

В.С.Кирилюк, О.І.Левчук

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПІВПРОСТОРІВ,  
ОДИН З ЯКИХ МІСТИТЬ ПРИПОВЕРХНЕВУ ВИЙМКУ  
ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: kirilyuk\_v@ukr.net*

**Abstract.** Based on a rigorous mathematical statement that takes into account the coupling of force and electric fields, the problem of compression of two electroelastic transversely isotropic half-spaces is considered. One of the half-spaces contains the inclined near-the-surface groove of an elliptical cross-section. An analytical solution of the problem is obtained by representing the solution of the static equations of the electroelasticity in terms of the harmonic functions, classical harmonic potentials and by reducing the boundary problem to analysis of the integro-differential equation with an unknown domain of integration. As a special case, the parameters of the contact of two elastic transversely isotropic half-spaces (if there is an elliptical cross-section groove in one of them) follow from the found analytical expressions as well as the parameters of the contact interaction of two electroelastic half-spaces, one of which contains the axisymmetric groove. The numerical results are obtained. The influence of the electroelastic properties of half-spaces, geometrical parameters of the groove, and loading on the contact interaction as well as the closure of the gap between the bodies is studied.

**Key words:** electroelastic half-space, near-surface groove, elliptical section, contact interaction, parameters of contact.

**Вступ.**

При проектуванні елементів конструкцій широко застосовуються біматеріали, складові яких мають різні пружні та електропружні властивості, в тому числі анізотропні. Це стимулює проведення досліджень розподілу напружень у пружних та електропружних тілах, що містять різні за властивостями складові, поблизу концентраторів напружень, а також при контактній взаємодії. В той же час, розв'язання просторових задач теорії пружності і електропружності для анізотропних тіл значно ускладнюється, оскільки у цих випадках необхідно розв'язувати граничну задачу для системи рівнянь з врахуванням анізотропних властивостей матеріалу (задача теорії пружності) та ще зв'язаності силових і електричних полів (задача електропружності), що мають суттєво більш складну структуру в порівнянні з системою рівнянь для ізотропного пружного тіла.

Розподіл напружень у п'єзоелектричних тілах з концентраторами напружень вивчався у ряді робіт [1, 6–11, 13–20], серед яких з більшою повнотою вивчено двовимірні задачі електропружності [7–9, 14, 17]. Представлення розв'язків системи рівнянь статичної електропружності у тривимірній постановці для п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних тіл через гармонічні функції отримано у статтях [15, 18]. Важливі результати досліджень напруженого стану просторових трансверсально-ізотропних електропружних тіл отримано у роботах [1, 3, 10, 13, 15, 16, 18].

Зауважимо, що задачі контактної взаємодії для двох пружних ізотропних півпросторів за наявності у одному з них похилої приповерхневої виїмки кругового та еліптичного перерізу досліджувались у роботах [2, 3], а у випадку жорсткого включення

між пружними півпросторами – у статтях [5, 12]. В той же час, задача контактної взаємодії двох електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів за наявності приповерхневої виїмки еліптичного перерізу в одному з них не вивчалась.

У даній статті на основі строгої математичної моделі досліджено контактну взаємодію при стиску двох п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів, один з яких містить приповерхневу виїмку еліптичного перерізу. При постановці задачі припускається, що поверхня поділу двох п'єзоелектричних тіл розташована у площині ізотропії обох електропружних трансверсально-ізотропних матеріалів. Також вважається, що поверхні півпросторів є неелектродованими (не містять електродного покриття) і між тілами має місце гладкий (без тертя) контакт. За допомогою представлення розв'язку рівнянь статичної електропружності для трансверсально-ізотропного тіла через гармонічні функції і подальшого зведення задачі електропружності до розгляду інтегро-диференціального рівняння отримано аналітичний розв'язок задачі. Знайдено основні параметри контактної взаємодії п'єзоелектричних пружних півпросторів за наявності у одному з них приповерхневої виїмки еліптичного перерізу при стиску. Як частинний випадок, із отриманих виразів випливають параметри контактної взаємодії двох пружних трансверсально-ізотропних півпросторів за наявності у одному з них виїмки еліптичного перерізу, а також параметри контакту двох електропружних півпросторів, один з яких містить виїмку кругового перерізу.

