

О.І.Беспалова

**НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНО НЕОДНОРІДНИХ ПОЛОГИХ
ОБОЛОНОК НА ОСНОВІ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ
ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: elena_bespalova@ukr.net*

Abstract. A numerical-analytical approach to the study of nonlinear deformation of shallow shells under subcritical loads, which is based on a rational combination of the generalized method of finite integral transformations and the linearization method on Newton-Kantorovich-Raphson, is proposed. An analysis of the static stiffness and the "load - deflection" dependence for flexible shallow shells with different boundary conditions in a wide range of Gaussian curvature values and in the presence of discrete inclusions are carried out. It is shown that the dependence of the upper critical values of the external pressure on the placement of discrete inclusions has a non-monotonic character, which makes it possible to determine their rational placement in the sense of static stability and the carrying ability of the shells.

Key words: shallow shells, discrete inclusions, static stability, generalized method of finite integral transformations, quasi-linearization method, analysis.

Вступ.

Пологі оболонки охоплюють широкий клас тонкостінних об'єктів, що використовуються як конструктивні елементи машинобудування, будівництва, аерокосмічної і морської техніки тощо, та характеризуються певними особливостями своєї механічної поведінки. Аналіз їх стаціонарного деформування, включаючи напружено-деформований стан, коливання і стійкість при різного роду статичних навантаженнях, є важливою умовою оцінки функціональної придатності цих оболонок в реальних режимах експлуатації.

Інтерес до вивчення нелінійного деформування пологих оболонок в різних його аспектах, зокрема статичної стійкості, не зменшується і до сьогодні [15, 17, 24].

Широкого розповсюдження набули науково-технічні проекти, що орієнтовані на розв'язання конкретних практичних задач і є затребуваними в плані архітектурної оцінки сучасного дизайну. Так, проект [19] вирішив проблему геометрично нелінійної поведінки оболонок на прикладі реальної покрівлі спортзалу гімназії в Хальстенбеке (Веймар, Німеччина), що двічі руйнувалась внаслідок втрати стійкості ще перебуваючи в стані будівництва. Сталево-скляна покрівля була запроєктована у вигляді овалної в плані пологої оболонки, були визначені критичні значення вітрового навантаження і зовнішнього тиску, оцінено вплив опор, стиків, тощо на основі розрахунків за методом скінчених елементів (MSE, ANSYS).

Застосуванню пологих панелей при традиційному і механізованому способах видобутку гірських порід, визначенню максимальних безпечних прольотів, раціональної орієнтації сполучних елементів в купольних конструкціях присвячені роботи [21, 24].

Ґрунтовні дослідження за цією тематикою охоплюють неоднорідні оболонки складної структури по товщині: багатошарові (дискретно неоднорідні) та оболонки з функціонально-градієнтних матеріалів (неперервно неоднорідні) [8, 9, 14, 15, 18, 23].

Як засіб підвищення несучої здатності пружних об'єктів розглядалися ізотропні і ортотропні пологі оболонки змінної товщини в одному [1] та двох [17] координатних напрямках.

Аналіз стійкості оболонок проводився в статичних полях різної природи, зокрема при наявності термічного середовища, при дії зовнішнього тиску і вітру, стискаючих концентрованих механічних і локалізованих теплових навантаженнях, тощо [6, 13, 14, 18 – 20, 22, 23, 25].

Зростає інтенсивність досліджень нелінійного деформування пологих оболонок і пластин з наноматеріалів, як актуального напрямку розвитку механіки деформівного тіла [15].

Оцінка стійкості пологих оболонок-панелей в переважній більшості проводиться при умовах шарнірного опирання, жорсткого закріплення та їх комбінації [6, 9, 25] і досить рідко – при наявності незакріплених вільних від навантаження ділянок граничного контуру [20], хоча цей тип граничних умов досить поширений в практиці будівництва.

Математичний апарат розв'язування відповідних нелінійних (лінійних) крайових задач представлений в своїй більшості різними схемами МСЕ, варіаційним методом Рітца, проєкційним методом Гальоркіна в поєднанні з сучасними доробками лінійної і нелінійної алгебри [1, 6, 14, 15, 17 – 19]. Зауважимо, що для лінійних задач можна застосовувати нетрадиційні підходи, наприклад, метод дискретних рядів Фур'є [16], метод повних систем [12].

Слід виділити окрему групу так званих дискретно неоднорідних оболонок. В таких оболонках для підвищення їх жорсткості і стійкості використовуються різного роду підкріплюючі елементи (ребра, накладки, бандажі, пружні опори), а згідно технологічних вимог, вони можуть мати разом з тим різного виду вирізи та отвори. При цьому природньо виникають питання вибору раціональних геометричних параметрів оболонок, характеристик жорсткості дискретних включень, їх оптимального розміщення, тощо.

В даній статті пропонується новий розв'язок нелінійної двовимірної крайової задачі по визначенню напружено-деформованого стану (НДС) оболонкових елементів в докритичній стадії деформування на основі поєднання узагальненого методу скінчених інтегральних перетворень і методу лінеаризації за Ньютоном – Канторовичем – Рафсоном. Розроблений підхід застосовується для дослідження НДС гнучких пологих панелей в широкому діапазоні зміни їх гауссової кривизни та для аналізу впливу розташування дискретних включень на стійкість цих оболонок.

1. Постановка задачі.

Розглядається полого оболонка сталого товщини h , серединна поверхня якої в проєкціях на декартову систему координат x, y займає прямокутну область $\Omega \cup \partial\Omega = \{x, y : x \in [x_0, x_1], y \in [y_0, y_1]\}$, має кривизни k_x, k_y в напрямку координатних осей та гауссову кривизну $K = k_x k_y$. Оболонка знаходиться на пружному Вінклерівському підґрунті з коефіцієнтом $K_p = K_p(x, y)$, а в області Ω на неї діє вектор розподілених навантажень $\vec{q} = \{q_x, q_y, q_n\}$, де індекс n вказує напрямок, перпендикулярний до її серединної поверхні. На умови закріплення контуру ніяких обмежень, окрім їх фізичної несумісності, не накладається, так що в кожній точці границі $\partial\Omega$ можуть бути задані зусилля-моменти, переміщення або їх комбінації. Матеріал оболонки приймається ізотропним і лінійно пружним в усьому діапазоні діючих навантажень аж до їх граничних критичних значень.

Цей клас тонкостінних об'єктів охоплює: прямокутні пластини ($k_x = 0, k_y = 0; K = 0$), циліндричні панелі ($k_x = 0, k_y \neq 0; K = 0$), елементи сферичних ($k_x > 0, k_y > 0; K > 0$) та сідловидних ($k_x > 0, k_y < 0; K < 0$) оболонок.

Механіко-математична модель деформування таких оболонок при докритичних навантаженнях формується на основі співвідношень геометрично нелінійної теорії

середнього згину в квадратичному наближенні за теорією Муштарі – Доннелла – Власова і описується нелінійною двовимірною крайовою задачею, яку можна представити в такому векторно-матричному вигляді (див., наприклад, [4]):

$$D(\vec{U}) = L\vec{U} + \vec{g} + \vec{f} = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (1)$$

$$G_{xp}(\vec{U}) = R_{xp}\vec{U} + \vec{s}_{xp} + \vec{\varphi}_{xp} = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \quad (2)$$

$$G_{yp}(\vec{U}) = R_{yp}\vec{U} + \vec{s}_{yp} + \vec{\varphi}_{yp} = 0, \quad y = y_p \quad (p = 0; 1). \quad (3)$$

Тут $D(\vec{U})$ та $G_{xp}(\vec{U})$, $G_{yp}(\vec{U})$ – нелінійні матричні диференціальні оператори, задані в області Ω та на її границі $\partial\Omega$; $\vec{U} = \{u(x, y), v(x, y), w(x, y)\}$ – шукана вектор-функція, компоненти якої є переміщення u, v, w вздовж координатних осей Ox, Oy та по нормалі до них; $L = \{l_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$), $\vec{g} = \{g_i(x, y)\}$ ($i = \overline{1, 3}$) та $\vec{f} = \{f_i(x, y)\}$ ($i = \overline{1, 3}$) ($f_i(x, y) = -q_i(x, y)$) – матричний лінійний диференціальний оператор, вектор-функція нелінійних членів та вільний член, що визначені в області Ω ; $R_{xp} = \{r_{ij}^{(xp)}\}$ ($i = \overline{1, 3}; j = \overline{1, 4}$), $\vec{s}_{xp} = \{s_i^{xp}(x, y)\}$ ($i = \overline{1, 4}$) та $\vec{\varphi}_{xp} = \{\varphi_{xp}(x, y)\}$ ($i = \overline{1, 4}$) – матричний лінійний диференціальний або алгебраїчний оператор, вектор-функція нелінійних членів та вільний член в граничних умовах на контурі $x = x_p$ ($p = 0; 1$); аналогічний зміст мають оператор та вектор-функції з індексом y_p для граничних умов при $y = y_p$ ($p = 0; 1$).

