частота даної тришарової структури становить 1774 Гц.

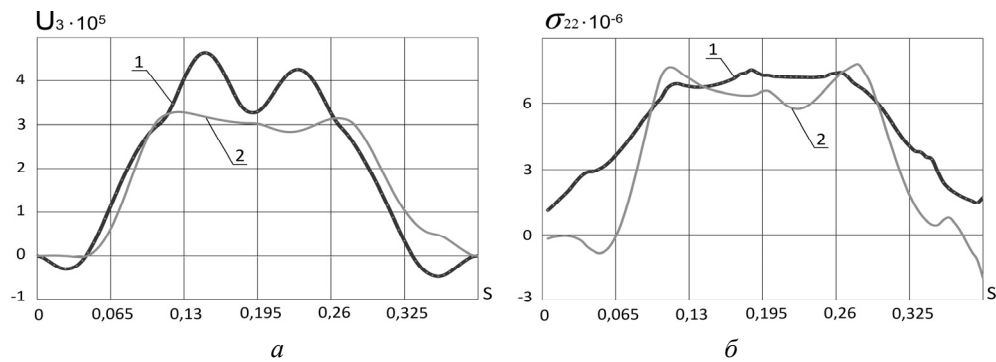


Рис. 4

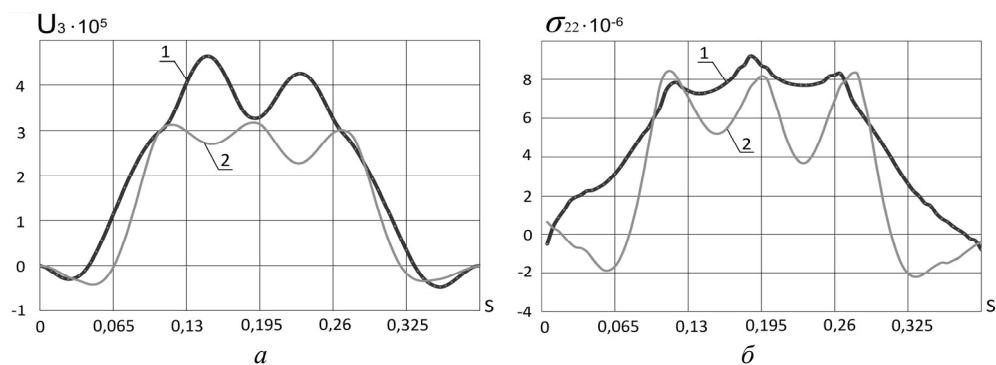


Рис. 5

На рис. 5, *a* в приведенному масштабі наведено графіки залежності нормальних прогинів для серединних поверхонь несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від поздовжньої координати s в момент часу $t = 3,0 T$ (час досягнення максимального значення величин u_3). Відношення модулів пружності несучих шарів до легкого заповнювача $E_{1,2}/E_t = 500$. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 за просторовою координатою. Перша власна частота даної тришарової структури становить 1620 Гц.

На рис. 5, *б* в приведенному масштабі наведено залежності величин нормальних напружень σ_{22}^1 і σ_{22}^2 серединних поверхонь несучих шарів від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці в момент часу $t = 3,0 T$ (час досягнення максимального значення величин σ_{22}). $E_{1,2}/E_t = 500$. Перша власна частота даної тришарової структури становить 1620 Гц.

Нижче проведені дослідження впливу кута конусності $\alpha = \pi/6 = 30^\circ$ на динамічну поведінку симетричних тришарових конічних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем. Всі інші розміри і фізико-механічні параметри і характер навантаження залишаються незмінними.

Скінченно-елементна модель тришарової конічної оболонки з довжиною твірної 0,39 м і кутом конусності 30° налічувала 33696 об'ємних скінченних елементів і 39816 вузлів. У моделях використаний тривимірний об'ємний скінченний елемент, який гарантує точність і достовірність отриманих результатів [15]. Отримані скінченно-елементним методом чисельні результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану тришарової пружної структури конічного типу в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \leq t \leq 40 T$).