### 1. Постановка задачі.

Розглянемо контактну взаємодію двох електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів, один з яких (тіло 2) містить приповерхневу виїмку еліптичного перерізу (рис. 1).

Припускаємо, що геометрична форма виїмки описується наступним виразом:

$$f_0(x, y) = \begin{cases} -h_0(1 - x^2/a_0^2 - y^2/b_0^2)^{3/2}; & \sqrt{x^2/a_0^2 + y^2/b_0^2} \leq 1 \quad (h_0 \ll \max(a_0, b_0)); \\ 0; & \sqrt{x^2/a_0^2 + y^2/b_0^2} > 1. \end{cases} \quad (1)$$

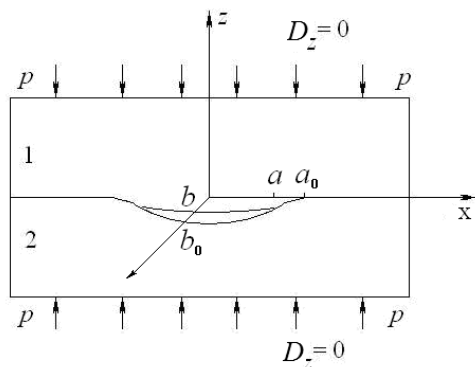


Рис. 1

При розгляді задачі вважаємо, що площина контакту електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів розташована у площині ізотропії обох п'єзоелектричних матеріалів. Припускаємо, що до контактуючих тіл прикладені стискаючі зусилля  $p$  і контакт між тілами відбувається не по всій площині  $z=0$ , а по деякій її частині  $\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2} > 1$ , де  $a, b$  – невідомі параметри області еліптичної форми (рис. 1), які залежать від значення стискаючих зусиль  $p$ , геометрії початкової виїмки (описується параметрами  $a_0, b_0$  і  $h_0$ ), пружних властивостей обох електропружних трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів. Припускаємо, що в процесі деформування виїмка набуває вигляду, який можна описати аналогічно виразу (1)

$$f_0(x, y) = \begin{cases} -h(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{3/2}; & x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1 \quad (h \ll \max(a, b)); \\ 0; & x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1. \end{cases}$$

На поверхні поділу (у площині  $z=0$ ) отримуємо наступні граничні умови:

$$\sigma_{zz}^{(i)} = 0; \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1; \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} + f_0(x, y); \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1 \quad (i=1, 2);$$

$$\sigma_{zx}^{(i)} = \sigma_{zy}^{(i)} = 0; \quad z = 0; \quad \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}; \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1 \quad (i=1, 2); \quad (2)$$

$$D_z^{(i)} = 0; \quad z = 0 \quad (i=1, 2),$$

де індекси «1» та «2» відповідають першому та другому електропружним тілам. Відзначимо, останні граничні умови у формулах (2) відповідають відсутності електродного покриття на поверхнях обох півпросторів.

Припускаємо, що площина  $z = 0$  (рис. 1), яка обмежує два півпростори, є площиною ізотропії обох електропружних трансверсально-ізотропних матеріалів, тобто вісь  $Oz$  є віссю симетрії для цих матеріалів. Також вважаємо, що у площині контактної взаємодії  $z = 0$  виконуються умови гладкого (без тертя) контакту електропружних тіл. Розміри області розшарування двох електропружних півпросторів (рис. 1) є невідомими і визначаються з розв'язку задачі. Параметри контактної взаємодії п'єзоелектричних тіл залежать від значення стискаючих зусиль  $p$ , електропружних властивостей обох матеріалів півпросторів і геометричних параметрів виїмки.

Представимо напружений стан у електропружних трансверсально-ізотропних півпросторах суперпозицією двох станів, перший з яких – стиск вздовж осі симетрії матеріалів  $Oz$ , тобто  $\sigma_{zz} = -p$  (при  $D_z = 0$ ), а для визначення другого стану суперпозиції (збуреного стану) на поверхні півпростору  $z = 0$  отримуємо відповідні граничні умови.

Зазначимо, що при розгляді задачі припускаємо, що при деформуванні півпросторів форма виїмки описується неперервно-диференційованою функцією  $f(x, y)$ , яка задовольняє умовам

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_1} \ll 1; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_2} \ll 1 \quad (x, y) \in S;$$

$$f(x, y) = 0; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_2} = 0 \quad (x, y) \in \partial S,$$

де  $S$  – поверхня виїмки. При віддаленні від області контакту мають місце умови на нескінченності для електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів

$$\sigma_{zz} \rightarrow -p; \quad \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz} \rightarrow 0; \quad D_x, D_y, D_z \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Умови (3) відповідають згасанню збуреного стану при віддаленні від виїмки.

