

Я.О.Жук^{1,2}, О.Х.Остос¹, Т.В.Карнаухова³

**ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ТА НЕСТАЦІОНАРНИЙ РОЗІГРІВ
ПРЯМОКУТНОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ
З ПОПЕРЕДНІМИ НАПРУЖЕННЯМИ**

¹Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4е, 01033, Київ, Україна; e-mail: y.zhuk@i.ua;

²Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: y.zhuk@i.ua;

³Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
пр. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: karn@inmech.kiev.ua

Abstract. A statement of the problem on the forced resonant vibrations and steady-state as well as transient dissipative heating of prestressed viscoelastic elastomeric rectangular plate is derived. The complex moduli technique is used to describe the viscoelastic properties of the plate material under harmonic loading. In terms of complex amplitudes, the simplified problem statement is used to investigate the stationary stress-strain state of the plate and determine the dissipative function that is used to find the both steady-state and transient temperature distribution over the plate. The evolution of the maximum temperature for different prestress levels is studied. The temperature-time response is used to predict the plate failure due to overheating and estimate the structure endurance under cyclic loading. The influence of the prestress level on the life prediction is investigated in details.

Key words: forced vibration, transient dissipative heating, prestressed viscoelastic plate, fatigue life.

Вступ.

Пластини є елементами багатьох конструкцій, що працюють в умовах високоінтенсивних циклічних навантажень: парових і газових турбін, віброізоляторів, великогабаритних пневматичних шин, високошвидкісних літаків, та ін. [6]. Дослідження механічної, динамічної і теплової поведінки термов'язкопружних елементів є основою для опису складних зв'язаних термомеханічних процесів і розробки різноманітних прийомів інженерної практики. При цьому матеріали конструкцій можуть демонструвати чутливість до наявності попередніх напружень і деформацій, які суттєво впливають на характеристики термомеханічних коливань особливо в околі резонансів [10].

Основна мета при розробці конструктивних компонентів – забезпечити безпечний термін експлуатації елементів конструкцій під дією певних навантажень [17 – 20]. Оцінка терміну експлуатації компонентів залежить від поведінки використовуваних матеріалів. Ефект термомеханічної зв'язаності, описаний вище, слід розглядати в тому випадку, коли розвиваються відповідні адекватні моделі прогнозу втомної витривалості. Звідси впливає необхідність глибокого дослідження дисипативного розігріву, включаючи його фізичну природу, наслідки і зв'язки з механізмами деградації в елементах конструкцій. Також слід оцінити безпечні діапазони температур [15].

Еластомерні матеріали є незамінними у великій кількості технічних приладів та виробів завдяки їхній високій деформівній здатності та дисипативним властивостям [8]. Найбільш яскраво особливості поведінки елементів конструкцій з таких матеріалів проявляються при гармонічному прикладанні навантаження. При цьому частина

механічної енергії внаслідок внутрішнього тертя переходить в тепло, і спостерігається явище дисипативного розігріву [3, 4, 11]. Енергія, що розсіюється як тепло, підвищує температуру навантаженої конструкції.

Дисипативна здатність матеріалу відіграє велику роль в динамічній поведінці конструкції. Вона призводить до згладжування напружень в зоні їх концентрації при вільних коливаннях та значного зниження амплітуд при вимушених коливаннях. При циклічному навантаженні термомеханічна поведінка еластомерів обумовлена ефектами зв'язаності механічних і теплових полів [7]. Невеликий розігрів протягом одного циклу деформування може призвести до значного підвищення температури у випадку багаточастотного процесу протягом тривалого періоду експлуатації і спричинити деградацію міцнісних властивостей матеріалу внаслідок його розм'якшення [13, 14]. Отже, інформація про величину і характер впливу температури необхідна для всебічного аналізу міцності конструкції.

Деякі матеріали при виникненні механічних напружень, зумовлених прикладанням швидких нестационарних навантажень, стають крихкими і не витримують теплового удару. Повторний розігрів може призвести до термовтомного руйнування елементів конструкції. Для оцінки термомеханічного стану еластомерних елементів при таких навантаженнях використовується теорія зв'язаної термов'язкопружності.

Зазначений підхід розвивається із застосуванням теорії амплітудних рівнянь, що характеризують термомеханічну поведінку в'язкопружних тіл при циклічному деформуванні [12]. Крім цього, з використанням концепції комплексних амплітуд і модулів при гармонічних коливаннях повна система рівнянь зв'язаної термов'язкопружності формулюється в термінах комплексних амплітудних рівнянь і доповнюється комплексним аналогом рівнянь руху та рівнянням теплопровідності [2 – 4].

Додатковим фактором, який може суттєво вплинути на втомну витривалість еластомерних структур, є наявність залишкових напружень, які можуть виникати внаслідок виробничих процесів або попередніх навантажень. Для подальшого розгляду задач циклічного деформування ці напруження вважаються попередніми. Наявність попередніх напружень також необхідно враховувати для підвищення надійності методики оцінки втомної витривалості.

У цій роботі досліджується стаціонарна механічна і тепла задача, а також задача нестационарного температурного розігріву гармонічно збуджуваної пластини, виготовленої з лінійного в'язкопружного матеріалу, властивості якого не залежать від частоти і температури [21]. В рамках одночастотного наближення моделюються зв'язані коливання і нестационарний розігрів елементів конструкцій; за температурним критерієм втрати працездатності досліджується втомна витривалість елементів конструкцій; будуються відповідні діаграми втоми і досліджується вплив на них рівнів попередніх напружень [22].

1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо прямокутну пластину довжиною a , шириною b і товщиною h . Поведінку матеріалу пластини вважаємо лінійною в'язкопружною незалежною від частоти, амплітуди та температури. Пластина віднесена до прямокутної декартової системи координат x, y, z . Вісь Oz направлена перпендикулярно до площини пластини Oxy . Контур пластини задається відрізками прямих $x = 0, a$; $y = 0, b$. В пластині присутні попередні мембранні розтягувальні зусилля: нормальні N_{xx}, N_{yy} та зсувне N_{xy} , за допомогою яких моделюється наявність виниклих при виготовленні чи попередньо наведених напружень. Механічні коливання пластини збуджуються поверхневим тиском $q_z = q'_0(x, y) \cos \omega t - q''_0(x, y) \sin \omega t$, гармонічно змінним в часі t з амплітудою $q_0(x, y) = \left(q'^2_0(x, y) + q''^2_0(x, y) \right)^{1/2}$, що розподілена за деяким законом по поверхні пластини, і круговою частотою ω , близькою до резонансної.

Контур пластини вважаємо шарнірно опертим і теплоізолюваним або таким, на якому підтримується стала температура T_c (температура оточуючого середовища).