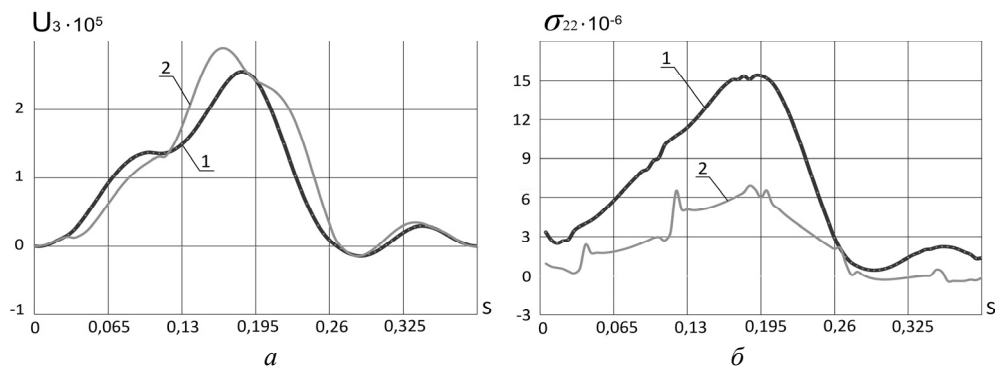


Рис. 6

На рис. 6, *a* в приведенному масштабі наведено залежності величин нормальних прогинів u_3 серединних поверхонь несучих шарів від просторової координати s . Тут і в подальших графіках використані позначення такі, як і для оболонки з кутом конусності 15° . Час досягнення максимального значення величин u_3 : $t = 6,95 T$. Легкий заповнювач відсутній. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 за просторовою координатою s . Перша власна частота даної тришарової структури становить 1514 Гц.

На рис. 6, *б* в приведенному масштабі наведено залежності величин максимальних нормальних напружень σ_{22}^1 і σ_{22}^2 серединних поверхонь несучих шарів від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці в момент часу $t = 6,95 T$ (час досяг-

нення максимального значення величин σ_{22}), без легкого заповнювача. Перша власна частота даної тришарової структури становить 1514 Гц.

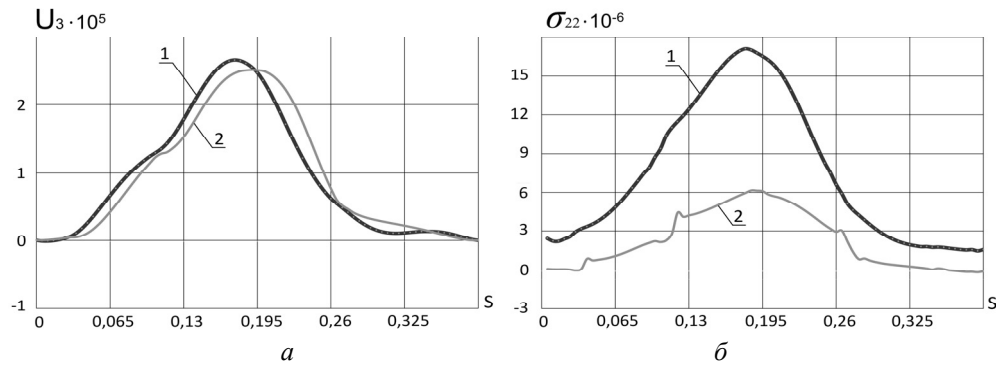


Рис. 7

Графіки на рис. 7, а в приведеному масштабі відображають залежність максимальних величин нормальних прогинів u_3 серединних поверхонь несучих шарів від просторової координати s при $t = 6,45 T$. Властивість легкого заповнювача визначається відношенням $E_{1,2}/E_t = 50$. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 в симетричній конічній оболонці за просторовою координатою s . Перша власна частота даної тришарової структури становить 1655 Гц.