## 2. Основні рівняння і співвідношення.

Рівняння статки електропружності для трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного тіла стосовно компонентів вектора переміщень і електричного потенціалу  $\Psi$  мають наступний вигляд [1]

$$c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0;$$

$$c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0;$$

$$(c_{13}^E + c_{44}^E) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + e_{15} (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0; \quad (4)$$

$$(e_{13} + e_{15}) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15} (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = 0.$$

У рівняннях (4)  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  – незалежні пружні сталі;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  – п'єзомодулі;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  – діелектричні проникності.

Розв'язок системи рівнянь (4) згідно [15] можна виразити через чотири потенціальні функції  $\Phi_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ )

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \quad (5)$$

де  $k_j, l_j$  – деякі сталі, а функції  $\Phi_j$  задовольняють рівнянням

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (6)$$

$\nu_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ , значення  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) є коренями алгебраїчного рівняння третього порядку [15], коефіцієнти якого залежать від електропружних властивостей п'єзоелектричного матеріалу. При введенні позначень  $z_j = zn_j^{-1/2}$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) функції  $\Phi_1(x, y, z_1)$ ,  $\Phi_2(x, y, z_2)$ ,  $\Phi_3(x, y, z_3)$ ,  $\Phi_4(x, y, z_4)$  згідно (6) стають гармонійними функціями у відповідних системах координат.

### 3. Метод розв'язування.

При побудові розв'язку контактної задачі для двох електропружних трансферсально-ізотропних півпросторів скористаємось представленням (5). Потенційні функції  $\Phi_i(x, y, z_i)$  на основі гармонійних потенціалів візьмемо у наступному вигляді:

$$\Phi_i^{(k)}(x, y, z_i) = -\frac{\alpha_i^{*(k)}}{2\pi} \left( \iint_{S_1} \frac{h(\bar{\xi}) d_{\xi} S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} + \iint_{S_0} \frac{r(\bar{\xi}) d_{\xi} S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} \right), \quad (7)$$

де  $h(\xi_1, \xi_2) = h_1(1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/b^2)^{3/2}$ ;  $r(\xi_1, \xi_2) = -h_0(1 - \xi_1^2/a_0^2 - \xi_2^2/b_0^2)^{3/2}$ ;  $S_1$  і  $S_0$  – еліптичні ділянки; значення індексу  $k = 1$  відповідає першому півпростору; значення  $k = 2$  – другому півпростору (з виїмкою еліптичного перерізу). Далі знайдемо значення  $\alpha_j^{*(k)}$  із системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*(k)} \left( c_{44}^{E(k)} (1 + k_j^{(k)}) + e_{15}^{(k)} l_j^{(k)} \right) = 1; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*(k)} \left( c_{44}^{E(k)} (1 + k_j^{(k)}) + e_{15}^{(k)} l_j^{(k)} \right) / \sqrt{v_j^{(k)}} = 0; \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*(k)} \left( e_{15}^{(k)} (1 + k_j^{(k)}) - \varepsilon_{11}^{S(k)} l_j^{(k)} \right) = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Потім визначимо  $\alpha_j^{**(k)} = \alpha_j^{*(k)} / M^*$ , де

$$M^* = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*(1)} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}} + \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*(2)} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}}.$$

Відзначимо, що потенціали виду (7) використовувались також для вивчення контактної взаємодії пружних ізотропних півпросторів, один з яких містив виїмку еліптичного перерізу [2]. При такому виборі  $\alpha_j^{*(k)}$  задовольняються граничні умови по дотичних напруженнях і електричному стану вздовж усієї поверхні поділу, по переміщеннях, а також має місце рівність нормальних напружень поза виїмкою. Невідомими залишаються наступні параметри:  $a, b$  – значення півосей площадки контакту

еліптичної форми (рис. 1);  $h_1$  – максимальна висота проміжку в результаті контакту двох електропружних півпросторів. Значення цих параметрів визначимо з розв'язку контактної задачі.

