Ю. М. К о н о н о в [1], Я. І. С в я т е н к о [2]

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ НЕСТІЙКОГО ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА ДРУГИМ ГІРОСКОПОМ, ЯКИЙ ОБЕРТАЄТЬСЯ

[1]*Інститут прикладної математики і механіки НАН України,*
вул. Генерала Батюка, 19, 84116, Донецька область, Слов'янськ, Україна;
e-mail: kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
[2]*Донецький національний університет ім. Василя Стуса,*
вул. 600-річчя, 21, 21021, Вінниця, Україна; e-mail: filioeee@gmail.com

Abstract. The possibility of stabilizing an unstable uniform rotation in a resisting medium of a "sleeping" Lagrange gyroscope using a second rotating gyroscope is considered. The "sleeping" gyroscope rotates around a fixed point under the action of a constant moment directed along the axis of rotation, and the second gyroscope is located above it. The gyroscopes are connected by an elastic spherical hinge and their rotations are supported by constant moments. It is shown that stabilization will be impossible in the absence of elasticity in the hinge and the coincidence of the center of mass of the second gyroscope with their common point with the first gyroscope. On the basis of the inner approach, the stabilization conditions are obtained in the form of a system of three inequalities using the kinetic moment of the second gyroscope and the coefficient of elasticity of the hinge. Conditions for the coefficient of elasticity are found under which the leading coefficients of these inequalities are positive. Whence it follows that stabilization will always be possible at a sufficiently large angular velocity of rotation of the second gyroscope under the assumption that the center of mass of the mechanical system is below the fixed point. The obtained stabilization conditions are compared with similar conditions in the absence of dissipation.

Key words: dynamically symmetric rigid bodies, resisting medium, stabilization, asymptotic stability.

Вступ.

Для консервативних механічних систем ефект стабілізації неврівноваженого гіроскопа Лагранжа другим гіроскопом був досліджений в монографії [7] та в багатьох інших роботах [8]. В [5, 12, 14] була розглянута задача про можливість стабілізації обертовими твердими тілами нестійкого обертання гіроскопа Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною, що містить ідеальну рідину. У цих роботах були проведені аналітичні і чисельні дослідження з урахуванням основного і додаткових тонів коливань ідеальної рідини в еліпсоїдальній і циліндричній порожнинах. В [4] розглянута можливість стабілізації гіроскопа з циліндричною порожниною за допомогою поділу циліндричної порожнини безмасовими поперечними перегородками. Показано, що введення навіть однієї перегородки може істотно стабілізувати нестійке обертання гіроскопа.

На даний час є досить велика кількість робіт, в яких проводяться різні дослідження динаміки твердого тіла, що обертається в середовищі з опором, наприклад, [3, 6, 8 – 11, 13, 15, 16]. Найбільш вдалий огляд літератури за цими задачами наведено в роботах [9 – 11, 13, 15]. Наведемо лише роботи, тематика яких близька до розглянутої задачі. В [15] отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі з опором двох важких гіроскопів Лагранжа, з’єднаних пружним сферичним шарніром. Обертання гіроскопів підтримується постійними моментами в інерціальній системі координат. У роботі [10] розглядається динаміка і орієнтація твердого тіла при вході в атмосферу, динаміка і управління коаксіальними гіростатами супутників та багато інших оригінальних задач космічної механіки. В монографії [11] представлено уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Строгий підхід, заснований на процедурі усереднення, застосовується до тіл з довільними еліпсоїдами інерції. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в’язкій рідині в резервуарах, пружним і в’язкопружним властивостям тіла). В статті [9] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією повільно змінного з часом крутного моменту. У статті [16] вивчається новий клас обертань динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки з урахуванням нестаціонарного збурюючого моменту і повільно змінного з часом відновлюючого моменту.

В [3] проведені дослідження впливу дисипативного і двох постійних моментів на стійкість стаціонарних рухів дзиги Лагранжа. Перший момент – постійний в інерціальній системі відліку, а другий – в неінерціальній, тобто в системі відліку, яка зв’язана з твердим тілом. Із цієї роботи випливає нестійкість рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа, який знаходиться тільки під дією постійного моменту в системі відліку, пов’язаній з твердим тілом. У зв’язку з цим виникає питання про можливість стабілізації нестійкого обертання такого гіроскопа другим гіроскопом, який обертається і зв’язаний з першим пружним сферичним шарніром. З четвертої теореми Томсона – Тета – Четаєва [6] випливає, що у цьому випадку центр мас розглянутої механічної системи повинен знаходитися нижче нерухомої точки.