Графіки на рис. 7, б в приведеному масштабі відображають залежність максимальних нормальних напружень σ_{22} серединних поверхонь несучих шарів від просторової координати s при $t = 6,45 T$. Властивість легкого заповнювача визначається відношенням $E_{1,2}/E_t = 50$. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин σ_{22} за просторовою координатою s . Перша власна частота даної тришарової структури становить 1655 Гц.

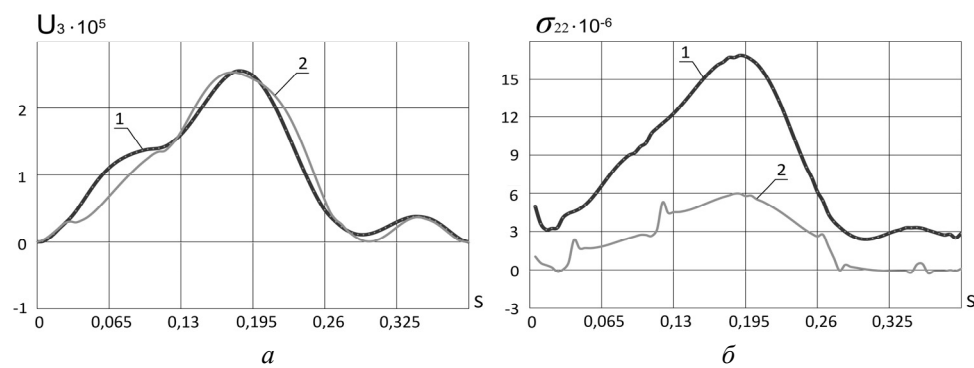


Рис. 8

На рис. 8, а в приведеному масштабі наведено залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3 серединних поверхонь несучих шарів від просторової координати s при $t = 6,60 T$. Властивість легкого заповнювача визначається відношенням $E_{1,2}/E_t = 500$. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити

вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин u_3 за просторовою координатою s . Перша власна частота даної тришарової структури становить 1532 Гц.

Графіки на рис. 8, б введеному масштабі відображають залежність максимальних нормальних напружень σ_{22} серединних поверхонь несучих шарів від просторової координати s при $t = 6,60 T$. Властивість легкого заповнювача визначається відношенням $E_{1,2}/E_t = 500$. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин σ_{22} за просторовою координатою s . Перша власна частота даної тришарової структури становить 1532 Гц.

§3. Нестационарні вимушені коливання несиметричних тришарових конічних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем.

Дослідженню динаміки і статички шаруватих оболонок присвячено багато робіт, зокрема [1, 2, 4, 5, 20 – 22], в яких аналітичними і наближеними методами розв'язана велика кількість фундаментальних задач. Вивченню характеру коливань несиметричних тришарових оболонок з легким заповнювачем присвячена робота [13]. Дослідимо з допомогою методу скінченних елементів нестационарні вимушені коливання несиметричних тришарових конічних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем, несучі шари в яких виготовлені з різних матеріалів. Відповідні рівняння коливань мають вигляд (1.16), які розпадаються не тільки за рахунок розривних коефіцієнтів в останніх трьох рівняннях, а і за наявності виготовлення несучих шарів з різних матеріалів. Скінченно-елементна модель з довжиною твірної 0,39 м і кутом конусності 15° налічувала 15600 об'ємних скінченних елементів і 18960 вузлів (рис. 1).

Розрахунки проводились при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах тришарової структури:

$$E_1^1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \rho_1^1 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_2^1 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \\ R_0 = 0,3 \text{ м}; \quad R_0/h_1 = 30; \quad h_1 = h_2 = h_j = 0,01 \text{ м}; \quad H_j = 2h_1; \quad \alpha = \pi/12 = 15^\circ; \quad F_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Нестационарне імпульсне навантаження задавалося у вигляді (2.3).