За допомогою потенціальних функцій (7) і співвідношень (8), задовольняючи граничні умови, що залишилися, отримуємо інтегро-диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_1} \frac{h(\vec{\xi}) d_{\xi} S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} = \\ & = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_0} \frac{r(\vec{\xi}) d_{\xi} S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} + 2\pi M^* p, \quad (x, y) \in S_1, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} M^* &= \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*(1)} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}} + \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{*(2)} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}}; \quad h(\xi_1, \xi_2) = h_1 (1 - \xi_1^2 / a^2 - \xi_2^2 / b^2)^{3/2}, \\ r(\xi_1, \xi_2) &= -h_0 (1 - \xi_1^2 / a_0^2 - \xi_2^2 / b_0^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Після проведення диференціювання у (9), скористасмося значеннями двовимірних інтегралів по еліптичній області [4]. В результаті отримуємо

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint \frac{h(\xi) d_{\xi} S}{|x-\xi|} = \alpha_0 + A_0 x_1^2 + B_0 x_2^2, \quad x \in S, \quad (10)$$

де

$$d_{\xi} S = d\xi_1 d\xi_2; \quad k_0 = 3a_0 r_0 / 4e_0^2 b_0^4 f_0; \quad r_0 = h_0; \quad A_0 = k_0 [E(e_0)(1+e_0^2) / f_0 - K(e_0)];$$

$$B_0 = k_0 [(2e_0^2 - 1)E(e_0) + f_0 K(e_0)]; \quad \alpha_0 = M^* p - k_0 e_0^2 b_0^2 E(e_0);$$

$$f_0 = 1 - e_0^2; \quad e_0 = \sqrt{1 - a_0^2 / b_0^2}.$$

У наведених виразах (10)  $K(e_0)$ ,  $E(e_0)$  є повними еліптичними інтегралами першого та другого роду.

Припускаючи, що ділянка контакту є еліптичною з поки невідомими півосями  $a, b$ , визначимо висоту зазору між контактуючими тілами у вигляді  $h(x_1, x_1) = \beta (1 - x_1^2 / a^2 - x_2^2 / b^2)^{3/2}$ . Скориставшись значеннями інтегралів по еліптичній ділянці [4], отримуємо

$$\alpha + Ax_1^2 + Bx_2^2 = a_0 + A_0 x_1^2 + B_0 x_2^2,$$

де

$$\alpha = -ke^2 b^2 E(e); \quad A = k [E(e)(1+e^2) / f - K(e)]; \quad B = k [(2e^2 - 1)E(e) + fK(e)];$$

$$f = 1 - e^2; \quad k = 3\alpha\beta / (4e^2 b^4 f); \quad e = \sqrt{1 - a^2 / b^2}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових структурних складових, знаходимо

$$a = a_0 \sqrt{1 - N_0}; \quad b = b_0 \sqrt{1 - N_0}; \quad h = r_0 [1 - N_0]^{3/2}; \quad N_0 = 2M^* p b_0 \sqrt{1 - e_0^2} / (3r_0 E(e_0)). \quad (11)$$

Таким чином, із виразів (11) за відомими розмірами початкової виїмки (параметри  $a_0$ ,  $b_0$  і  $h_0$ ), значеннями стискаючих зусиль  $p$ , двадцятьма незалежними пружними сталими двох п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів (входять через величину  $M^*$ ) знаходимо значення півосей ділянки контакту  $a$ ,  $b$  і максимальну висоту нової виїмки (як результат контактної взаємодії).

Відзначимо, що з формул (11) можна визначити значення стискаючих зусиль  $p$ , при якому виїмка між електропружними тілами повністю заповнюється матеріалом. Видно, що при  $N_0 = 1$  значення півосей  $a$ ,  $b$  та максимальної висоти виїмки  $h_1$  дорівнюють нулю. Отже, при  $p \geq p^* = [r_0 3E(e_0)] / (2M^* b_0 \sqrt{1 - e_0^2})$  виїмка еліптичного перерізу у електропружному тілі повністю зникає (заповнюється матеріалом).