Для моделювання механічної поведінки заданої пластини відносно механічних змінних по товщині приймаємо гіпотези Кірхгофа – Лява [1]. В'язкопружні властивості матеріалів описуються інтегральними операторами лінійної в'язкопружності [2 – 4], які у випадку гармонічного деформування матеріалу зводяться до множення комплексних величин $a * b = (a' + ia'')(b' + ib'')$. Температуру вібророзігріву приймаємо сталою по товщині пластини.

Застосування варіаційного принципу дозволяє отримати рівняння поперечних коливань пластини в загальному випадку у вигляді [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= J_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = J_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N(u, v, w) - kw + q(x, y, t) &= \\ &= J_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - J_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

де u, v, w – переміщення точок пластини; N_{ij} та M_{ij} , $i, j = x, y$ – усереднені по товщині пластини зусилля і моменти

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz; \quad (2)$$

$$N(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$

k – жорсткість основи (для випадку пластини на пружній основі).

Моменти інерції J_0, J_1 і J_2 із (1) визначаються за формулами

$$\begin{Bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho dz = \rho \begin{Bmatrix} h \\ 0 \\ h^3/12 \end{Bmatrix}.$$

Зауважимо, що доданок з J_2 в правій частині третього рівняння з (1) слід утримувати, якщо необхідно врахувати інерцію обертальних рухів елементів пластини.

Оскільки вважаються справедливими гіпотези Кірхгофа – Лява, то мембранні і згинальні напруження будуть розв'язаними. Прикладені попередні напруження вважаємо сталими ($N_{xx} = N_{xx}^0 = \text{const}$, $N_{yy} = N_{yy}^0 = \text{const}$, $N_{xy} = N_{xy}^0 = \text{const}$), тоді задача в площині пластини стає статично визначною, а перше і друге рівняння системи (1) задовольняються тотожно.

Класичні кінематичні співвідношення теорії пластин в припущенні справедливості гіпотез Кірхгофа – Лява записуються у вигляді [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + z\varepsilon_{xx}^1; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^0 + z\varepsilon_{yy}^1; \quad \gamma_{yy} = \gamma_{yy}^0 + z\gamma_{yy}^1; \\ \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xx}^1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_{yy}^1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy}^1 = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

де ε_{xx}^0 , ε_{yy}^0 і γ_{xy}^0 – мембранні деформації, а ε_{xx}^1 , ε_{yy}^1 і γ_{xy}^1 – згинальні деформації (кривизни та кручення).

Фізичні співвідношення, що зв'язують силові і кінематичні величини, в загальному випадку анізотропного матеріалу, з урахуванням визначень (2) набувають відомий вигляд [9]

$$\begin{cases} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases} - \begin{cases} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \\ N_{xy}^T \end{cases};$$

$$\begin{cases} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{cases} - \begin{cases} M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \\ M_{xy}^T \end{cases},$$
(4)

де A_{ij} та D_{ij} , $i, j = \overline{1, 3}$ – коефіцієнти жорсткості при розтязі та стиску, відповідно; N_{ij}^T і M_{ij}^T , $i, j = x, y$ – зусилля і моменти, обумовлені тепловою деформацією. В цьому випадку вважаємо їх малими внаслідок малості коефіцієнтів теплового розширення для еластомерів і нехтуємо цими складовими.

Для випадку ізотропного матеріалу співвідношення (4) перепишемо у вигляді [1, 2]

$$\begin{cases} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{cases} = A \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases}; \quad \begin{cases} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{cases} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{cases},$$
(5)

де

$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad D = \frac{Ah^2}{12} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$
(6)

Тут E і ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона, відповідно.

Підставляючи (5) і (6) у третє рівняння системи (1), з урахуванням того, що в нашому випадку як попередні виступають мембранні зусилля, отримуємо рівняння руху в переміщеннях

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + N(u, v, w) + q(x, y, t) = J_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

або

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q(x, y, t),$$
(7)

$$\text{де } \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Таким чином, у разі незалежних від температури властивостей матеріалу в припущенні сталості температури по товщині пластини механічна задача розпадається на дві: 1) задачу про плоский напружений стан і 2) задачу про чистий згин. Задача про плоский напружений стан і визначає попередній напружений стан, на який накладається чистий згин, що змінюється в часі за гармонічним законом.

Умови шарнірного опирання записуються у вигляді

$$w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=0, a; w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \text{ при } y=0, b. \quad (8)$$

При гармонічному навантаженні дослідження стаціонарних коливань можливе із залученням концепції комплексних модулів і комплексних амплітуд [2 – 6]. У цьому випадку рівняння (7) можна переписати у вигляді

$$\tilde{D}\nabla^4 \tilde{w} + \rho h \omega^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \tilde{q}(x, y), \quad (9)$$

де $\tilde{D} = D' + iD''$, $\tilde{w}(x, y) = w'(x, y) + iw''(x, y)$ і $\tilde{q}(x, y) = q'(x, y) + iq''(x, y)$ – комплексні згинальні жорсткості, прогини пластини і навантаження; $i = \sqrt{-1}$. При цьому граничні умови (8) матимуть такий самий вигляд при заміні дійсної змінної w на комплексну \tilde{w} .

Закон зміни прогинів і навантаження в часі визначається відповідно формулами

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= w'(x, y) \cos \omega t - w''(x, y) \sin \omega t; \\ q(x, y, t) &= q'(x, y) \cos \omega t + iq''(x, y) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (10)$$

Комплексне рівняння (9) еквівалентне системі двох дійсних рівнянь виду

$$\begin{aligned} D'\nabla^4 w' - D''\nabla^4 w'' - \rho h \omega^2 w' &= N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + q'; \\ D'\nabla^4 w'' + D''\nabla^4 w' - \rho h \omega^2 w'' &= N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w''}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} + q'', \end{aligned} \quad (11)$$

при цьому граничні умови (8) набувають вигляду

$$\begin{aligned} w' = w'' = 0, \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, a; \\ w' = w'' = 0, \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, b. \end{aligned} \quad (12)$$

Нестационарне температурне поле описується усередненим за період коливань і в площині поперечного перерізу рівнянням нестационарної теплопровідності:

$$\rho c h \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda h \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - 2\alpha_s (T - T_C) + \langle \bar{W}_D \rangle, \quad (13)$$

де T – температура; λ , α_s і c – коефіцієнти теплопровідності, тепловіддачі і теплоємності з лицьових поверхонь пластини; ρ – густина матеріалу; T_C – температура навколишнього середовища; $\langle \bar{W}_D \rangle = \langle \bar{W}_D \rangle(x, y)$ – усереднена по товщині пластини і за період коливань дисипативна функція

$$\langle \bar{W}_D \rangle = \frac{\omega}{2} \left[\left(M_{xx}'' \varepsilon_{xx}^{1'} - M_{xx}' \varepsilon_{xx}^{1''} \right) + \left(M_{yy}'' \varepsilon_{yy}^{1'} - M_{yy}' \varepsilon_{yy}^{1''} \right) + \left(M_{xy}'' \gamma_{xy}^{1'} - M_{xy}' \gamma_{xy}^{1''} \right) \right], \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{xx} &= M'_{xx} + iM''_{xx} = -\tilde{D} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right]; \tilde{M}_{yy} = M'_{yy} + iM''_{yy} = -\tilde{D} \left[\tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right]; \\ \tilde{M}_{xy} &= M'_{xy} + iM''_{xy} = -\tilde{D}(1 - \tilde{\nu}) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут \tilde{M}_{ij} , $i, j = x, y$ – комплексні аналоги моментів із (2); $\tilde{\nu}$ – комплексний коефіцієнт Пуассона $\tilde{\nu} = \nu' - i\nu''$. Відзначимо, що в даній постановці використовується варіант моделі циклічної в'язкопружності, якому відповідає дійсний коефіцієнт Пуассона і комплексний коефіцієнт об'ємного розширення. Тому скрізь далі $\nu' = \nu$, $\nu'' = 0$.