Вирази для елементів зазначених операторів та компонент вектор-функцій одержуються за стандартною технікою диференціювання.

2. Чисельно-аналітичний підхід до розв'язання нелінійних двовимірних задач (загальна схема).

В роботі для розв'язання нелінійної двовимірної крайової задачі виду (1) – (3) пропонується чисельно-аналітичний підхід, що базується на застосуванні узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень та методу лінеаризації за Ньютоном – Канторовичем – Рафсоном (метод квазілінеаризації).

Метод квазілінеаризації [2] має ряд переваг у порівнянні з іншими методами лінеаризації. Це, зокрема, широта області застосування, яка співпадає з областю опуклості оператора задачі і, як показано в [3], з докритичною стадією деформування оболонки, квадратичною збіжністю та алгоритмічністю ітераційного процесу, простотою вибору початкового наближення, тощо.

Узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень (МСІП*) орієнтований на розв'язання N -вимірних ($N \geq 2$) задач з нероздільними змінними. Для лінійних задач його основні положення сформульовані в [10] (двовимірні задачі статички неоднорідних пластин) і в [11] (тривимірні задачі теорії пружності анізотропних призм). Суть цього методу у двовимірному випадку полягає в побудові двох інтегральних перетворень за різними змінними області, так що ядра одного перетворення є трансформантами другого і навпаки. Невідомі ядра-трансформанти побудованих перетворень визначаються зі взаємозв'язаної системи двох одновимірних задач, яка розв'язується ітераційним способом, що є аналогом процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя в лінійній алгебрі. Шуканий розв'язок вихідної задачі визначається оберненим інтегральним перетворенням, що будується по знайденим ядрам-трансформантам.

Розв'язування нелінійної двовимірної крайової задачі за розробленим підходом складається з таких етапів.

Зведення нелінійної задачі до ітеративної послідовності лінеаризованих крайових задач за методом квазілінеаризації.

Розв'язання окремої лінеаризованої задачі за МСІП* на основі побудови двох інтегральних перетворень за різними змінними області.

Побудова спільного ітераційного процесу, що включає ітерації по лінеаризації вихідної задачі та визначення трансформант-ядер із системи двох інтегральних перетворень.

Еман 1. Застосування методу квазілінеаризації до вихідної нелінійної задачі (1) – (3) зводять її до ітеративної послідовності лінеаризованих двовимірних крайових задач такого вигляду ($n = 1, 2, \dots$ – параметр лінеаризації):

$$D(\vec{U}^{(n)}, \vec{U}^{(n-1)}, \dots) = L\vec{U}^{(n)} + J_{,\vec{U}}(\vec{U}^{(n)} - \vec{U}^{(n-1)}) + J_{,\vec{U},x}(\vec{U}_{,x}^{(n)} - \vec{U}_{,x}^{(n-1)}) + J_{,\vec{U},xx}(\vec{U}_{,xx}^{(n)} - \vec{U}_{,xx}^{(n-1)}) + J_{,\vec{U},y}(\vec{U}_{,y}^{(n)} - \vec{U}_{,y}^{(n-1)}) + J_{,\vec{U},xy}(\vec{U}_{,xy}^{(n)} - \vec{U}_{,xy}^{(n-1)}) + \dots + \bar{g}(\vec{U}^{(n-1)}, \vec{U}_{,x}^{(n-1)}, \dots) + \bar{f} = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (4)$$

$$G_{xp}(\vec{U}^{(n)}, \vec{U}^{(n-1)}, \dots) = R_{xp}\vec{U}^{(n)} + I_{,\vec{U}}(\vec{U}^{(n)} - \vec{U}^{(n-1)}) + I_{,\vec{U},x}(\vec{U}_{,x}^{(n)} - \vec{U}_{,x}^{(n-1)}) + I_{,\vec{U},y}(\vec{U}_{,y}^{(n)} - \vec{U}_{,y}^{(n-1)}) + \bar{\phi}_{xp} = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \quad (5)$$

$$G_{yp}(\vec{U}^{(n)}, \vec{U}^{(n-1)}, \dots) = R_{yp}\vec{U}^{(n)} + T_{,\vec{U}}(\vec{U}^{(n)} - \vec{U}^{(n-1)}) + T_{,\vec{U},x}(\vec{U}_{,x}^{(n)} - \vec{U}_{,x}^{(n-1)}) + T_{,\vec{U},y}(\vec{U}_{,y}^{(n)} - \vec{U}_{,y}^{(n-1)}) + \bar{\phi}_{yp} = 0, \quad y = y_p \quad (p = 0; 1), \quad (6)$$

де $D(\vec{U}^{(n)}, \vec{U}^{(n-1)}, \dots)$, $G_{xp}(\vec{U}^{(n)}, \vec{U}^{(n-1)}, \dots)$, $G_{yp}(\vec{U}^{(n)}, \vec{U}^{(n-1)}, \dots)$ – диференціальні або алгебраїчні оператори лінеаризованої задачі, що містять шукані функції двох послідовних наближень $\vec{U}^{(n)}$ та $\vec{U}^{(n-1)}$ і визначені відповідно в заданій області та на її границі;

$$J_{,\vec{U},xy} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_{j,xy}} \right) \Big|_{\vec{U}=\vec{U}^{(n-1)}} \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad I_{,\xi} = \left(\frac{\partial S_{xpi}}{\partial u_{j,\xi}} \right) \Big|_{\vec{U}=\vec{U}^{(n-1)}}; \quad T_{,\xi} = \left(\frac{\partial S_{ypi}}{\partial u_{j,\xi}} \right) \Big|_{\vec{U}=\vec{U}^{(n-1)}} \\ (i = \overline{1, 4}; j = 1, 2, 3; \xi = 0; x; y).$$

Еман 2. Розв'язання окремої лінеаризованої задачі з послідовності (4) – (6) на кожному фіксованому кроці ітераційного процесу квазілінеаризації ($n = fixed$) здійснюється за МСПП*.

2.1. Згідно основним положенням цього методу[10] вихідна задача (4) – (6) підлягає дії двох інтегральних перетворень I і II за різними змінними області.

Інтегральне перетворення I будується за змінною y в межах її визначення $y \in [y_0, y_1]$ з функціями ядра $\bar{Q}^{(n)} = \{q_{rk}^{(n)}(y)\}$, які поки що є невідомими, формулюється відносно функцій трансформант (зображень)

$$\vec{U}_x^{(n)} = \{r_{xi}^{(n)}(x) = \int_{y_0}^{y_1} r^{(n)}(x, y) q_{ri}^{(n)}(y) dy\} \quad (r^{(n)} = u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}), \quad (k = 1, 2, \dots, K, \dots)$$

і має вигляд

$$\int_{y_0}^{y_1} D(\vec{U}^{(n)}, \vec{U}^{(n-1)}, \dots) q_{rk}^{(n)}(y) dy = 0, \quad x \in (x_0, x_1); \\ \int_{y_0}^{y_1} G_{xp}(\vec{U}^{(n)}, \vec{U}^{(n-1)}, \dots) q_{rk}^{(n)}(y) dy = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1). \quad (7)$$

При інтегруванні рівняння (4) по частинах враховуються, як і в класичному методі скінченних інтегральних перетворень, граничні умови (6) за змінною інтегрування y .