Як частинний випадок зі знайдених аналітичних виразів для виїмки еліптичного перерізу впливають параметри контактної взаємодії для виїмки осесиметричної форми. Так, у випадку виїмки кругового перерізу, спрямувавши ексцентриситет еліпса до нуля, отримуємо, що  $a_0 = b_0$ ,  $a = b$ , а зі знайдених виразів (11) маємо

$$N_0 = 4M^* p a_0 / (r_0 3\pi); \quad a = a_0 \sqrt{1 - \frac{4p a_0 M^*}{3\pi r_0}}; \quad h = h_0 \left(1 - \frac{4p a_0 M^*}{3\pi r_0}\right)^{3/2}. \quad (12)$$

Отже, з формул (12) за відомими розмірами осесиметричної початкової виїмки (параметри  $a_0$  та  $h_0$ ), значеннями стискаючих зусиль  $p$  та електропружних сталих визначаємо значення  $a$  і максимальну висоту зазору  $h$  (після контактної взаємодії). Також із рівності нулю параметра  $a$  знаходимо значення сили стиску, при якому виїмка у електропружному тілі повністю заповнюється матеріалом. При значенні  $p \geq p^* = (3\pi h_0) / (4a_0 M^*)$  приповерхнева виїмка у п'єзоелектричному матеріалі в результаті контактної взаємодії повністю зникає.

Зазначимо, що при розгляді частинного випадку задачі (випадку приповерхневої виїмки кругового перерізу) з'являється можливість використання альтернативного алгоритму розв'язання задачі, пов'язаного із застосуванням парних інтегральних рівнянь.

При переході від електропружного до чисто пружного трансверсально-ізотропного матеріалу маємо

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{v_j} \rightarrow \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11} n_1 + c_{13})(c_{11} n_2 + c_{13})}, \quad (13)$$

де  $n_1, n_2$  – корені квадратного рівняння

$$c_{11} c_{44} n^2 - [c_{44}^2 + c_{33} c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2] n + c_{33} c_{44} = 0, \quad (14)$$

які залежать від пружних властивостей трансверсально-ізотропного матеріалу. Заміняючи у виразі  $M^*$  величини обох доданків за допомогою формул (13), отримуємо параметри контакту двох пружних трансверсально-ізотропних півпросторів (один з яких містить виїмку еліптичного перерізу).

В результаті подальших перетворень виразу (13) (з використанням теореми Вієта для коренів квадратного рівняння (14)) маємо

$$\frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11} n_1 + c_{13})(c_{11} n_2 + c_{13})} = \frac{\sqrt{c_{11}}}{(c_{11} c_{33} - c_{13}^2) \sqrt{c_{44}}} \left[ \sqrt{c_{11} c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{44} c_{13} + 2c_{44} \sqrt{c_{11} c_{33}}} \right]. \quad (15)$$

Тому для випадку взаємодії двох пружних трансверсально-ізотропних матеріалів параметри контактної взаємодії можна отримати за допомогою формул (11), замінюючи у них вираз  $M^*$  значенням  $L^*$ , де

$$L^* = \frac{\sqrt{c_{11}^{(1)}}}{(c_{11}^{(1)}c_{33}^{(1)} - (c_{13}^{(1)})^2)\sqrt{c_{44}^{(1)}}} \left[ \sqrt{c_{11}^{(1)}c_{33}^{(1)} - (c_{13}^{(1)})^2} - 2c_{44}^{(1)}c_{13}^{(1)} + 2c_{44}^{(1)}\sqrt{c_{11}^{(1)}c_{33}^{(1)}} \right] + \frac{\sqrt{c_{11}^{(2)}}}{(c_{11}^{(2)}c_{33}^{(2)} - (c_{13}^{(2)})^2)\sqrt{c_{44}^{(2)}}} \left[ \sqrt{c_{11}^{(2)}c_{33}^{(2)} - (c_{13}^{(2)})^2} - 2c_{44}^{(2)}c_{13}^{(2)} + 2c_{44}^{(2)}\sqrt{c_{11}^{(2)}c_{33}^{(2)}} \right]. \quad (16)$$

При наступному граничному переході у виразах (13), (15), (16) від трансверсально-ізотропного до пружного ізотропного матеріалу маємо

$$c_{11} = \lambda + 2\mu; c_{13} = \lambda; c_{44} = \mu; n_1 = n_2 = 1.$$

Тоді з формул (13) отримуємо

$$\frac{c_{11}}{c_{44}} \frac{(n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{(c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})} \rightarrow \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} = \frac{1 - \nu}{\mu}.$$

Отже, для опису контактної взаємодії двох ізотропних пружних півпросторів (один з приповерхневою виїмкою еліптичного перерізу) можна скористатись формулами (11), замінюючи значення  $M^*$  величиною  $N^* = (1 - \nu_1) / \mu_1 + (1 - \nu_2) / \mu_2$ .