Наведені параметри конічної структури показують, що внутрішній несучий шар виготовлений зі сталі, а зовнішній – зі сплаву АМГ-6, товщина пінопластового шару буде 0,02 м. Відношення модулів несучих шарів і легкого заповнювача $(E_1 + E_2)/2E_t = 50$.

Дискретні підкріплюючі елементи розташовані в точках $s_j = [6 + (k-1)16]\Delta s$; $k = \overline{1,5}$; $\Delta s = (s_N - s_0)/80$; $(s_N - s_0) = 0,39 \text{ м}$.

Отримані числові результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану несиметричної тришарової пружної структури конічного типу в будь-який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \leq t \leq 40 T$). Зокрема, на рис. 9, а введеному масштабі наведено залежності величин нормальних прогинів серединних поверхонь несучих шарів u_3 від просторової координати s оболонки в момент часу $t = 3,1 T$ (час досягнення максимального значення величин u_3). Легкий заповнювач відсутній. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин u_3 за просторовою координатою. Перша власна частота конічної структури становить 1559 Гц.

На рис. 9, б введеному масштабі наведені залежності величин нормальних напружень σ_{22} в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати s оболонки в момент часу $t = 3,1 T$ (час досягнення максимального значення величин σ_{22}). Перша власна частота конічної структури становить 1559 Гц. Легкий заповню-

вач відсутній. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин σ_{22} за просторовою координатою.

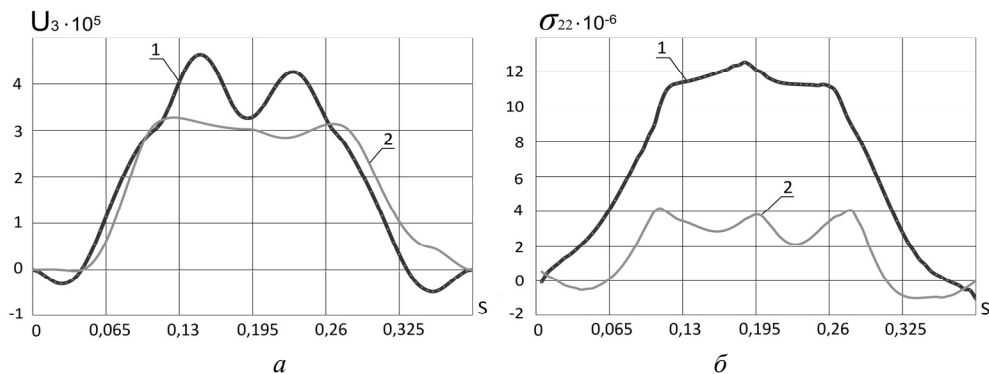


Рис. 9

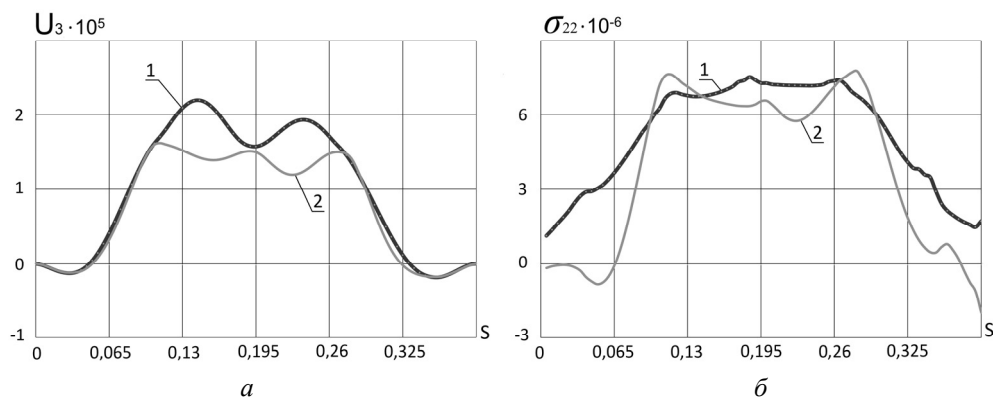


Рис. 10

На рис. 10, а в приведеному масштабі наведено залежності величин нормальних прогинів серединних поверхонь несучих шарів u_3 від просторової координати s конічної оболонки в момент часу $t = 2,45 T$ (час досягнення максимального значення величин u_3). Відношення модулів пружності матеріалів несучих шарів до модулів пружності легкого заповнювача наступне $(E_1 + E_2)/2E_t = 50$. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин u_3 за просторовою координатою. Перша власна частота конічної структури становить 1746 Гц.