Шуканий розв'язок задачі (4) – (6) – компоненти вектор-функції переміщення $\bar{U}^{(n)} = \{r^{(n)}(x, y)\}$ ($r^{(n)} = u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$) – наближено визначається оберненим інтегральним перетворенням, яке є скінченною сумою виду

$$r^{(n)}(x, y) = F_{rK}^{(n)} \cong \sum_{i=1,2,\dots,K} r_{xi}^{(n)}(x) q_{ri}^{(n)}(y). \quad (8)$$

Аналогічно одержуємо інтегральне перетворення II. Воно будується за змінною x в межах її визначення $x \in [x_0, x_1]$ з функціями ядра $\bar{P}^{(n)} = \{p_{rk}^{(n)}(x)\}$, які, як і в перетворенні I, є поки що невідомими, формулюється відносно функцій трансформант цього перетворення $\bar{U}_y^{(n)} = \{r_{yi}^{(n)}(y)\} = \int_{x_0}^{x_1} r^{(n)}(x, y) p_{ri}^{(n)}(x) dx$ ($r^{(n)} = u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$) ($k = 1, 2, \dots, K, \dots$) і має такий вигляд:

$$\int_{x_0}^{x_1} D(\bar{U}^{(n)}, \bar{U}^{(n-1)}, \dots) p_{rk}^{(n)}(x) dx = 0, \quad y \in (y_0, y_1);$$

$$\int_{x_0}^{x_1} G_{xp}(\bar{U}^{(n)}, \bar{U}^{(n-1)}, \dots) p_{rk}^{(n)}(x) dx = 0, \quad y = y_p \quad (p = 0; 1). \quad (9)$$

При цьому враховуються граничні умови (5) за змінною перетворення x .

Шуканий розв'язок задачі (4) – (6) – $\bar{U}^{(n)} = \{r^{(n)}(x, y)\}$ ($r^{(n)} = u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$) – наближено визначається оберненим інтегральним перетворенням, яке в даному випадку має вигляд:

$$r^{(n)}(x, y) = S_{rK}^{(n)} \cong \sum_{i=1,2,\dots,K} r_{yi}^{(n)}(y) p_{ri}^{(n)}(x). \quad (10)$$

2.2. Вибір ядер $\bar{Q}^{(n)} = \{q_{rk}^{(n)}(y)\}$ і $\bar{P}^{(n)} = \{p_{rk}^{(n)}(x)\}$ побудованих інтегральних перетворень I і II в узагальненому методі скінченних інтегральних перетворень МСП* принципово відрізняється від його класичного варіанту [5, 7].

В класичному методі скінченних інтегральних перетворень (МСП) ядрами є власні функції відповідної задачі Штурма – Ліувілля, для одержання якої на оператори вихідної задачі накладаються вимоги відокремлення змінних. Виконання цих умов суттєво звужує коло задач, до яких можуть бути застосовані МСП. Саме побудова ядер інтегральних перетворень, що не накладає ніяких додаткових обмежень на постановку задачі, є основною відмінністю запропонованого узагальнення цих методів.

Так, в МСП* приймається, що ядрами $\bar{Q}^{(n)} = \{q_{rk}^{(n)}(y)\}$ в інтегральному перетворенні I є трансформанти $\bar{U}_y^{(n)} = \{r_{yi}^{(n)}(y)\}$ перетворення II, а ядрами $\bar{P}^{(n)} = \{p_{rk}^{(n)}(x)\}$ перетворення II є трансформанти $\bar{U}_x^{(n)} = \{r_{xi}^{(n)}(x)\}$ перетворення I, тобто:

$$q_{ri}^{(n)}(y) = r_{yi}^{(n)}(y); \quad p_{ri}^{(n)}(x) = r_{xi}^{(n)}(x), \quad (r^{(n)} = u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}) \quad (i = 1, 2, \dots, K, \dots). \quad (11)$$

При цій умові вирази для обернених перетворень (8) і (10) є ідентичними ($F_{rK}^{(n)} = S_{rK}^{(n)}$) і шукані функції задачі (4) – (6) визначаються так:

$$r^{(n)}(x, y) = F_{rK}^{(n)} \cong \sum_{i=1,2,\dots,K} r_{xi}^{(n)}(x) r_{yi}^{(n)}(y). \quad (12)$$

Таким чином, при такому виборі ядер інтегральних перетворень I і II розв'язання задачі (4) – (6) зводиться до знаходження функцій $\bar{U}_x^{(n)} = \{r_{xi}^{(n)}(x)\}$ і $\bar{U}_y^{(n)} = \{r_{yi}^{(n)}(y)\}$ з

системи (7), (9), яку при врахуванні (11), (12) і позначенні $\bar{F}^{(n)} = \{F_{rK}^{(n)} = S_{rK}^{(n)}\}$ ($r^{(n)} = u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$), можна представити в такому вигляді (стрілками показано результат відповідного інтегрального перетворення):

$$\int_{y_0}^{y_1} D(F^{(n)}, F^{(n-1)}, \dots) r_{yk}^{(n)}(y) dy = 0 \rightarrow \tilde{L}_{(x)}^{(n-1)} \bar{U}_x^{(n)} + \tilde{f}_{(x)}^{(n-1)} = 0, \quad x \in (x_0, x_1);$$

$$\int_{y_0}^{y_1} G_{xp}(F^{(n)}, F^{(n-1)}, \dots) r_{yk}^{(n)}(y) dy = 0 \rightarrow \tilde{R}_{xp(x)}^{(n-1)} \bar{U}_x^{(n)} + \tilde{\phi}_{xp(x)}^{(n-1)} = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \quad (13)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} D(F^{(n)}, F^{(n-1)}, \dots) r_{xk}^{(n)}(x) dx = 0 \rightarrow \tilde{L}_{(y)}^{(n-1)} \bar{U}_y^{(n)} + \tilde{f}_{(y)}^{(n-1)} = 0, \quad y \in (y_0, y_1);$$

$$\int_{x_0}^{x_1} G_{yp}(F^{(n)}, F^{(n-1)}, \dots) r_{xk}^{(n)}(x) dx = 0 \rightarrow \tilde{R}_{yp(y)}^{(n-1)} \bar{U}_y^{(n)} + \tilde{\phi}_{yp(y)}^{(n-1)} = 0, \quad y = y_p \quad (p = 0; 1). \quad (14)$$

Ця нова структура є системою двох побудованих інтегральних перетворень лінеаризованої задачі (4) – (6), що відповідає двом умовно одновимірним задачам (13) і (14) за різними змінними області (вирази після стрілок \rightarrow).

Так, задача (13) (вирази після стрілок \rightarrow) сформульована відносно функцій $\bar{U}_x^{(n)} = \{r_{xi}^{(n)}(x)\}$ ($r^{(n)} = u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$) за змінною x , знаком « \sim » позначено лінійні оператори лінеаризованої задачі $\tilde{L}_{(x)}^{(n-1)}$, $\tilde{R}_{xp(x)}^{(n-1)}$ та вектор-функції її вільних членів $\tilde{f}_{(x)}^{(n-1)}$ і $\tilde{\phi}_{xp(x)}^{(n-1)}$: верхній індекс $(n-1)$ означає, що вони залежать від функцій $\bar{U}_x^{(n-1)} = \{r_{xi}^{(n-1)}(x)\}$ попереднього кроку лінеаризації, нижній індекс в дужках (x) вказує на те, що помічені ним оператори і вектори одержані згідно інтегрального перетворення I і в силу представлення (12) містять невідомі функції $\bar{U}_y^{(n)} = \{r_{yi}^{(n)}(y)\}$ другої змінної – змінної y – у вигляді констант-функціоналів.