У випадку нестационарної задачі розглядалися умови сталості температури по контуру пластини:

$$\begin{cases} T(0, y, t) = T_C; \\ T(a, y, t) = T_C; \end{cases} \quad \begin{cases} T(x, 0, t) = T_C; \\ T(x, b, t) = T_C. \end{cases} \quad (16)$$

В початковий момент часу температура пластини дорівнює температурі навколишнього середовища, тому початкова умова має вигляд

$$T(x, y, 0) = T_C. \quad (17)$$

Для стаціонарного поля температури вібророзігріву (приріст температури) $\theta = T - T_C$ рівняння (13) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{2\alpha_S}{\lambda h} \theta + \frac{\langle \bar{W}_D \rangle}{\lambda h} = 0. \quad (18)$$

Рівняння (18) варто доповнити граничними умовами теплоізоляції на контурі пластини

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, b. \quad (19)$$

Рівняння (11), (18) з виразом для дисипативної функції (14), доповнені механічними (12), тепловими (16) граничними умовами, а також початковими умовами (17) формують постановку задачі про вимушені коливання і нестационарний розігрів попередньо навантаженої прямокутної пластини.

2. Побудова розв'язку задачі.

Для розв'язання задачі розглянемо випадок, коли попередній напружений стан в пластині реалізується наявністю лише нормальних розтягувальних зусиль: $N_{xx}^0 = \text{const} \neq 0$, $N_{yy}^0 = \text{const} \neq 0$, $N_{xy}^0 = 0$.

Для шарнірного опирання розв'язок задачі про стаціонарні коливання записується у вигляді [1, 3]

$$w'(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w'_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad w''(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w''_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (20)$$

де w'_{mn} і w''_{mn} – невідомі величини – комплексні амплітуди, що визначають власну форму коливань, яка відповідає власній частоті ω_{mn} . Формула для визначення цієї частоти при наявності попередніх розтягувальних мембранних зусиль відома [1, 3]

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left\{ D_0 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 N_{xx}^0 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 N_{yy}^0 \right\}}, \quad (21)$$

тут D_0 – згинальна жорсткість пластини у випадку пружної поведінки матеріалу. Для в'язкопружного матеріалу вона визначається співвідношенням $D_0^2 = D'^2 + D''^2$.

В цій статті вивчаються резонансні коливання з частотами $\omega \approx \omega_{mn}$, близькими до відповідної власної частоти для моди коливань з номером mn . В цьому випадку припускається, що навантаження розподілене по поверхні пластини за відповідним законом

$$q(x, y, t) = q_{mn}^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t - q_{mn}^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega t,$$

причому у випадку зміни поперечного навантаження в часі по закону лише синуса чи косинуса цей вираз спрощується очевидним чином.

Тоді реакція пластини буде визначатися лише резонансною модою mn , а сумами у виразі (20) можна знехтувати внаслідок малого внеску інших гармонік. Підставляючи вираз (20) у систему (11) і з врахуванням $N_{xy}^0 = 0$, отримуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно w'_{mn} та w''_{mn} у вигляді

$$\begin{aligned} w'_{mn} [D'A - \rho h \omega^2 + B] - w''_{mn} D'' A &= q'_{mn}; \\ w'_{mn} D'' A + w''_{mn} [D'A - \rho h \omega^2 + B] &= q''_{mn}, \end{aligned} \quad (22)$$

де $A = k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4$; $B = N_{xx}^0 k_x^2 + N_{yy}^0 k_y^2$; $k_x = m\pi x/a$; $k_y = n\pi x/b$.

Розв'язок системи рівнянь (22) визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned} w'_{mn} &= \Delta_1 / \Delta; \quad w''_{mn} = \Delta_2 / \Delta; \\ \Delta_1 &= q'_{mn} [D'(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4) - \rho h \omega^2 + (N_{xx}^0 k_x^2 + N_{yy}^0 k_y^2)] + q''_{mn} D''(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4); \\ \Delta_2 &= q''_{mn} [D'(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4) - \rho h \omega^2 + (N_{xx}^0 k_x^2 + N_{yy}^0 k_y^2)] - q'_{mn} D''(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4); \\ \Delta &= [D'(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4) - \rho h \omega^2 + (N_{xx}^0 k_x^2 + N_{yy}^0 k_y^2)]^2 + [D''(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4)]^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Після визначення комплексних амплітуд прогинів згідно методики, описаної в п.1, розв'язок рівняння стаціонарної теплопровідності (15) знаходимо у вигляді

$$\theta(x, y) = \theta_0 + \theta_1 \cos 2k_x x + \theta_2 \cos 2k_y y + \theta_{12} \cos 2k_x x \cos 2k_y y, \quad (24)$$

при якому граничні умови задовольняються автоматично. Тут θ_0 , θ_1 , θ_2 і θ_{12} – константи, які підлягають визначенню.

Для розв'язування задачі стаціонарної теплопровідності знаходимо вирази для дисипативної функції через комплексні амплітуди переміщення

$$\begin{aligned} \langle \bar{W}_D \rangle &= \frac{\omega}{2} D'' \left\{ \left(\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &+ 2\nu \left[\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial y^2} \right] + (1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Підставляючи (23), (24) і (25) в рівняння стаціонарної теплопровідності (18) з подальшим прирівнюванням коефіцієнтів при відповідних вільних членах, косинусах $\cos 2k_x x$, $\cos 2k_y y$ та їх добутку $\cos 2k_x x \cos 2k_y y$ призводить до наступних виразів для коефіцієнтів θ_0 , θ_1 , θ_2 і θ_{12} :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\omega}{16} \frac{D''}{\alpha_S} |\tilde{w}_{mn}|^2 [k_x^4 + (1+\nu)k_x^2 k_y^2 + k_y^4]; \\ \theta_1 &= -\frac{\omega}{16} \frac{D'' |\tilde{w}_{mn}|^2}{(2k_x^2 \lambda h + \alpha_S)} [k_x^4 + 2\nu k_x^2 k_y^2 + k_y^4 - (1-\nu)k_x^2 k_y^2]; \\ \theta_2 &= -\frac{\omega}{16} \frac{D'' |\tilde{w}_{mn}|^2}{(2k_y^2 \lambda h + \alpha_S)} [k_x^4 + 2\nu k_x^2 k_y^2 + k_y^4 - (1-\nu)k_x^2 k_y^2]; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\theta_{12} = \frac{\omega}{16} \frac{D^n |\tilde{w}_{mn}|^2}{(2[k_x^2 + k_y^2] \lambda h + \alpha_S)} [k_x^4 + (1+\nu)k_x^2 k_y^2 + k_y^4],$$

де $|\tilde{w}_{mn}|^2 = (w'_{mn})^2 + (w''_{mn})^2$ – квадрат амплітуди прогину.