На рис. 10, б в приведеному масштабі наведено залежності величин нормальних напружень σ_{22} в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати s конічної оболонки в момент часу $t = 2,45 T$ (час досягнення максимального значення величин σ_{22}). Відношення модулів пружності матеріалів несучих шарів до модулів пружності легкого заповнювача наступне: $(E_1 + E_2)/2E_t = 50$. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин σ_{22} за просторовою координатою. Перша власна частота конічної структури становить 1746 Гц.

Висновки.

Для тришарових конічних оболонок застосовані незалежні статичні і кінематичні гіпотези Тимошенка для кожного шару. Це збільшило порядок системи розв'язувальних рівнянь коливань тришарових структур з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем, але дало можливість більш детально дослідити динамічні процеси в таких оболонках. З проведених розрахунків методом скінченних елементів випливає, що геометричні і фізико-механічні параметри шарів оболонки значно впливають на кількісні і якісні характеристики коливань в тришарових конічних оболонках. В симетричній конічній оболонці без пінопласту при збільшенні кута конусності на 15° прогини u_3^1 зменшуються на 74%, а колові напруження збільшуються на 64%, перша власна частота зменшилась на 6%. Це свідчить про те, що основний вклад в напружений стан конічної оболонки з більшим кутом конусності вносять напруження згину, а розгойдування оболонки йде повільніше. Для симетричної конічної оболонки з кутом конусності 15° і внутрішнім шаром з пінопласту $E_{1,2}/E_t = 50$ перша власна частота збільшилася на 11%, а для несиметричної конічної структури з пінопластом $E_{1,2}/E_t = 50$ перша власна частота збільшилася на 14%. В несиметричних тришарових конічних оболонках спостерігається зменшення перших власних частот за рахунок збільшення ваги оболонок при виготовленні внутрішніх несучих шарів зі сталі.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено динаміку тришарових конічних оболонок при нестационарних навантаженнях. Отримано рівняння руху тришарових конічних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при осесиметричному імпульсному навантаженні. При аналізі елементів пружної структури використано модель теорії оболонок і стержнів Тимошенка за незалежних статичних і кінематичних гіпотез для кожного шару. В несиметричних оболонках несучі шари виготовлені з різних матеріалів. Виведено рівняння руху тришарової несиметричної конічної оболонки з дискретно-неоднорідним заповнювачем згідно з варіаційним принципом Гамільтона – Остроградського. Числові результати щодо характеру коливань тришарової пружної конструкції отримано методом скінченних елементів. Досліджено вплив фізико-механічних параметрів симетричних і несиметричних шарів оболонки на напружено-деформований стан при осесиметричному внутрішньому імпульсному навантаженні. Виявлені нові механічні ефекти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динаміка, тришарова симетрична, несиметрична конічна оболонка, дискретно-симетричний легкий заповнювач, армуючі ребра, нестационарне навантаження, напружено-деформований стан, механічні ефекти.