Аналогічно, задача (14) (вирази після стрілок \rightarrow) сформульована відносно функцій $\bar{U}_y^{(n)} = \{r_{yi}^{(n)}(y)\}$ ($r^{(n)} = u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$) змінної y , знаком « \sim » так само позначено лінійні оператори лінеаризованої задачі $\tilde{L}_{(y)}^{(n-1)}$, $\tilde{R}_{yp(y)}^{(n-1)}$ і вектор-функції її вільних членів $\tilde{f}_{(y)}^{(n-1)}$ і $\tilde{\phi}_{yp(y)}^{(n-1)}$: верхній індекс $(n-1)$ означає, що вони залежать від функцій $\bar{U}_y^{(n-1)} = \{r_{yi}^{(n-1)}(y)\}$ попереднього кроку лінеаризації, нижній індекс в дужках (y) означає, що помічені ним оператори і вектори одержані згідно інтегрального перетворення II і в силу представлення (12) містять невідомі функції $\bar{U}_x^{(n)} = \{r_{xi}^{(n)}(x)\}$ змінної x у вигляді констант-функціоналів.

Для розв'язання системи одновимірних задач (13), (14) по знаходженню трансформант-ядер $\bar{U}_x^{(n)} = \{r_{xi}^{(n)}(x)\}$ і $\bar{U}_y^{(n)} = \{r_{yi}^{(n)}(y)\}$ застосовується аналог методу послідовних заміщень лінійної алгебри – процес Лібмана – Гаусса – Зейделя, загальна ітераційна схема якого записується так (параметр ітерації j):

$$\tilde{L}_{(x)}^{(n-1)(j-1)} \bar{U}_x^{(n)(j)} + \tilde{f}_{(x)}^{(n-1)(j-1)} = 0, \quad x \in (x_0, x_1);$$

$$\tilde{R}_{xp(x)}^{(n-1)(j-1)} \bar{U}_x^{(n)(j)} + \tilde{\phi}_{xp(x)}^{(n-1)(j-1)} = 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{(y)}^{(n-1)(j)} \bar{U}_y^{(n)(j)} + \tilde{f}_{(y)}^{(n-1)(j)} &= 0, \quad y \in (y_0, y_1); \\ \tilde{R}_{yp(y)}^{(n-1)(j)} \bar{U}_y^{(n)(j)} + \tilde{\varphi}_{yp(y)}^{(n-1)(j)} &= 0, \quad y = y_p \quad (p = 0; 1). \end{aligned} \quad (16)$$

(верхніми індексами в дужках позначені параметри двох різних ітераційних процесів: лінеаризації (n) та Лібмана – Гаусса – Зейделя (j)).

Таким чином, визначення трансформант-ядер $\bar{U}_x^{(n)(j)}$, $\bar{U}_y^{(n)(j)}$ двох інтегральних перетворень за різними змінними області реалізується в результаті двох ітераційних процесів: зовнішнього процесу лінеаризації (параметр n) і внутрішнього процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя розв'язання системи одновимірних задач (параметр j).

Еман 3. Для одержання розв'язку нелінійної задачі (4) – (6) в даному класі задач теорії оболонок є можливість побудувати спільний ітераційний процес, що об'єднує обидва вказані вище типи ітерацій: по лінеаризації вихідної задачі (параметр n) та по розв'язанню системи одновимірних задач за процесом Лібмана – Гаусса – Зейделя (параметр j)

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{(x)}^{(m-1)} \bar{U}_x^{(m)} + \tilde{f}_{(x)}^{(m-1)} &= 0, \quad x \in (x_0, x_1); \\ \tilde{R}_{xp(x)}^{(m-1)} \bar{U}_x^{(m)} + \tilde{\varphi}_{xp(x)}^{(m-1)} &= 0, \quad x = x_p \quad (p = 0; 1); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{(y)}^{(m-1)} \bar{U}_y^{(m)} + \tilde{f}_{(y)}^{(m-1)} &= 0, \quad y \in (y_0, y_1); \\ \tilde{R}_{yp(y)}^{(m-1)} \bar{U}_y^{(m)} + \tilde{\varphi}_{yp(y)}^{(m-1)} &= 0, \quad y = y_p \quad (p = 0; 1) \end{aligned} \quad (18)$$

($m = 1, 2, \dots$ – параметр спільного процесу).

Початкове наближення для цього спільного ітераційного процесу можна вибрати таким чином: за вектор-функцію трансформант $\bar{U}_x^{(0)}$ вибирається нульовий вектор $\bar{U}_x^{(0)} = \{r_{xi}^{(0)}(x) \equiv \bar{0}\}$, а для компонент вектор-функції ядер $\bar{U}_y^{(0)} = \{r_{yi}^{(0)}(y)\}$ – приймаються будь-які лінійно незалежні по i функції (тригонометричні, степеневі, поліноміальні, тощо). Тоді одновимірна задача (17) в першому наближенні відповідає лінійній постановці вихідної задачі.

Далі розв'язання системи одновимірних задач (17) – (18) по знаходженню трансформант-ядер $\bar{U}_x^{(m)}$, $\bar{U}_y^{(m)}$ на проміжному m -му кроці наближення реалізується так:

обчислення коефіцієнтів операторів і вектор-функцій вільних членів задачі (17), використовуючи значення вектор-функції $\bar{U}_x^{(m-1)}$ і $\bar{U}_y^{(m-1)}$ із попереднього ($m-1$) кроку спільного процесу;

одержання розв'язку $\bar{U}_x^{(m)}$ одновимірної задачі (17) із застосуванням чисельного методу ортогональної прогонки;

обчислення коефіцієнтів операторів і вектор-функцій вільних членів задачі (18), використовуючи одержаний розв'язок $\bar{U}_x^{(m)}$ та відомий із попереднього наближення вектор $\bar{U}_y^{(m-1)}$;

одержання розв'язку $\bar{U}_y^{(m)}$ одновимірної задачі (18) із застосуванням чисельного методу ортогональної прогонки;

перевірка точності обчислення трансформант-ядер $\bar{U}_x^{(m)}$, $\bar{U}_y^{(m)}$ за вибраним критерієм і, якщо задана точність досягнута, – побудова шуканого вектора переміщень

$\bar{U}^{(m)}$ за оберненим інтегральним перетворенням (12), або, в протилежному випадку, перехід до наступного $(m+1)$ -го наближення.

Завершення ітераційного процесу розв'язання системи (17), (18) при фіксованому числі членів K в (12) реалізується за відомим критерієм прикладної математики:

$$\left| 1 - \frac{\gamma^{(m)}}{\gamma^{(m-1)}} \right| \leq \varepsilon_1,$$

де $\gamma^{(m)} = \max \left\{ \gamma_{q^{(m)}}^{(m)} \right\} \left(q^{(m)} = u^{(m)}, v^{(m)}, w^{(m)} \right)$; $\gamma_{q^{(m)}}^{(m)}$ – максимальне або середньоквадратичне значення функції $F_{rK}^{(m)}$ в оберненому перетворенні (12); ε_1 – задана точність обчислення трансформант-ядер $\bar{U}_x^{(m)}$, $\bar{U}_y^{(m)}$.

Задана точність ε_2 остаточного розв'язання задачі (4) – (6) досягається шляхом утримання в (12) більшого числа членів K . Контроль за її виконанням здійснюється за аналогічною умовою:

$$\left| 1 - \frac{\gamma^{(K)}}{\gamma^{(K-1)}} \right| \leq \varepsilon_2.$$

3. Практичне обґрунтування розробленого підходу.