Зазначимо також, що цілком аналогічним чином на основі отриманих результатів можна знайти параметри контактної взаємодії різних комбінацій матеріалів півпросторів (електропружний трансверсально-ізотропний матеріал, пружний трансверсально-ізотропний чи ізотропний матеріал).

#### 4. Аналіз результатів числових досліджень.

На рис. 2, 3 відображено залежності радіусу і висоти осесиметричного зазору (частинного випадку зазору еліптичного перерізу) між п'єзоелектричними півпросторами від діючих навантажень (суцільні лінії). Лінії 1, 2, 3, 4, 5 на рис. 2, 3 відповідають електропружним матеріалам PZT-5Н, PZT-7А, PZT-4, Р-7, PZT-5. На рисунках використано позначення  $p_1^*$ , яке обчислюється за допомогою виразу  $p^* = (3\pi r_0) / (4M^* b_0)$  для матеріалу PZT-5Н. Відображено зміну радіусу і висоти зазору при збільшенні навантаження.

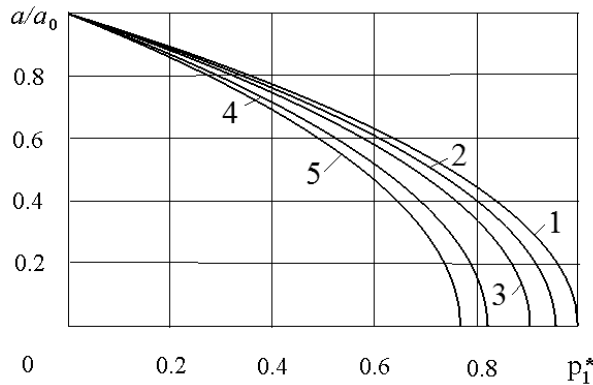


Рис. 2

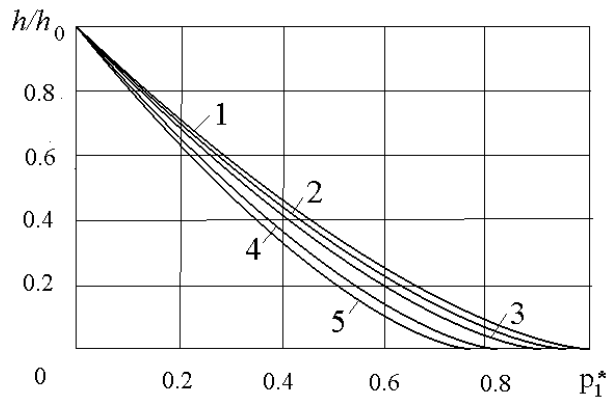


Рис. 3

Вплив ефекту зв'язаності силових і електричних полів на параметри контакту тіл можна оцінити на основі обчислень відношення  $M^*/L^*$  для кожного конкретного п'єзоелектричного матеріалу. Так, для п'єзокерамічних матеріалів PZT-4, PХЕ-5, PZT-5, PZT-7A, ВаTiO3, PZT-5Н, Р-7 отримуємо  $M^*/L^* = 0,695; 0,735; 0,696; 0,737; 0,854; 0,784; 0,711$ .

На рис. 4, 5 суцільні лінії відповідають п'єзоелектричному матеріалу PZT-5Н, а штрихові лінії – випадку чисто пружного трансверсально-ізотропного матеріалу, пружні властивості якого співпадають з властивостями п'єзоелектричного матеріалу PZT-5Н. Тоді, порівнюючи параметри контакту (радіус зазору і його висоту) для суцільних ліній (п'єзоелектричний матеріал PZT-5Н) і штрихових ліній (пружний трансверсально-ізотропний матеріал), можна оцінити вплив зв'язаності силових і електричних полів на параметри контактної взаємодії.