Підстановка коефіцієнтів (26) у формулу (24) дозволяє визначити температурне поле в пластині, що коливається на частоті близькій до частоти відповідного резонансу.

Для розв'язання рівняння нестационарної теплопровідності (13) використовується явна скінченнорізницева схема за просторовими координатами і в часі. Рівняння теплопровідності в скінченнорізницевій формі має наступний вигляд:

$$\rho ch \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\delta t} = \lambda h \left(\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\delta y^2} \right) - 2\alpha_S (T_{i,j}^n - T_C) + \langle \bar{W}_D \rangle_{i,j}, \quad (27)$$

де δt – крок за часом; δx , δy – кроки за координатами, а записи в індексній формі (i, j, n) скінченнорізницевої схеми відповідають координатам (x, y, t) .

Початкова умова (17) в скінченнорізницевому вигляді записується так: $T_{i,j}^1 = T_C$.

Нехай n_x , n_y , n_t – кількість точок розбиття за відповідними координатами і за часом. Тоді в скінченнорізницевій формі перетворення виглядають наступним чином:

$$\begin{aligned} T(0,y,t) = T_C; \\ T(a,y,t) = T_C; \\ T(x,0,t) = T_C; \\ T(x,b,t) = T_C; \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} T_{1,j}^n = T_C, T_{n_x+1,j}^n = T_C; \\ T_{i,1}^n = T_C, T_{i,n_y+1}^n = T_C. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо вирази

$$T_{1,j}^n = T_C, T_{n_x+1,j}^n = T_C; T_{i,1}^n = T_C, T_{i,n_y+1}^n = T_C. \quad (28)$$

Тоді скінченнорізницева форма граничних умов набуває наступного вигляду: умова при $x=0$ реалізується при $i=1$; умову при $x=a$ отримуємо при $i=n_x+1$; умова при $y=0$ відповідає $j=1$, а умова при $y=b$ реалізується при $j=n_y+1$. В результаті із формул (27), (28) отримаємо

$$T_{1,j}^{n+1} = T_{1,j}^n + \frac{\delta t}{\rho ch} \left\{ \lambda h \left(\frac{T_{2,j}^n - 2T_{1,j}^n + T_{0,j}^n}{\delta x^2} + \frac{T_{1,j+1}^n - 2T_{1,j}^n + T_{1,j-1}^n}{\delta y^2} \right) - 2\alpha_S (T_{1,j}^n - T_C) + \langle \bar{W}_D \rangle_{1,j} \right\}; \quad (29)$$

$$T_{n_x+1,j}^{n+1} = T_{n_x+1,j}^n + \frac{\delta t}{\rho ch} \left\{ \lambda h \left(\frac{T_{n_x,j}^n - 2T_{n_x+1,j}^n + T_{n_x+2,j}^n}{\delta x^2} + \frac{T_{n_x+1,j+1}^n - 2T_{n_x+1,j}^n + T_{n_x+1,j-1}^n}{\delta y^2} \right) - 2\alpha_S (T_{n_x+1,j}^n - T_C) + \langle \bar{W}_D \rangle_{n_x+1,j} \right\}; \quad (30)$$

$$T_{i,1}^{n+1} = T_{i,1}^n + \frac{\delta t}{\rho ch} \lambda h \left\{ \left(\frac{T_{i+1,1}^n - 2T_{i,1}^n + T_{i-1,1}^n}{\delta x^2} + \frac{T_{i,2}^n - 2T_{i,1}^n + T_{i,0}^n}{\delta y^2} \right) - 2\alpha_S (T_{i,1}^n - T_C) + \langle \bar{W}_D \rangle_{i,1} \right\}; \quad (31)$$

$$T_{i,ny+1}^{n+1} = T_{i,ny+1}^n + \frac{\delta t}{\rho ch} \left\{ \lambda h \left(\frac{T_{i+1,ny+1}^n - 2T_{i,ny+1}^n + T_{i-1,ny+1}^n}{\delta x^2} + \frac{T_{i,ny}^n - 2T_{i,ny+1}^n + T_{i,ny+2}^n}{\delta y^2} \right) - 2\alpha_S (T_{i,ny+1}^n - T_C) + \langle \bar{W}_D \rangle_{i,ny+1} \right\}. \quad (32)$$

Таким чином, вирази (29), (30), (31) та (32) визначають граничні умови в скінченно-норізницевому вигляді. В досліджуваній задачі вони відповідають умовам теплоізоляції на контурі пластини.

Розв'язування рівняння (27) з граничними умовами (29), (30), (31) та (32) дозволяє отримати числовий розв'язок рівняння нестационарної теплопровідності (13):

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \frac{\delta t}{\rho ch} \left\{ \lambda h \left(\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\delta y^2} \right) - 2\alpha_S (T_{i,j}^n - T_C) + \langle \bar{W}_D \rangle_{i,j} \right\}. \quad (33)$$

Для визначення температури в кутових точках пластини в розглянутій схемі застосовуються наступні вирази:

$$T_{1,1}^{n+1} = \frac{T_{2,1}^{n+1} + T_{1,2}^{n+1}}{2}; \quad T_{1,ny+1}^{n+1} = \frac{T_{2,ny+1}^{n+1} + T_{1,ny}^{n+1}}{2};$$

$$T_{nx+1,1}^{n+1} = \frac{T_{nx+1,2}^{n+1} + T_{nx,1}^{n+1}}{2}; \quad T_{nx+1,ny+1}^{n+1} = \frac{T_{nx,ny+1}^{n+1} + T_{nx+1,ny}^{n+1}}{2},$$

тобто значення температури в кутових точках дорівнюють середньому арифметичному сумі сусідніх точок скінченнонорізницевої схеми.

3. Числові результати та їх аналіз.