1. Бабаев А.Э., Кубенко В.Д. Нестационарная аэроупругость слоистых оболочек. В кн. Механика композитов. (под. ред. А.Н. Гузя): в 12-и томах. Т. 9. Динамика элементов конструкций. – Киев: А.С.К., 1999. – С. 247 – 261.
2. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 288 с.
3. Смельянова Т.А. Розв'язуюче рівняння вільних коливань тришарової циліндричної оболонки, яка підкріплена ребрами жорсткості // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту. – 2016. – 2, № 57. – С. 11 – 16.
4. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Численное моделирование динамического поведения и расчет на прочность многослойных оболочек при импульсном нагружении // Пробл. прочности. – 2000. – № 4. – С. 86 – 96.
5. Луговой П.З., Скосаренко Ю.В., Орленко С.П. Применение метода сплайн – коллокации для решения задач статики и динамики конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек // Доп. НАН України. – 2019. – № 8. – С. 25 – 33.
6. Луговой П.З., Орленко С.П. К постановке и решению динамических задач теории трехслойных конических оболочек с дискретным ребристым наполнителем // XVII міжн. наук. – техн. конф.

- «Удосконалювання енергоустановок методами математичного та фізичного моделювання». – 7 – 11 жовтня 2019 р., Харків, Україна. 2019. – С. 14.
7. *Луговий П.З., Шугайло О.П., Орленко С.П., Демєнков В.М.* Коливання теплоізоляційних тришарових циліндричних труб при експлуатаційних навантаженнях // Ядерная и радиационная безопасность. – Киев: ГНТЦ ЯРБ. – 2020. – № 3. – С. 55 – 61.
 8. *Мейш В.Ф., Штанцель С.Е.* Розрахунок нестационарних вимушених коливань тришарових конічних оболонок з неоднорідним заповнювачем // Збірник наук. праць Національного транспортного ун-ту «Системні методи керування, технологія та організація виробництва, ремонту і експлуатації автомобілів». – 2001. – 12. – С. 417 – 420.
 9. *Орленко С.П.* Динаміка тришарових конічних оболонок з підкріпленням та масами // 10 Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур». – Львів. – 2019. – С. 72 – 73.
 10. *Орленко С.П.* Чисельне моделювання коливань тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним неоднорідним заповнювачем // Доп. НАН України. – 2020. – № 8. – С. 35 – 42.
 11. *Орленко С.П.* Вплив несиметрії тришарових циліндричних оболонок з легким заповнювачем на їх напружено-деформований стан при нестационарних навантаженнях // Пробл. обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – № 31. – С. 42 – 52.
 12. *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек. В кн. Успехи механики (под редакцией А.Н. Гузя): в 6-ти томах. Т.3. – Киев: А.С.К., 2007. – С. 141 – 175.
 13. *Рычков С. П.* Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. – Москва: ДМК Пресс, 2013. – 784 с.
 14. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
 15. *Frostig Y., Thomsen O.T.* Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. Solids Struct. – 2004. – 41. – P. 1697 – 1724.
 16. *Kheirikhah M.M., Khalili S.M.R., Malekzadeh Fard K.* Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory // European J. Mechanics A/Solids. – 2011. – 31. – P. 54 – 66.
 17. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Shtantsel S.E.* Forced Nonstationary Vibrations of a Sandwich Cylindrical Shell with Cross-Ribbed Core // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 2. – P. 161 – 167.
 18. *Lugovoi P.Z., Skosarenko Yu.V., Orlenko S.P., Shugailo O.P.* Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 5. – P. 524 – 533.
 19. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P.* Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution Under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 1 – P. 22 – 32.
 20. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Orlenko S.P.* Numerical Simulation of the Dynamics of Spherical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Ribs Under a Shockwave // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 5. – P. 590 – 598.
 21. *Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Skosarenko Yu.V., Kotenko K.E.* Stress-Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core Under Nonstationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 4. – P. 394 – 505.
 22. *Lugovyi P.Z., Orlenko S.P.* Effect of the Asymmetry of Cylindrical Sandwich Shells on their Stress-Strain State under Non-Stationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 5 – P. 543 – 553.
 23. *Surianinov M., Yemelianova T., Lazarijeva D.* Investigation of free vibrations of threelayered cylindrical shell supported by transverse ribs // Int. J. Engng. Technology. – 2019. – 11, N 1. – P. 61 – 66.

Надійшла 19.07.2021

Затверджена до друку 31.05.2022