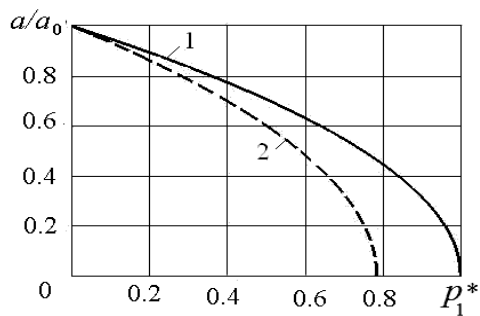


Рис. 4

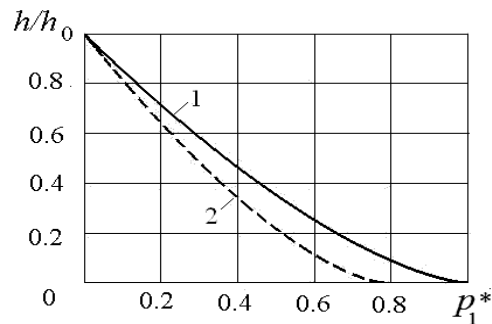


Рис. 5

Видно, що зв'язаність силових і електричних полів перешкоджає закриттю виїмки при стисненні електропружного півпростору з основою. Для закриття зазору при контакті з п'єзопружним півпростором потрібні більші значення стискаючих зусиль, ніж для пружного трансверсально-ізотропного півпростору (з тими ж пружними властивостями, що й електропружний матеріал). Відзначимо, що якісно така закономірність має місце і для всіх інших матеріалів, використаних при розрахунках (PZT-4, PХЕ-5, PZT-5, PZT-7A, ВаTiO3, Р-7).

На рис. 6, 7 відображено зміну геометричних параметрів виїмки при навантаженні; лінії 1, 2, 3 відповідають значенням ексцентриситету еліпса  $e = 1; 0,2; 0,4$ . Було використано позначення  $p^{*(0,4)}$ , яке відповідало значенню навантажень, що закривають виїмку  $p^*$  при  $e = 0,4$ .



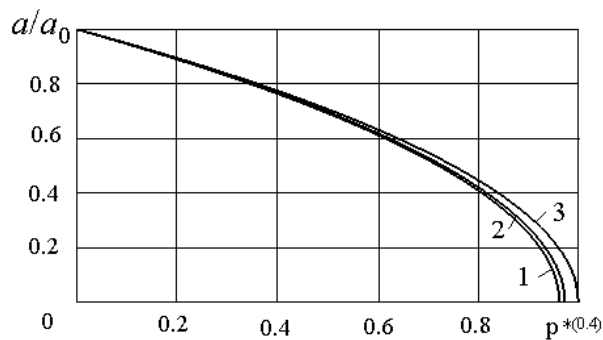


Рис. 6

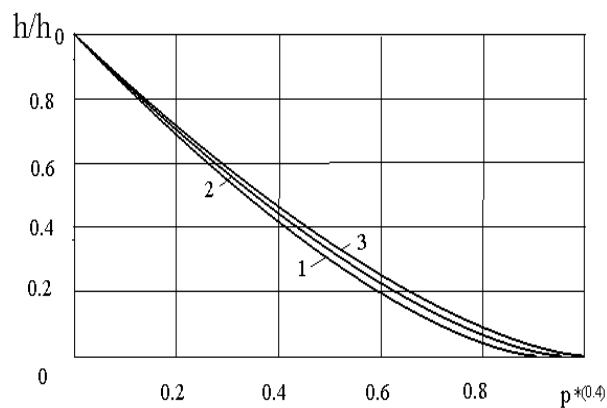


Рис. 7

### Висновки.

У роботі за допомогою строгої постановки задачі, що враховує зв'язаність силових і електричних полів, та представлення загального розв'язку системи рівнянь статки електропружності через гармонічні функції знайдено аналітичний розв'язок задачі про контактну взаємодію двох п'єзоелектричних трансверсально-ізотропних півпросторів при стиску (за наявності у одному з них приповерхневої похилої виїмки еліптичного перерізу). Чисельно досліджено вплив геометричних параметрів виїмки, електропружних властивостей п'єзоелектричних півпросторів та силових навантажень на контактну взаємодію електропружних тіл.