В основу даної роботи покладено результати статей [3, 15]. На відміну від [15], при виведенні рівнянь руху твердих тіл були використані кути Крилова. На підставі критерія Льєнара – Шіпара в іннорному вигляді отримано умови стабілізації нестійкого рівномірного обертання у середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, який обертається. «Сплячий» гіроскоп обертається навколо нерухомої точки. Другий гіроскоп знаходиться над ним. Гіроскопи з’єднані пружним сферичним шарніром, а їх обертання підтримуються постійними моментами, спрямованими вздовж їх осей симетрії. Показано, що стабілізація буде неможлива при відсутності пружності в шарнірі і збігу центру мас другого гіроскопа з їх загальною точкою з першим гіроскопом. Отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації відносно кінетичного моменту другого гіроскопа. Знайдено умови для коефіцієнта пружності шарніра, при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Звідки випливає, що стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що його центр мас знаходиться нижче нерухомої точки. Проведено порівняння отриманих умов стабілізації з аналогічними умовами при відсутності дисипації.

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

У вступі зазначалося, що з роботи [3] та з четвертої теореми Томсона – Тета – Четаєва [6] випливає нестійкість рівномірного обертання у середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа. У цьому випадку розглянемо можливість стабілізації нестійкого обертання такого гіроскопа другим гіроскопом, який зв’язаний з першим пружним сферичним шарніром. Нехай динамічно симетричні тверді тіла S_1 і S_2 пов’язані в точці O_2 пружним відновлювальним сферичним шарніром $\boldsymbol{L} = k\,\mathbf{s}_1 \times \mathbf{c}_2 / \left(|\mathbf{s}_1||\mathbf{c}_2|\right)$, $k \ge 0$. Тіло S_1 має нерухому точку O_1, кожне тверде тіло S_i $(i = 1, 2)$ знаходиться під дією сили тяжіння, дисипативного моменту $\boldsymbol{M}_i = D_i \boldsymbol{\omega}_i$ ($D_i = \mathrm{diag}\left(D_{i1}, D_{i2}, D_{i3}\right)$, $D_{ij} > 0$; $i = 1, 2;$ $j = 1, 3$), що моделює середовище з опором і постійного моменту $\boldsymbol{M}_{iq} = Q_i \boldsymbol{e}_3^i$, який

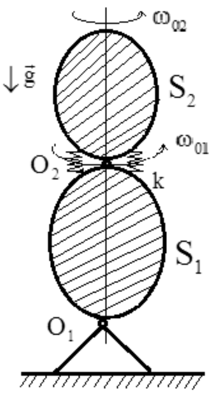

Рис. 1

спрямований вздовж осі симетрії твердого тіла S_i та підтримує його рівномірне обертання. Тут $\boldsymbol{\omega}_i$ – кутова швидкість твердого тіла S_i.

Рівняння обертання двох важких, пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з урахуванням дисипативних і постійних моментів матимуть вигляд [15]:

$$
\begin{aligned}
&(J_1\boldsymbol{\omega}_1)^{\bullet} + m_2\boldsymbol{s}_1 \times \left(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{c}_2\right)^{\bullet} = \\
&= g\left(m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{s}_1\right) \times \boldsymbol{\nu} - \mathbf{L} + Q_1\mathbf{e}_3^1 - D_1\boldsymbol{\omega}_1; \\
&(J_2\boldsymbol{\omega}_2)^{\bullet} + m_2\boldsymbol{c}_2 \times \left(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{c}_2\right)^{\bullet} = \\
&= m_2 g\boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{L} + Q_2\boldsymbol{e}_3^2 - D_2\boldsymbol{\omega}_2.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Тут $J_i = \mathrm{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – тензор інерції твердого тіла S_i відносно точки O_i; точкою позначена абсолютна похідна; $\boldsymbol{s}_1 = \overrightarrow{O_1O_2}$; $\boldsymbol{c}_i = \overrightarrow{O_iC_i}$; m_i і C_i – маса і центр мас тіла S_i; $\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{g}/|\boldsymbol{g}|$, $\boldsymbol{g}$ – вектор прискорення вільного падіння, $g = |\boldsymbol{g}|$.

Зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\boldsymbol{e}_1^i\boldsymbol{e}_2^i\boldsymbol{e}_3^i$ з вершиною в точці O_i, осі якого направимо по головних осях тензора інерції J_i і введемо нерухомий базис $\boldsymbol{e}_1^0\boldsymbol{e}_2^0\boldsymbol{e}_3^0$, вектор $\boldsymbol{e}_3^0$ якого збігається з векторами $\boldsymbol{\nu}$. Нехай $\boldsymbol{s}_1 = s_1\boldsymbol{e}_3^1$, $\boldsymbol{c}_i = c_i\boldsymbol{e}_3^i$.