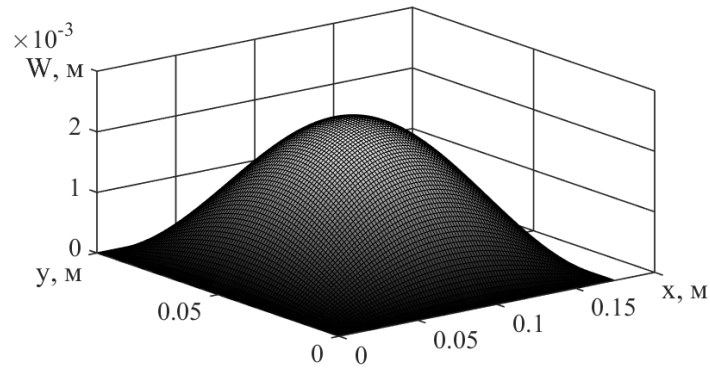
Числові розрахунки проводяться для випадку квадратної і прямокутної еластомерної пластин. Прямокутну пластину було вибрано з розмірами $a = 0,175$ м, $b = 0,1$ м, $h = 0,005$ м. Як матеріал пластини вибрано поліетилен, що має наступні комплексні характеристики [16]: модуль накопичення $E' = 8,0 \cdot 10^8$ Н/м², модуль втрат $E'' = 6,3 \cdot 10^6$ Н/м², тангенс кута втрат $\text{tg } \theta = E'' / E' = 0,0079$. Фізико-механічні властивості матеріалу наступні: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,46$, густина $\rho = 953$ кг/м³, а коефіцієнти тепловіддачі і теплопровідності дорівнюють $\alpha_S = 4$ Вт/(м² · С) і $\lambda = 0,36$ Вт/(м · С), відповідно.

В задачі досліджується поведінка пластини при гармонічному навантаженні за наявності різних за величиною попередніх мембранних N_{xx} і поперечних N_{yy} зусиль. Для характеристики їх відносної величини вводиться коефіцієнт $K_f = N_{xx} / N_{yy}$.

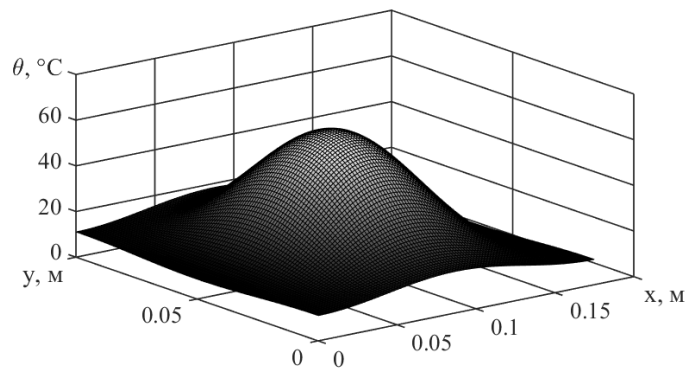
При навантаженні пластини зовнішнім тиском з амплітудою $q' = 350$ Н/м² (при цьому $q'' = 0$) частота власних коливань на першій моді ($m = 1, n = 1$) дорівнює $f_{11} = 327,9$ Гц. Оскільки дослідження проводяться в околі резонансу, то розподіли амплітуди прогину і температури будуються для основної частоти f_{11} , де $f_{mn} = \omega_{mn} / 2\pi$ – власна частота, що відповідає першій формі коливань.

Максимальний прогин w_{\max} досягається в центрі пластини (точка $x = a/2$, $y = b/2$) і дорівнює $2,5 \cdot 10^{-3}$ м. Максимальна температура розігріву пластини θ_{\max} також досягається в цій же точці і дорівнює $\theta_{\max} = 61,5$ °С. Всюди далі на рисунках наведені характеристики, обчислені для точок максимальних значень амплітуд і температур для відповідних мод коливань.

На рис. 1 побудовано розподіли прогинів і температур для $K_f^{500} = 10$. Тут верхнім індексом позначається фіксоване значення попереднього зусилля $N_{yy} = 500$ Н/м при змінному значенні N_{xx} .



a



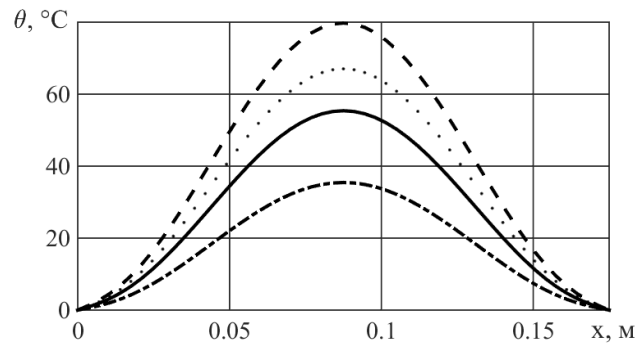
б

Рис. 1

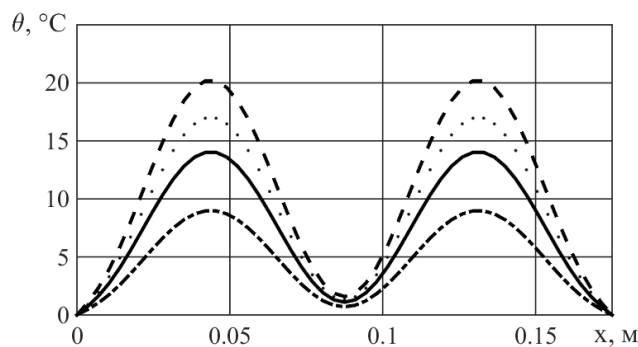
Важлива механічна властивість резонансних коливань еластомерної пластини полягає в тому, що даний елемент конструкції здатен працювати певний час при навантаженнях, що перевищують критичне значення, тобто в закритичній області навантажень. При цьому найважливішим є визначення часу, протягом якого конструкція зберегатиме робоздатність. Для отримання таких оцінок необхідно дослідити нестационарну реакцію і втмну витривалість досліджуваної конструкції.

Нестационарна (за температурою) задача для прямокутної пластини розглядається в межах двоетапної процедури. На першому етапі механічна частина задачі розв'язується як стаціонарна задача, а дисипативна функція визначається з використанням амплітуд прогину і модуля втрат за формулою (25). На другому етапі розв'язується нестационарна задача вібророзігріву. Отже, другий етап полягає у визначенні розв'язку рівняння нестационарної теплопровідності (13) із граничними (16) і початковими (17) умовами.

Для характеристики просторового розподілу температури вібророзігріву прямокутної пластини на рис. 2 побудовано залежність приросту температури вздовж лінії $y = b/2$ на власній частоті $f = 429,6$ Гц (основний резонанс $m = 1, n = 1$) і $f = 1058,6$ Гц (другий резонанс $m = 1, n = 2$) для попередніх зусиль з коефіцієнтом $K_f^{500} = 100$.



a



б

Рис. 2

На рис. 2 штрих-пунктирною, суцільною, пунктирною і штриховою кривими показані температурні розподіли при $q' = 400, 500, 550$ і 600 Н/м^2 відповідно для моменту часу $t = 400 \text{ с}$. Протягом цього часового інтервалу досягнуто значень температури розігріву $\theta_{\max} = 79,8 \text{ }^\circ\text{C}$ та $\theta_{\max} = 20,2 \text{ }^\circ\text{C}$ для першої та другої форм коливань, відповідно.