Наукові дослідження, результати яких опубліковані у цій статті, виконані за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** На основі строгої математичної постановки, що враховує зв'язаність силових і електричних полів, розглянуто задачу про стиск двох електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів, один з яких містить похилу приповерхневу виїмку еліптичного перерізу. Аналітичний розв'язок задачі отримано за допомогою представлення розв'язку рівнянь статки електропружності через гармонічні функції та зведення граничної задачі до розгляду інтегро-диференціального рівняння з невідомою областю інтегрування. Як частинний випадок, із знайдених аналітичних виразів отримано параметри контакту двох пружних трансверсально-ізотропних півпросторів (за наявності у одному з них виїмки еліптичного перерізу), а також параметри контактної взаємодії двох електропружних півпросторів, один з яких містить виїмку осесиметричної форми. Отримано числові результати, вивчено вплив електропружних властивостей півпросторів, геометричних параметрів виїмки та навантаження на контактну взаємодію, а також закриття зазору між тілами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: електропружний півпростір, приповерхнева виїмка, еліптичний переріз, контактна взаємодія, параметри контакту.

1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти томах. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. *Kim G.S., Мартиняк Р.М.* Просторові контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з поверхневими виїмками // *Мат. методи та фіз.- мех. поля.* – 1999. – **42**, № 6. – С. 7 – 11.
3. *Монастирський Б.С.* Осесиметрична контактна задача для півпросторів з геометричним збуренням поверхні // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* – 1999. – № 6. – С. 22 – 26.
4. *Хай М.В.* Двумерные интегральные уравнения ньютоновского потенциала и их приложения – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с
5. *Gladwell G.M.L.* On Inclusions at a Bi-Material Elastic Interface // *J. Elasticity.* – 1999. – **54**, N 1. – P. 27 – 41.
6. *Govorukha V., Kamlah M., Sheveleva A.* Influence of concentrated loading on opening of an interface crack between piezoelectric materials in a compressive field // *Acta Mech.* – 2015. – **226**, N 7. – P. 2379 – 2391.
7. *Govorukha V., Sheveleva A., Kamlah M.* A crack along a part of an interface electrode in a piezoelectric bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings // *Acta Mech.* – 2019. – **230**, N 6 – P. 1999 – 2012.
8. *Kaloerov S.A.* Determining the Intensity Factors for Stresses, Electric-flux Density, and Electric-field Strength in Multiply Connected Electroelastic Anisotropic Media // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 631 – 637.
9. *Kirilyuk V.S.* Thermoelastostressed State of a Piezoelectric Body with a Plane Crack under Symmetric Thermal Load // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 3. – P. 320 – 330.
10. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Piezoceramic Body with a Plane Crack opened by a Rigid Inclusion // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 7. – P. 757 – 768.
11. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.* Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Body with a Triaxial Ellipsoidal Inclusion Subject to Tension // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 3. – P. 305 – 310.
12. *Kotousov A., Neto L.B., Khanna A.* On a rigid inclusion pressed between two elastic half spaces // *Mechanics of Materials.* – 2014. – **68**, № 1. – P. 38 – 44.
13. *Kyryliuk V.S., Levchuk O. I.* Stress State of an Orthotropic Electroelastic Medium with an Arbitrarily Oriented Elliptic Crack under Uniaxial Tension // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 1. – P. 53 – 62.
14. *Loboda V.V., Kryvoruchko A.G., Sheveleva A.Y.* Electrically plane and mechanically antiplane problem for an inclusion with stepwise rigidity between piezoelectric materials // *Advanced Struct. Materials*, 2019. – **94**. – P. 463 – 481
15. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the General Solution of Statics Equations of the Electroelasticity of a Transversally Isotropic Piezoceramic Body in Terms of Harmonic Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 7. – P. 623 – 628.
16. *Podil'chuk Yu.N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastostatic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **394**, N 2. – P. 132 – 170.
17. *Wang Y.J., Gao C.F., Song H.P.* The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material // *Mechanics Research Communications.* – 2015. – **65**. – P. 17 – 23.
18. *Wang Z.K., Zheng B.L.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**, N 1. – P. 105 – 115.
19. *Zhao M.H., Li Y., Yan Y., Fan C.Y.* Singularity analysis of planar cracks in three-dimensional piezoelectric semiconductors via extended displacement discontinuity boundary integral equation method // *Engng. Analysis with Boundary Elements.* – 2016. – **67**. – P. 115 – 125.
20. *Zhao M.H., Pan Y.B., Fan C.Y., Xu G.T.* Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors // *Int. J. Solids Struct.* – 2016. – **94 – 95**. – P. 50 – 59.

Надійшла 20.07.2021

Затверджена до друку 31.05.2022