Рівняння (1.1) в кутах Крилова $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ відносно інерціальної системи $\boldsymbol{e}_1^0\boldsymbol{e}_2^0\boldsymbol{e}_3^0$ запишуться наступним чином [1, 8]:

$$A_i'(\ddot{\beta}_i + \dot{\alpha}_i^2 \sin\beta_i \cos\beta_i) + C_i r_i \dot{\alpha}_i \cos\beta_i + \mu\beta_{ki} =$$

$$= a_i g \sin\beta_i \cos\alpha_i + k_{i-1}(\alpha_{32}^{i-1i}\cos\gamma_i + \alpha_{31}^{i-1i}\sin\gamma_i) + k_i(\alpha_{32}^{i+1i}\cos\gamma_i + \alpha_{31}^{i+1i}\sin\gamma_i) - D_{i1}\dot{\beta}_i;$$

$$A_i'(\ddot{\alpha}_i \cos\beta_i - 2\dot{\alpha}_i\dot{\beta}_i \sin\beta_i) - C_i r_i \dot{\beta}_i + \mu\alpha_{ki} = \tag{1.2}$$

$$= a_i g \sin\alpha_i + k_{i-1}(\alpha_{32}^{i-1i}\sin\gamma_i + \alpha_{31}^{i-1i}\cos\gamma_i) + k_i(\alpha_{32}^{i+1i}\sin\gamma_i + \alpha_{31}^{i+1i}\cos\gamma_i) - D_{i1}\dot{\alpha}_i\cos\beta_i;$$

$$\dot{r}_i = -r_i D_{i3} + Q_i \quad (i = 1, 2). \tag{1.3}$$

Тут

$$r_i = \dot{\gamma}_i - \dot{\alpha}_i \sin\beta_i; \quad \mu = s_1 a_2; \quad A_1' = A_1 + s_1^2 m_2; \quad A_2' = A_2; \quad a_1 = m_1c_1 + m_2s_1; \quad a_2 = m_2c_2;$$

$$k_1 = k;\ k_0 = k_2 = 0;\ \beta_{ki} = \ddot{\beta}_k\left(\cos\beta_k\cos\beta_i + \sin\beta_k\sin\beta_i\cos(\alpha_k - \alpha_i)\right) -$$

$$-\left(\ddot{\alpha}_k\cos\beta_k\sin\beta_i - 2\dot{\alpha}_k\dot{\beta}_k\sin\beta_k\sin\beta_i\right)\sin(\alpha_i - \alpha_k) +$$

$$+(\dot{\alpha}_k^2 + \dot{\beta}_k^2)\cos\beta_k\sin\beta_i\cos(\alpha_i - \alpha_k) - \beta_k^2\sin\beta_k\cos\beta_i;$$

$$\alpha_{ki} = \left(\ddot{\alpha}_k\cos\beta_k - 2\dot{\alpha}_k\dot{\beta}_k\sin\beta_k\right)\cos(\alpha_k - \alpha_i) +$$

$$+\ddot{\beta}_k\sin\beta_k\sin(\alpha_k - \alpha_i)\left(\ddot{\beta}_k\sin\beta_k + (\dot{\alpha}_k^2 + \dot{\beta}_k^2)\cos\beta_k\right);$$

$$\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \boldsymbol{e}_\mu^i \cdot \boldsymbol{e}_\kappa^j,\ \boldsymbol{e}_\mu^i = \sum_{\kappa=1}^{3}\alpha_{\mu\kappa}^{i0}\boldsymbol{e}_\kappa^0;$$

$$\alpha_{11}^{i0}=\cos\alpha_i\cos\gamma_i+\sin\alpha_i\sin\beta_i\sin\gamma_i;\ \alpha_{21}^{i0}=\cos\beta_i\sin\gamma_i;$$

$$\alpha_{31}^{i0}=-\sin\alpha_i\cos\gamma_i+\cos\alpha_i\sin\beta_i\sin\gamma_i;\ \alpha_{12}^{i0}=-\cos\alpha_i\sin\gamma_i+\sin\alpha_i\sin\beta_i\cos\gamma_i;$$

$$\alpha_{22}^{i0}=\cos\beta_i\cos\gamma_i\,\alpha_{13}^{i0}=\sin\alpha_i\cos\beta_i;\ \alpha_{32}^{i0}=\sin\alpha_i\sin\gamma_i+\cos\alpha_i\sin\beta_i\cos\gamma_i; \tag{1.4}$$

$$\alpha_{13}^{i0}=\sin\alpha_i\cos\beta_i;\ \alpha_{23}^{i0}=-\sin\beta_i;\ \alpha_{33}^{i0}=\cos\alpha_i\cos\beta_i.$$

Коефіцієнти $\alpha_{32}^{21},\alpha_{31}^{21},\alpha_{32}^{12},\alpha_{31}^{32},\alpha_{32}^{12}$, що входять в рівняння (1.2), визначаються з виразів (1.4).