Для еластомера, обраного як матеріал пластини, температура плавлення становить $120 \text{ }^\circ\text{C}$. Тому в цій роботі як критичне значення температури розігріву θ_{cr} вибрано значення $100 \text{ }^\circ\text{C}$, при якому спостерігається помітне розм'якшення матеріалу.

На рис. 3 штрих-пунктирною, суцільною, штриховою і пунктирною кривими побудовано температурні криві для резонансної частоти $f = 429,6 \text{ Гц}$ для коефіцієнта $K_f^{500} = 100$ при навантаженнях: $q' = 300, 355, 400$ і 500 Н/м^2 , відповідно.

Для визначення проміжку часу функціонування досліджуваної пластини до втрати роботоздатності під дією закритичних навантажень, використовуються результати, отримані на рис. 3.

Інтервал часу до теплового руйнування (втрати робото-здатності внаслідок перегріву) визначається моментом часу, коли максимальна температура досягає величини вибраного з певним запасом критичного рівня розігріву $\theta_{cr} = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ (тобто досягає $T_{cr} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$) в будь-якій точці пластини. Очевидно, що на

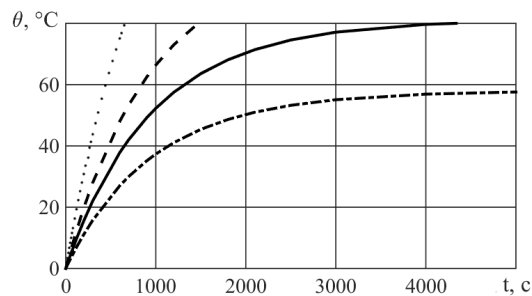


Рис. 3

графіку ці моменти часу визначаються точкою перетину температурних кривих і лінії критичного розігріву. Якщо температурна крива не перетинає лінію $\theta_{cr} = 80^\circ\text{C}$ (як, наприклад, штрих-пунктирна лінія на рис. 3), то під дією цього навантаження механізм може працювати нескінченно довго і може вийти з ладу тільки через механічні причини.

Отже, для оцінки втомної витривалості за тепловим критерієм, використовуються аналоги діаграм Веллера або так звані втомні криві.

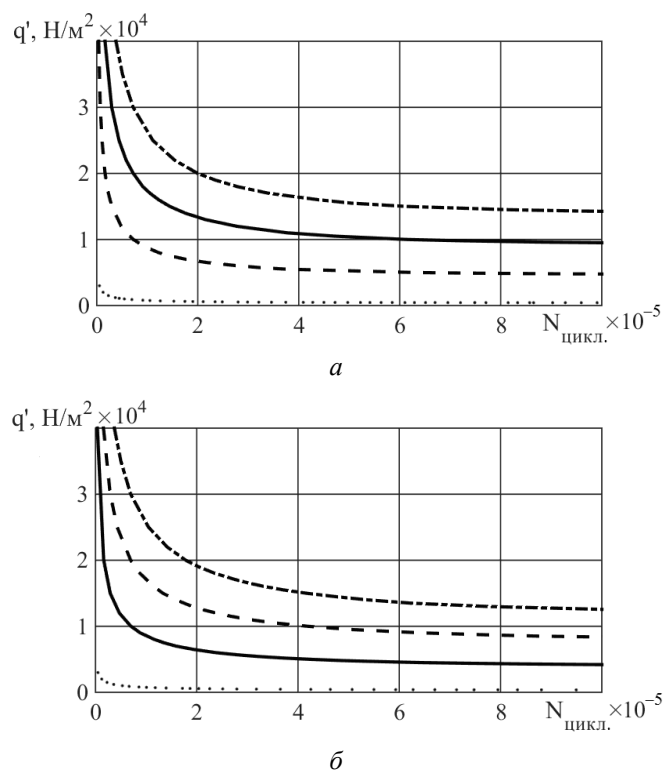


Рис. 4

На рис. 4, *a* показана діаграма Веллера для фіксованої частоти $f = 314,5$ Гц, що є першою резонансною частотою коливань прямокутної пластини при наявності попередніх зусиль з коефіцієнтом $K_f^{500} = 0$ (тобто при $N_{xx}^0 = 0$ і $N_{yy}^0 = 500$ Н/м). По осі абсцис відкладається кількість циклів, що дорівнює відношенню часу розігріву до періоду коливань.

Ці втомні криві обчислюються для різних значень попередніх навантажень: пунктирною, штриховою, суцільною і штрих-пунктирною лініями будується діаграма для $K_f^{500} = 0, 10, 20$ і 30 , відповідно. Всі чотири криві на рис. 4, *a* отримано на частоті $f = 314,5$ Гц (режим фіксованої частоти), що відповідає зростаючій гілці температурно-частотної характеристики. Слід відзначити, що при зростанні рівня попереднього зусилля діаграми Веллера зсуваються в область більш високих амплітуд зовнішнього навантаження, внаслідок зміщення амплітудно-частотної кривої в область вищих частот. Таким чином, час до руйнування конструкції за тепловим критерієм збільшується, що покращує витривалість конструкції.

Модельовання розігріву пластини для розглянутого режиму фіксованої частоти проводилось для широкого інтервалу значень амплітуд зовнішнього навантаження q' . На рис. 4, *b* показані результати аналогічних досліджень на спадній гілці амплітудно-

частотної кривої. Діаграма Веллера в цьому випадку побудована на частоті $f=429,6$ Гц (резонансна частота для $K_f^{500}=100$). Отримані втомні криві розраховано для наступних значень переднього навантаження: пунктирною, суцільною, штриховою і штрихпунктирною лініями побудовані діаграми для $K_f^{500}=70, 80, 90$ і 100 , відповідно.

Як окремий випадок прямокутної пластини проведено розрахунки для пластини квадратної форми. Далі представлено результати для пластини з розмірами: $a=0,1$ м, $b=0,1$ м, $h=0,005$ м. Попередні напруження, як і раніше, задавалися за допомогою мембранних розтягувальних нормальних зусиль N_{xx} і N_{yy} , прикладених вздовж відповідних осей.