На даний час запропонований в роботі чисельно-аналітичний підхід до розв'язування нелінійних крайових задач на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень і методу квазілінеаризації не має, на жаль, строго теоретичного обґрунтування. Тому, як і у лінійному випадку [10, 11], обмежимося окремими прикладами його практичного обґрунтування, що не менш важливе в практиці прикладних досліджень. Таке обґрунтування проводиться індуктивно, зокрема шляхом порівняння з результатами, що одержані іншими методами.

Виходячи із суті розробленого підходу, тестуванню підлягають такі його процедури:

збіжність побудованого спільного процесу розв'язування системи інтегральних перетворень по визначенню невідомих трансформант-ядер при їх фіксованій кількості K , що об'єднує лінеаризацію за Ньютоном – Канторовичем – Рафсоном та розв'язування окремої лінеаризованої задачі за процедурою типу Лібмана – Гаусса – Зейделя (процес (17), (18), $K = \text{fixed}$);

збіжність остаточного розв'язку задачі при збільшенні числа трансформант-ядер K , що утримуються в оберненому інтегральному перетворенні (12) $K = 1, 2, \dots, (K+1)$.

Для ілюстрації виконання цих умов залучено ряд прикладів з робіт [4, 20].

Задача 1. Розглядається полого ізотропна панель сталої товщини h , що в плані займає область $a \times b$, і має кривизни k_x і k_y вздовж координатних осей Ox і Oy , відповідно. Оболонка шарнірно оперта по всьому контуру і знаходиться під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження інтенсивності $q - q_n(x, y) = q$, що направлене до центру кривизни. Кривизну панелі і діюче навантаження будемо характеризувати, як і в [4], безрозмірними параметрами $k_x^* = k_x b^2 / h$, $k_y^* = k_y b^2 / h$, $q^* = qb^4 / (Eh^4)$ (E – модуль Юнга).

На прикладі цієї оболонки проілюструємо збіжність спільного ітераційного процесу (17), (18) в залежності від кроку ітерації m для різної кількості трансформант-ядер K , що утримуються в оберненому перетворенні (12). Ці дані для значення безрозмірного максимального прогину $\zeta = w_{\max} / h$ прямокутної в плані циліндричної панелі з відношенням сторін $\lambda = b/a = 2/3$, з кривизною $k_y^* = 10$ при $q^* = 25,53$ по-

дано в табл. 1; для квадратної в плані сферичної панелі з кривизнами $k_x^* = k_y^* = 6$ і $q^* = 31,17$ – в табл. 2, а в залежності від кількості утриманих в (12) трансформант-ядер K для цієї ж сферичної панелі – в табл. 3. В останніх стовпчиках наведених таблиць містяться дані роботи [4], що одержані варіаційним методом Рітца в трьох наближеннях, і відносна різниця порівнювальних результатів $\varepsilon = \left(\left| \zeta_{[4]} - \zeta_{(нідхид)} \right| / \zeta_{[4]} \right) \cdot 100$.

Розрахунки наводяться при таких вихідних даних:

$$\lambda = b/a = 1; 2/3, \quad b = 0,1 \text{ м}, \quad h = 10^{-3} \text{ м}, \quad E = 9,81 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \mu = 0,3.$$

Таблиця 1

m ↓	$\zeta = w_{\max} / h$			[4]; $\varepsilon, \%$
	K			
	1	2	3	
1	3,115	1,933	2,003	1,94; 1,8%
2	2,512	2,014	1,948	
3	2,407	1,975	1,975	
4	2,268	1,975	1,975	
5	1,807			
6	1,807			

Таблиця 2

m ↓	K				[4], $\varepsilon, \%$
	1	2	3	4	
1	1,433	1,452	1,480	1,486	
2	2,071	1,509	1,482	1,473	
3	1,825	1,510	1,517	1,518	1,50
4	1,551	1,518	1,518	1,518	
5	1,474	1,518	1,518		1,2%
6	1,462	1,518			
7	1,462				

Таблиця 3

q^* ↓	K			[4]	$\varepsilon, \%$
	1	3	4		
15,92	0,491	0,490	0,490	0,490	0,0
23,95	0,993	1,010	1,010	1,00	1,0
44,51	1,971	2,011	2,011	1,99	1,00
70,56	2,481	2,530	2,530	2,48	2,02
115,6	2,950	3,060	3,060	2,95	3,72

Як видно з наведених даних (табл. 1, 2, 3), спільний ітераційний процес розв'язування вихідної нелінійної задачі збігається досить швидко ($m=5-7$) при представлених значеннях кількості трансформант-ядер K в оберненому перетворенні (12) і має сталі значення уже при $K=2$ або при $K=3$. Відмінність в порівнювальних з [4] результатах (останні стовпчики табл. 1-3) знаходиться в межах 3-4%.

Наступні розрахунки проводяться по визначенню критичних граничних значень діючого навантаження q_{cr} , при якому панель «проклацує» (втрачає стійкість по «хлопку»).

Зауважимо, що метод квазілінеаризації автоматично обмежує область свого застосування докритичною стадією деформування, так що і побудований спільний ітераційний процес (17), (18) збігається лише в цій області. Цей факт, як показано в [3], можна використати для наближеного визначення верхнього критичного значення навантаження q_{cr} за таким обчислювальним критерієм: $q_{cr} \in [q_-, q_+)$, де q_- – значення

навантаження, при якому ітеративна процедура (17), (18) ще збігається, а q_+ – значення навантаження, при якому цей процес є розбіжним. Таким чином, значення q_- і q_+ визначають обчислювальні межі шуканого критичного навантаження. Ці дані для оболонки різних кривизн і величин навантаження наведені в табл. 4 у порівнянні з результатами роботи [4].

Таблиця 4

$k_x^*; k_y^*$	q_-^*	q_+^*	$q_{cr}^* \in [q_-^*, q_+^*]$	[4] ($\varepsilon, \%$)
0; 20	44,75	44,76	[44,75; 44,76]	44,81 (0,13)
15; 15	97,99	98,00	[97,99; 98,00]	105,70 (7,3)
25; 25	377,55	377,56	[377,55; 377,56]	395,53 (4,5)

Як видно з таблиці, відмінність між величинами критичних граничних значень, одержаних за розробленим підходом і [4], знаходяться в межах 8%.

Задача 2. Розглядається ізотропна квадратна в плані циліндрична панель $a \times a$ сталої товщини h зі стрілою підйому f_x при рівномірному зовнішньому тиску q . Дюгові контури панелі вільні від навантажень ($y = 0; a: T_2 = S = Q_2 = M_2 = 0$), а на прямолинійних краях приймаються умови жорсткого шарніру ($x = 0; a: u = v = w = M_1 = 0$) [20].

За обчислювальним критерієм, викладеним в останньому прикладі попередньої задачі ($q_{cr} \in [q_-, q_+]$), де q_-, q_+ – значення навантажень, при якому ітеративний процес (17), (18) відповідно збігається і є розбіжним), визначається критичне граничне значення діючого тиску q_{cr} , при якому панель втрачає стійкість по «хлопку» (проклацус).

Результати наводяться для таких вихідних даних [20]:

$$a = 2 \text{ м}, \quad f_x = 0,1 \text{ м}, \quad h = 0,02 \text{ м}, \quad E = 210 \text{ ГПа}, \quad \mu = 0,3.$$

За проведеними розрахунками одержано: $q_- = 0,5683 \text{ Н/мм}^2$, $q_+ = 0,5684 \text{ Н/мм}^2$, так що шукане критичне значення знаходиться в таких межах:

$$0,5683 \leq q_{cr} < 0,5684 \text{ [Н/мм}^2 \text{]}.$$

В роботі [20] ця задача була розв'язана МСЕ (програма ANSYS) і одержано, що $q_{cr} = 0,576 \text{ Н/мм}^2$.

Таким чином, різниця між одержаними значеннями критичного тиску за МСЕ і запропонованим підходом не перевищує 1,5%.