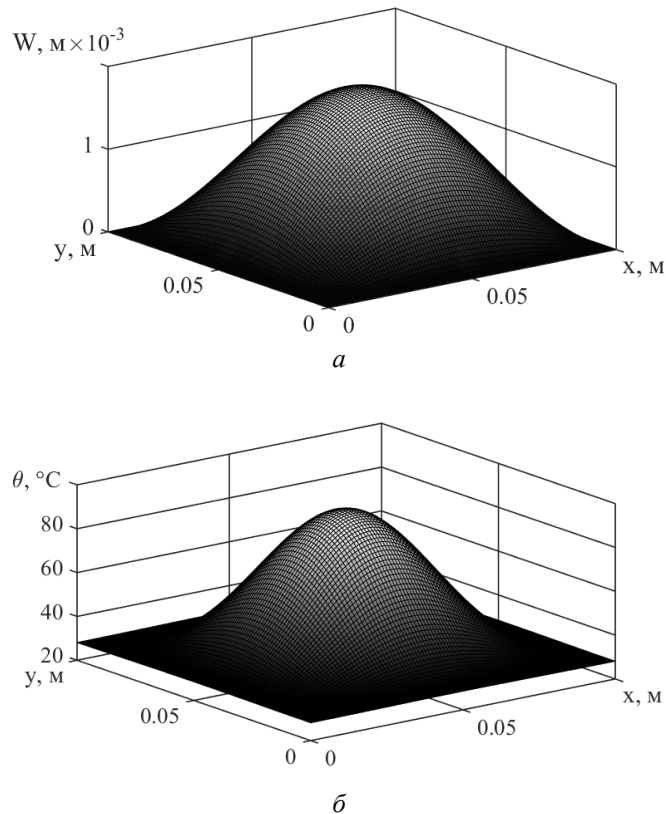


Рис. 5

На рис. 5 побудовано розподіли прогинів і температур для $K_f^{70}=10$. При впливі на пластину зовнішнього тиску з амплітудою $q'=600$ Н/м² (при цьому $q''=0$) частота власних коливань по першій моді ($m=1, n=1$) виходить $f_{11}=472,2$ Гц.

Максимальний прогин w_{\max} досягається в центрі пластини (точка $x=a/2, y=b/2$) і дорівнює $1,8 \cdot 10^{-3}$ м. Максимальна температура розігріву пластини θ_{\max} також досягається в цій же точці і дорівнює $\theta_{\max}=92,97$ °С.

На рис. 6 побудовано залежність розподілу температури розігріву вздовж лінії $y=b/2$ на власній частоті $f=505,9$ Гц (перший резонанс $m=1, n=1$) і $f=1186$ Гц (другий резонанс $m=1, n=2$) для попередніх зусиль з коефіцієнтом $K_f^{70}=100$ для квадратної пластини.

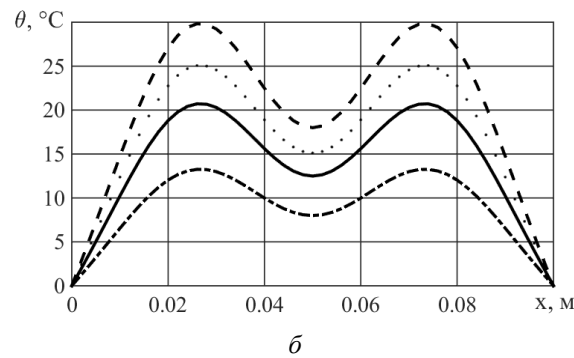
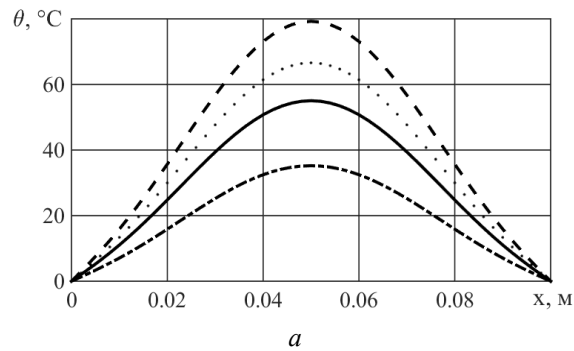


Рис. 6

На рис. 6 штрих-пунктирною, суцільною, пунктирною і штриховою лініями показано температурні розподіли при $q' = 400, 500, 550$ і 600 Н/м^2 , відповідно, для моменту часу $t = 1550 \text{ с}$. Найбільш високі значення розігріву досягають $\theta_{\max} = 79,3 \text{ }^\circ\text{C}$ і $\theta_{\max} = 29,8 \text{ }^\circ\text{C}$ на першій та другій формі коливань, відповідно.

На рис. 7 штриховою, суцільною, штрих-пунктирною та пунктирною лініями побудовано температурні криві на резонансній частоті $f = 505,9 \text{ Гц}$ для коефіцієнта $K_f^{70} = 100$ під дією та-ких величин зовнішнього тиску: $q' = 400, 550, 600$ і 1000 Н/м^2 , відповідно.

На рис. 8, а показана діаграма Веллера на фіксованій частоті $f = 468,3 \text{ Гц}$, що є першою резонансною частотою коливань прямокутної пластини при наявності попередніх зусиль з коефіцієнтом $K_f^{70} = 0$ (на зростаючій гілці). Дані втомні криві розраховано для різних значень попередніх навантажень: пунктирною, штриховою, суцільною і штрих-пунктирною кривими будується діаграма для $K_f^{70} = 0, 10, 30$ і 90 , відповідно.

На рис. 8, б проведено аналогічні дослідження на спадній гілці амплітудно-частотної кривої. Діаграма Веллера в цьому випадку розрахована на частоті $f = 505,9 \text{ Гц}$ (резонансна частота для $K_f^{70} = 100$). Отримані втомні криві обчислено для наступних значень попередніх навантажень: пунктирною, суцільною, штриховою і штрих-пунктирною кривими будуться діаграми для $K_f^{70} = 10, 70, 90$ і 100 , відповідно.

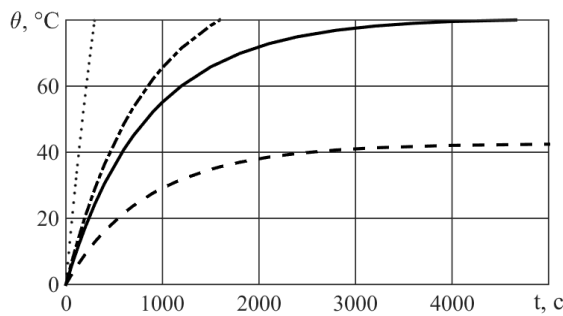
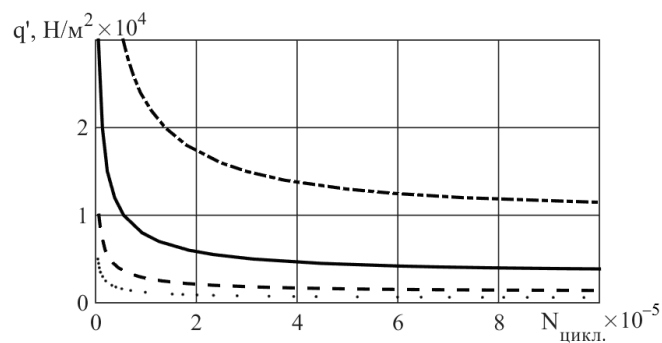
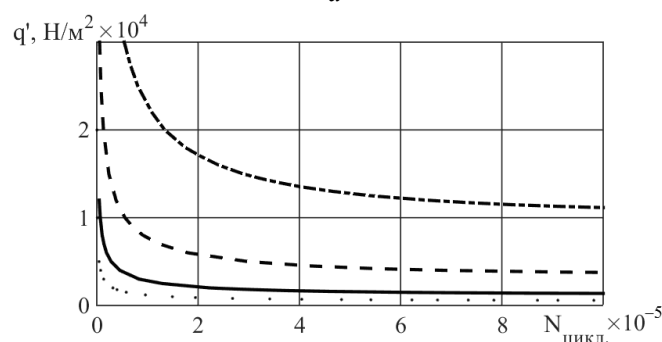


Рис. 7



a



б

Рис. 8

Аналіз результатів дослідження коливань і вібророзігріву в'язкопружних пластин показує, що для забезпечення надійного та ефективного функціонування таких елементів конструкцій необхідно враховувати попередній напружено-деформований стан, який може суттєво впливати на роботоздатність і втомну витривалість (зокрема за тепловим критерієм), підвищуючи, або навпаки, знижуючи рівень температури вібророзігріву внаслідок відповідних зсувів температурно-частотних характеристик.

Висновок.

В роботі досліджено вплив попередніх напружень на термомеханічну поведінку та втомну витривалість за тепловим критерієм в'язкопружної прямокутної пластини, що знаходиться під дією гармонічного за часом навантаження. На основі розв'язку стаціонарної механічної і теплової задачі детально вивчено амплітудно- і температурно-частотні характеристики пластини в околі резонансних частот. Для дослідження закритичної поведінки пластини і визначення кількості циклів до руйнування розв'язано нестационарну задачу теплопровідності із дисипативною функцією, визначеною із розв'язку стаціонарної механічної задачі, для випадку теплоізолизованого контуру пластини. Побудовані та проаналізовані втомні (за тепловим критерієм) криві для різних рівнів навантаження при наявності як одновісного, так і двовісного попереднього напруженого стану. Встановлено, що наявність попередніх напружень зсуває амплітудно- і температурно-частотну криву в низькочастотну або високочастотну область, що істотно впливає на температуру вібророзігріву і, отже, на втомну поведінку за температурним критерієм.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Сформульовано постановку задачі про вимушені резонансні коливання та стаціонарний, а також нестационарний дисипативний розігрів попередньо напруженої в'язкопружної еластомерної прямокутної пластини. Для опису в'язкопружних властивостей матеріалу пластини при гармонічному в часі навантаженні використовується концепція комплексних модулів. Спрощена поста-

новка задачі в термінах комплексних амплітуд використовується для дослідження стаціонарного напружено-деформованого стану пластини та визначення дисипативної функції, яка використовується для знаходження як стаціонарного, так і нестаціонарного розподілу температури по пластині. Досліджено залежність максимальної температури вібророзігріву від величини попереднього напруження. Температурні криві використовуються для оцінки витривалості пластини внаслідок перегріву при циклічному навантаженні. Детально досліджено вплив рівня попереднього напруження на втомну витривалість пластини.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: вимушені коливання, нестаціонарний дисипативний розігрів, попередньо напружена в'язкопружна пластина, втомна витривалість.

1. *Доннелл Л.Г.* Балки, пластини и оболочки. – Москва: Наука, 1982. – 568 с.
2. *Карнаухов В.Г., Гуменюк Б.П.* Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 304 с.
3. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
4. *Карнаухов В.Г., Сенченко И.К., Гуменюк Б.П.* Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
5. *Карнаухов В.Г., Сенченко И.К., Червинко О.П.* Влияние предварительного деформирования на резонансные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругого цилиндра конечной длины // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 1. – С. 39 – 42.
6. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
7. *Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г. и др.* Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
8. *Anderson V.W., Lazan B. J.* Damping and Fatigue Properties of Magnesium and Magnese-copper Alloys Proposed as New High Damping Materials. – Minnesota: Internal rept., Aero Library, 1957. – 243 p.
9. *Behnke R., Kalishke M.* Thermo-mechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment // Int. J. of Non-Linear Mech. – 2015. – **68**. – С. 101 – 131.
10. *Green A.E.* Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics. – Oxford: Clarendon Press, 1960. – 455 p.
11. *Guz A.N., Dekret V.A.* Finite-Fiber Model in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composites (Review) // Int. App. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 1 – 48.
12. *Hashemi M., Zhuk Y.* The Influence of Strain Amplitude, Temperature and Frequency On Complex Shear Moduli of Polymer Materials under Kinematic Harmonic Loading // Mechanics and Mechanical Engng. – 2017. – **21**, N 1. – P. 157 – 170.
13. *Hashemi M., Zhuk Y.A.* Thermomechanical Stability and Thermal Fatigue Failure of Nanocomposite Structural Elements under Static and Cyclic Loading. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2018. – 208 p.
14. *Hashemi M., Zhuk Y.A.* The Influence of Temperature on the Cyclic Properties of the Transversely Isotropic Nanocomposite System Under Kinematic Harmonic Loading // J. of Mathematical Sci. – 2019. – **236**, N 2. – P. 185 – 198.
15. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F.* Forced Harmonic Vibrations and Dissipative Heating-up of Viscoelastic Thin-Walled Elements (Review) // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 2. – P. 174 – 195.
16. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I.* Electromechanical Vibrations and Dissipative Heating of Viscoelastic thin-walled Piezoelements (Review) // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 2. – P. 182 – 212.
17. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I.* Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 6 – 58.
18. *Lazan B.* Damping of Materials and Members in Structural Mechanics. – Oxford etc.: Pergamon Press, 1968. – 318 p.
19. *Nashif A.D., Jones D.I., Henderson J.P.* Vibration Damping. – New York: Wiley-Interscience Publication, 1985. – 448 p.
20. *Snowdon J. C.* Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems. – New York: The Pennsylvania State University, 1968. – 486 p.
21. *Zhuk Ya.A., Ostos A.Kh.* Effect of Preloading on the Resonant Vibrations and Dissipative Heating of a Rectangular Thermoviscoelastic Plate // Int. App. Mech. – 2020. – **56**, N 4. – P. 432 – 444.
22. *Zhuk Y., Ostos O., Pyatetskaya O.* Prestress effect on the thermomechanical response and fatigue life prediction of viscoelastic plates // Math. Modeling and Computing. – 2020. – **7**, N 1. – P. 112 – 124.

Поступила 12.08.2021

Затверджена до друку 31.05.2022