Наведені тут приклади тестування розробленого підходу збільшують ступінь достовірності одержаних на його основі результатів в класі нелінійних задач теорії пологих оболонок.

4. Нелінійне деформування оболонок .

Дослідження проводиться для пологих оболонок-панелей, описаних в попередніх підрозділах роботи, і стосується залежності їх нелінійного деформування від таких факторів:

- гауссової кривизни різних знаків в широкому діапазоні зміни її значень;
- комбінації жорсткого закріплення і вільного краю на граничному контурі панелі;
- наявності дискретних включень при різному їх розташуванні.

Аналіз представлений для ізотропної (E, μ), квадратної в плані ($a \times a$) панелі сталої товщини h з кривизнами k_x, k_y вздовж координатних напрямків Ox і Oy , що знаходиться при рівномірному зовнішньому навантаженні інтенсивністю $q_n(x, y) = q_0$. Як

і раніше, прогин панелі, її кривизни, інтенсивність навантаження і координати осей характеризуватимемо безрозмірними параметрами $\zeta = w_{\max} / h$; $k_x^* = k_x a^2 / h$; $k_y^* = k_y a^2 / h$; $K^* = k_x^* k_y^*$; $q^* = (q_0 a^4) / (Eh^4)$; $\tilde{x} = x / a$; $\tilde{y} = y / a$.

В першій частині дослідження проводиться аналіз впливу величини діючого навантаження q^* на статичну жорсткість панелі в околі її найбільшого прогину $ss = (dq^* / d\zeta) / ss(0)$ та на традиційну залежність «навантаження – прогин» $\zeta = \zeta(q^*)$ ($ss(0)$ – жорсткість оболонки без навантаження). Ці дані наведено на рис. 1 для $ss = ss(q^*)$ (лівий стовпчик) та для $\zeta = \zeta(q^*)$ (правий стовпчик) при сталій кривизні $k_x^* = 20$ і різних значеннях кривизн $k_y^* \in [20, -30]$, так що гауссова кривизна охоплює широкий діапазон додатних, від’ємних і нульових значень $K^* \in [400; -600]$ (на рис. 1 представлені вказані залежності для значень $K^* = 400$, $K^* = 0$, $K^* = -600$).

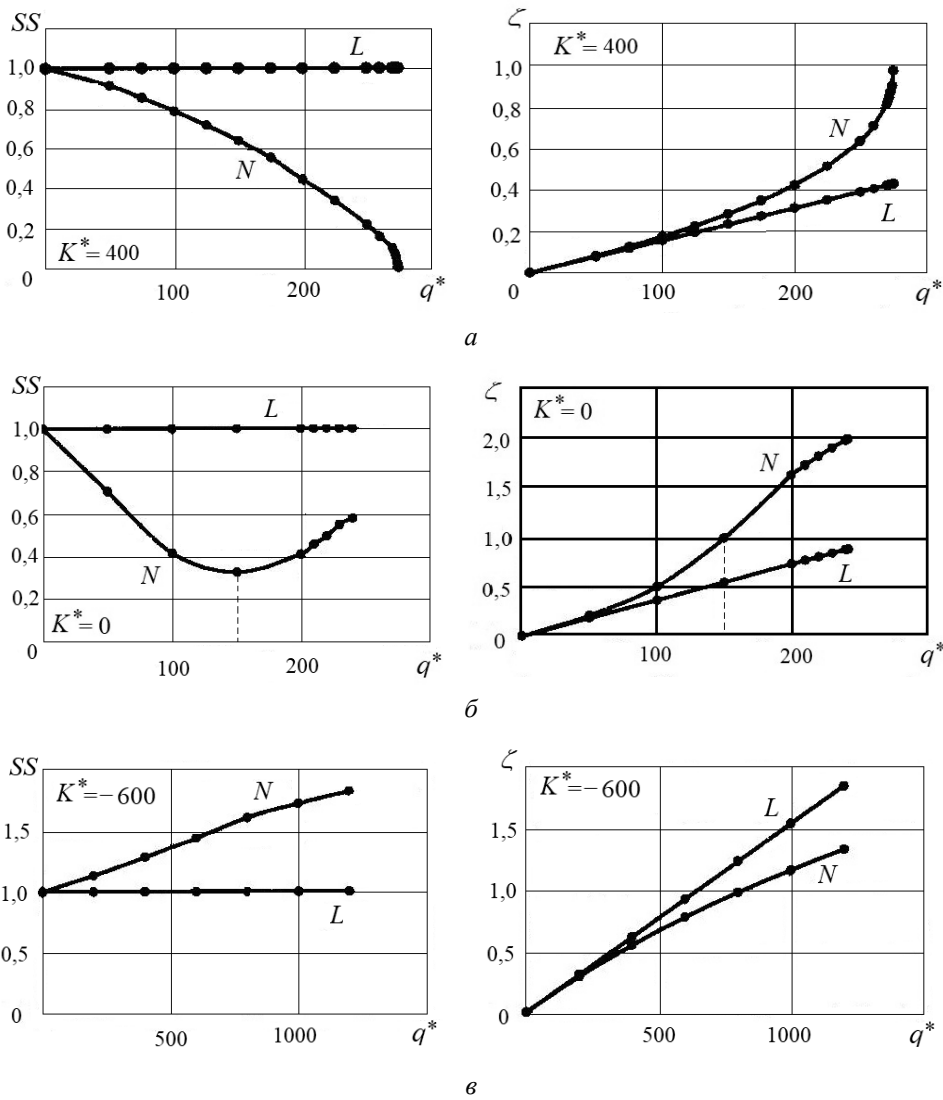


Рис. 1

В розглянутому діапазоні кривизн $K^* \in [400; -600]$ наведені залежності $ss = ss(q^*)$ і $\zeta = \zeta(q^*)$ мають очевидні якісні відмінності. За цими відмінностями можна виділити три характерні типи:

а) панелі позитивної гауссової кривизни $k_y^* = 20, K^* = 400, q_{cr}^* = 275$ (рис. 1, а): статична жорсткість $ss = ss(q^*)$ при нелінійному деформуванні (позначення N на рисунку) монотонно спадає аж до нуля при критичному значенні навантаження $q_{cr}^* = 275$, залежність $\zeta = \zeta(q^*)$ – відповідно зростає і можна прогнозувати втрату стійкості панелі по «хлопку» (проклацування);

б) панелі нульової кривизни $k_y^* = 0, K^* = 0$ (рис. 1, б); для них передбачити поведінку оболонки з ростом навантаження проблематично: їх статична жорсткість для випадку нелінійного розрахунку представлена немонотонною функцією $ss = ss(q^*)$, в точці мінімуму якої при $q^* = 150$ змінюється характер цієї кривої; відповідно – залежність $\zeta = \zeta(q^*)$ в цій точці має перегин;

в) панелі від'ємної гауссової кривизни $k_y^* = -30, K^* = -600$ (рис. 1, в): їх статична жорсткість $ss = ss(q^*)$ є монотонно зростаючою функцією для всіх докритичних значень навантаження з розглянутого діапазону; відповідно крива $\zeta = \zeta(q^*)$ розташована нижче її лінійного випадку (L) і такі оболонки зі збільшенням навантаження не схильні до втрати стійкості по «хлопку».

Цілком природно, що для всіх типів кривизн статична жорсткість в лінійному випадку (L) не змінюється.

Таким чином аналіз, приведений для елементарного прикладу жорстко закріпленої по контуру квадратної панелі, наочно ілюструє неоднозначний вплив гауссової кривизни оболонок на їх стійкість.

В другій частині дослідження розглядаються різні граничні умови закріплення гнучких оболонок при їх нелінійному деформуванні.

Слід відзначити, що дослідження стійкості пологих панелей зазвичай обмежувалось і обмежується комбінаціями шарнірного опирання та жорсткого закріплення на їх граничному контурі [6, 9, 25]. Практика будівництва споруд різного призначення – промислових об'єктів, залізничних вокзалів, ангарів, тощо нерідко стикається з випадками, коли при використанні пологих панелей для покриття чи перекриття окремі їх ділянки за архітектурними вимогами мають бути вільними від будь яких обмежень (кутові козирки, козирки прямокутної форми з одним вільним краєм, навіси, тощо). Це приводить до необхідності дослідження всіх аспектів стаціонарного деформування (НДС, коливальності, стійкості) при комбінації різних умов закріплення на граничному контурі, включаючи наявність вільного краю. Таких робіт зі стійкості пологих оболонок в літературі обмаль (наприклад, [20]).

З огляду на це подальші дослідження зв'язані з аналізом стійкості пологої панелі при комбінації жорсткого і вільного країв.

Розрахунки наводяться для сферичної панелі з кривизнами $k_x^* = k_y^* = 20$ в залежності від параметра $\xi = lf / ll$, що характеризує відношення довжини вільної від навантажень ділянки границі (lf) до довжини всього контуру (ll). Розглянуто такі чотири випадки граничних умов:

- $n = 1: \xi = 0$ (всі сторони панелі жорстко закріплені);
- $n = 2: \xi = 1/4$ (одна сторона вільна, інші – закріплені);
- $n = 3: \xi = 1/2$ (дві суміжні сторони вільні, дві інші – закріплені);
- $n = 4: \xi = 3/4$ (три сторони вільні, одна – закріплена (консоль)).

Наявність вільного краю для розглянутих випадків $n = 1 \div 4$ безумовно впливає на поведінку статичної жорсткості $ss = ss(q^*)$ і залежності «навантаження – прогин» $\zeta = \zeta(q^*)$, але якісно нових випадків у порівнянні з наведеними на рис. 1 не виявлено. Ці залежності за своїм характером для $n = 1$ і $n = 2$ ($\xi = 0$, $\xi = 1/4$) відповідають наведеним на рис. 1, а, тобто з ростом навантаження панель може прокладувати. Для двох інших випадків закріплення $n = 3$ і $n = 4$, де збільшується частка вільного краю ($\xi = 1/2$, $\xi = 3/4$), характерне зростання статичної жорсткості і зі збільшенням тиску прокладування цих панелей не прогнозується (подібні випадки представлені на рис. 1, в).

Третя частина дослідження зв'язана з певним ускладненням двох попередніх задач. Ці ускладнення зумовлені зокрема тим, що широкі аспекти застосування пологих оболонок передбачають наявність різного роду дискретних підкріплень у вигляді ребер жорсткості, накладок, пружних (жорстких) опор, тощо. Врахування цих особливостей вносить конструктивну неоднорідність в прийнятну модель розрахунку, що значно ускладнює визначення критичних значень діючого навантаження і оцінку несучої здатності об'єкту. Неминуче виникають питання раціонального вибору наявних дискретних включень – їх розташування, жорсткості, локалізації в області панелі, тощо. В значній мірі це стосується панелей, частина граничного контуру яких є вільною від навантажень. На прикладі таких оболонок проводиться аналіз критичних граничних значень нормального тиску в залежності від розміщення дискретних включень.

Наявність дискретного включення враховуватимемо за моделлю пружного Вінклерівського підґрунтя, коефіцієнт основи якого задається таким чином:

$$K_p(x, y) = \begin{cases} c_0, & \text{якщо } (x, y) \in \Omega_0; \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega_0, \end{cases}$$

де c_0 – жорсткість включення; $\Omega_0 = \{x, y : |x - x_0| \leq r_x, |y - y_0| \leq r_y\}$ – прямокутна область площею $2r_x \times 2r_y$ з центром у точці O з координатами $x = x_0$, $y = y_0$. Локалізацію включення в області Ω характеризуватимемо безрозмірним параметром $\eta = \Omega_0 / \Omega$, а його відносну жорсткість – величиною $\tilde{c} = c_0 / (9,8 \cdot 10^9)$, розташування включення визначається положенням його центра $O^*(x_0^*, y_0^*)$ ($x_0^* = x_0 / a$, $y_0^* = y_0 / a$).

Для квадратної в плані сферичної панелі з кривизнами $k_x^* = k_y^* = 20$ з одним вільним краєм $\tilde{x} = 1$ ($\xi = 1/4$) і трьома жорстко закріпленими краями ($\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = 0$, $\tilde{y} = 1$) досліджується вплив розміщення дискретного включення на її стійкість у вигляді функції $q_{cr}^* = q_{cr}^*(0^*)$.

Розглядається варіант, коли опора-включення розміщена в перерізі $y_0 = a/2$ ($y_0^* = 0,5$) (лінія симетрії панелі по координаті y), а зміна її положення визначається лише координатою $x_0^* \in (0; 0,95]$. Залежність критичного граничного значення зовнішнього тиску $q_{cr}^* = q_{cr}^*(x_0^*)$ представлена на рис. 2 для $\eta = 0,01$. Ця крива, всупереч очікуванню, має немонотонний характер з найбільшим значенням критичного навантаження при розміщенні опори в околі точки $x_0^* \approx 0,7$. Для діапазону $x_0^* \in (0; 0,4]$ наявність включення практично не впливає на величину критичного значення q_{cr}^* : тут

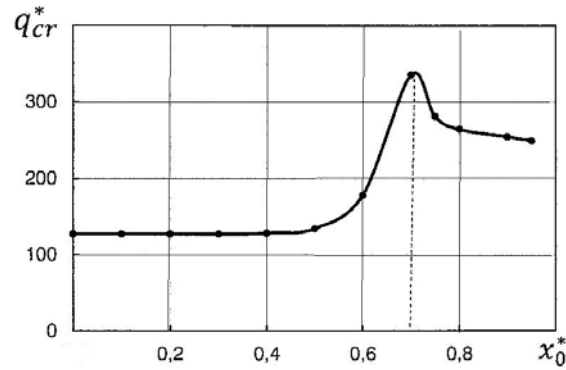
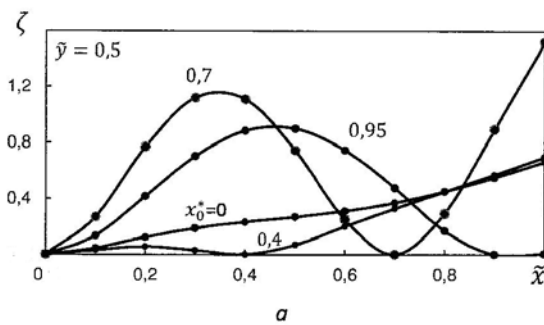
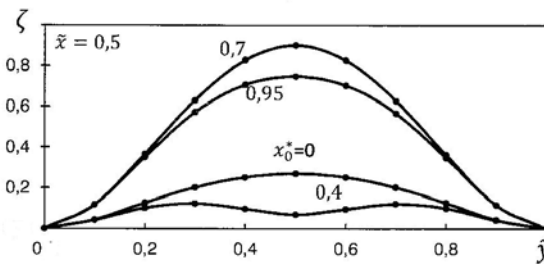


Рис. 2



а



б

Рис. 3

визначальну роль відіграє жорстке закріплення сторони $\tilde{x} = 0$ разом із закріпленням сторін $\tilde{y} = 0, \tilde{y} = 1$, що практично зводить нанівець наявність опори. Не оптимальним в плані стійкості панелі виявилось і розташування опори в безпосередній близькості до границі області $x_0^* \approx 0,95$. При такому положенні опори критичне значення тиску q_{cr}^* на 25 % менше, ніж його найбільша величина при $x_0^* \approx 0,7$.

Рис. 3 ілюструє вплив розміщення дискретного включення на картину прогинів серединної поверхні панелі. Тут наводиться розподіл переміщень $\zeta = \zeta(\tilde{x})$ в центральному перерізі $\tilde{y} = 0,5$ для різних розташувань включення $x_0^* \approx 0; 0,4; 0,7; 0,95$ при значеннях навантаження q^* , близьких до критичних: $q^* = 120$ ($x_0^* = 0; x_0^* = 0,4$); $q^* = 330$ ($x_0^* = 0,7$); $q^* = 254$ ($x_0^* = 0,95$) (рис. 3, а).

Аналогічно, на рис. 3, б наводиться розподіл переміщень $\zeta = \zeta(\tilde{y})$ в перерізі $\tilde{x} = 0,5$ для тих же варіантів розташування включення x_0^* при тих же значеннях навантажень q^* .

Представлене дослідження нелінійного деформування пологих панелей проілюструвало вплив на їх стійкість величин і знаків гауссових кривизн, різних комбінацій жорсткого закріплення і вільних від навантаження ділянок граничного контуру та розташування дискретних включень.

Висновки.

– Запропоновано чисельно-аналітичний підхід до дослідження нелінійного деформування пологих оболонок при докритичних навантаженнях, що базується на раціональному поєднанні узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень та методу лінеаризації за Ньютоном – Канторовичем – Рафсоном.

– Наведено окремі приклади практичного обґрунтування розробленого підходу, які збільшують ступінь достовірності одержаних на його основі результатів в класі нелінійних задач теорії пологих оболонок.

– Проведено аналіз статичної жорсткості та залежності «навантаження – прогин» дискретно неоднорідних гнучких пологих оболонок в широкому діапазоні зміни їх гауссової кривизни при різних граничних умовах, включаючи наявність вільного краю.

– На прикладі жорстко закріпленої по граничному контуру оболонки виділено три зони значень гауссових кривизн, для яких панель при зовнішньому навантаженні:

а) може втрачати стійкість по «хлопку»; б) характеризується неоднозначністю поведінки зі збільшенням навантаження; в) не схильна втрачати стійкість.

– Досліджено вплив розташування жорсткого включення на стійкість панелі при комбінації трьох жорстко закріплених ділянок контуру і однієї вільної. Показано, що залежність критичних граничних значень зовнішнього тиску від місця розташування включень ϵ , зазвичай, немонотонною функцією. Це дає змогу визначити їх оптимальне розміщення в плані стійкості панелі і підвищення її несучої здатності.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Запропоновано чисельно-аналітичний підхід до дослідження нелінійного деформування пологих оболонок при докритичних навантаженнях, що базується на раціональному поєднанні узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень і методу лінеаризації за Ньютоном – Канторовичем – Рафсоном. Проведено аналіз статичної жорсткості та залежності «навантаження – прогин» гнучких пологих оболонок з різними граничними умовами в широкому діапазоні зміни їх гауссової кривизни та наявності дискретних включень. Показано, що залежність верхніх критичних значень зовнішнього тиску від розташування дискретних включень має немонотонний характер, що дає змогу визначити їх оптимальне розташування в плані статичної стійкості і несучої здатності оболонок.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: полого оболонка, дискретні включення, статична стійкість, узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень, метод квазілінеаризації, аналіз.

1. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно переменной толщины // *Авиационно-космическая техника и технология.* – 2004. – **10**, № 2. – С. 18 – 25.
2. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – Москва: Мир, 1968. – 183 с.
3. *Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И.* О численном решении нелинейных краевых задач статики гибких оболочек // *Докл. АН УССР. Сер. А.* – 1980. – N 6. – С. 44 – 48.
4. *Корнишин М.С.* Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – Москва: Наука, 1964. – 192 с.
5. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. – Москва: Физматгиз, 1962. – 767 с.

6. *Кривенко О.П.* Вплив нагріву на стійкість і власні коливання сферичної панелі при зміні умов комбінованого закріплення контуру // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – **96**. – С. 48 – 64.
7. *Сеницкий Ю.Э.* Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям // Изв. Саратовского университета. Новая серия. Матем., механ., информатика. – 2011. – **1**, № 3. – С. 61 – 89.
8. *Amabili M.* Nonlinear Vibrations and Stability of Doubly Curved Shallow-Shells: Isotropic and Laminated Materials. – Cambridge University Press, 2008. – Chapter: Nonlinear Vibrations and Stability of Doubly Curved Shallow Shells in Boocs Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. – P. 272 – 297.
9. *Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T.* Analysis of Geometrically Nonlinear Vibrations of Functionally Graded Shallow Shells of a Complex Shape // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2017. – **9**, N 14. – P. 1648 – 1668.
10. *Bespalova E.I.* On the Method of Finite Integral Transforms in Problems of Statics of Inhomogeneous Plates // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 651 – 663.
11. *Bespalova E.I.* Generalized Method of Finite Integral Transforms in Static Problems for Anisotropic Prisms // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 1. – P. 41 – 55.
12. *Bespalova E., Urusova G.* Solution of the Lamé Problem by the Complete Systems Method // Int. J. for Computational Methods in Engng. Scie. and Mech. – 2013. – **14**, N 2. – P. 159 – 167.
13. *Campan D.H., Bouwman V.P., Zhang G.Q., Zhang J., Weeme B.J.W.* Semi-analytical stability analysis of doubly-curved orthotropic shallow panels-considering the effects of boundary conditions // Int. J. of Non-Linear Mech. – 2002. – **37**, N 4-5. – P. 659 – 667.
14. *Duc N.D., Quan T.Q.* Nonlinear stability analysis of double-curved shallow fgm panels on elastic foundations in thermal environments // Mech. of Composite Materials. – 2012. – **48**, N 4. – P. 435 – 448.
15. *Garg A., Chalak H.D., Belarbi M.O., Zenkour A.M., Sahoo R.* Estimation of carbon nanotubes and their applications as reinforcing composite materials – An engineering review // Composite Struct. – 2021. – **272**. – 114234.
16. *Grygorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Analysis of Stress State of Hollow Orthotropic Cylinders with Oval Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 2. – P. 45 – 57.
17. *Huang S., Qiao P.* A new semi-analytical method for nonlinear stability analysis of stiffened laminated composite doubly-curved shallow shells // Composite Struct. – 2020. – **251**, N 1. – 112526.
18. *Kumar R., Ramachandra L.S., Banerjee B.* Nonlinear Stability Characteristics of Composite Cylindrical Panel Subjected to Non-uniform In-plane Mechanical and Localized Thermal Loadings // Proc. Indian National Sci. Acad. – **82**, N 2. – 2016. – P. 271 – 288.
19. *Kurukuri S.* Stability and Geometrical Nonlinear Analysis of Shallow Shell Structures // Advanced Mechanics of Materials and Structures Graduate School of Structural Engineering. Project-2. – Weimar: Bauhaus Universität, 2004. – P. 1 – 46.
20. *Psozny M., Havran J.* Stability analysis of an open shallow cylindrical shell with imperfection under external pressure // MATEC Web of Conferences. Slovak University of Technology, Bratislava, 2017. – P. 1 – 6.
21. *Roberts D.P.* Numerical Modelling of Blocky and Stratified Hangingwall Behaviour // SAIMM, SANIRE and ISRM, 6-th Int. Symposium on Ground Support in mining and civil engineering construction. – 2008. – P. 329 – 344.
22. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 40 – 53.
23. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Effect of Mechanical and Geometric Parameters of Composite Cylindrical Shells with Localized Deflection on Character of Equilibrium Curves under Axial Compression // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 1. – P. 75 – 87.
24. *Watson B.P., Gerber R.* Determination of stable spans in UG2 excavations // J. of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy. – 2018. – **118**, N 5. – P. 493 – 504.
25. *Zhang J.Z., Campan van D.H.* Stability and bifurcation of doubly curved shallow panels under quasi-static uniform load // Int. J. of Non-Linear Mech. – 2003. – **38**, N 4. – P. 457 – 466.

Надійшла 17.08.2021

Затверджена до друку 31.05.2022