Система (1.2) – (1.3) допускає розв'язки

$$\alpha_i=\beta_i=0;\ \ \gamma_i=1;\ \ r_i=\omega_{0i}=Q_i/D_{i3}\ \ (i=1,2), \tag{1.5}$$

які відповідають рівномірним обертанням твердих тіл S_i з кутовими швидкостями ω_{0i} навколо вертикалі.

§2. Умови стабілізації нестійкого рівномірного обертання гіроскопа.

Рівняння (1.3) відокремлюється від інших рівнянь і його характеристичне рівняння має один дійсний негативний корінь. Вважаючи в збуреному русі $r_i=\omega_{0i}+\delta_i$ і зберігаючи для інших змінних їх попередні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху

$$A_i'\ddot\beta_i+\tilde C_i\dot\alpha_i+D_{i1}\dot\beta_i-(a_ig-k)\beta_i+\mu\ddot\beta_j=0;$$

$$A_i'\ddot\alpha_i-\tilde C_i\dot\beta_i+D_{i1}\dot\alpha_i-(a_ig-k)\alpha_i+\mu\ddot\alpha_j=0\quad(i=1,2;\ \ j=3-i). \tag{2.1}$$

Нехай $u_i=\beta_i-i\alpha_i$, тоді рівняння (2.1) приймуть вигляд

$$A_i'\ddot u_i+\left(i\tilde C_i+D_{i1}\right)\dot u_i-(a_ig-k)u_i+\mu\ddot u_j=0. \tag{2.2}$$

Тут і далі слід відрізняти нижній індекс $i=1,2$ від уявної одиниці; $\tilde C_i=C_i\omega_{0i}$.

Представляючи шукані функції у вигляді $a\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (2.2) у вигляді:

$$\begin{vmatrix} F_1 & k-\mu\lambda^2\\ k-\mu\lambda^2 & F_2\end{vmatrix}=0, \tag{2.3}$$

або

$$a_4\lambda^4+(a_3+ib_3)\lambda^3+(\tilde a_2+ib_2)\lambda^2+(\tilde a_1+ib_1)\lambda+a_0+ib_0=0, \tag{2.4}$$

де

$$F_i=A_i'\lambda^2+(i\tilde C_i+D_{i1})\lambda-a_ig+k;$$

$$a_4=A_1'A_2'-\mu^2=(A_1+c_1^2m_1)(A_2+c_2^2m_2)+A_2s_1^2m_2>0;$$

$$a_3=A_1'D_{21}+A_2'D_{11}>0;\ b_3=A_1'\tilde C_2+A_2'\tilde C_1;$$

$$\tilde a_2=D_{11}D_{21}-\tilde C_1\tilde C_2+(A_1'+A_2'+2\mu)k-(A_1'a_2+A_2'a_1)g;\ b_2=\tilde C_1D_{21}+\tilde C_2D_{11}; \tag{2.5}$$

$$\tilde a_1=(D_{11}+D_{21})k-(a_1D_{21}+a_2D_{11})g;\ b_1=\left(\tilde C_1+\tilde C_2\right)k-\left(a_1\tilde C_2+a_2\tilde C_1\right)g;$$

$$a_0=\left[a_1a_2g-(a_1+a_2)k\right]g;\ b_0=0.$$

З рівняння (2.3) випливає, що коли центр мас другого тіла збігається з точкою O_2 ($c_2=0,\ a_2=0,\ \mu=0$) і відсутній пружний відновлювальний момент ($k_2=0$), то в цьому випадку це рівняння розпадається на два рівняння, де немає взаємовпливу першого тіла на друге, тому стабілізація стає неможливою.

Для того, щоб всі нулі рівняння (2.4) лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Льєнара – Шіпара, записаного в іннорному вигляді [2], необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, складена з коефіцієнтів многочлена (2.4), була іннорно-позитивною, тобто були позитивно визначені матриці $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5$ і Δ_7:

$$I_1 = \left|\Delta_1\right| = a_3 = A_1' D_{21} + A_2' D_{11} > 0\,; \tag{2.6}$$

$$I_3 = \left|\Delta_3\right| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \end{vmatrix} > 0\,; \tag{2.7}$$

$$I_5 = \left|\Delta_5\right| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0; \tag{2.8}$$

$$I_7 = \left|\Delta_7\right| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_0 \tilde{I}_7 > 0. \tag{2.9}$$

Так як $I_1 > 0$, то асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох гіроскопів Лагранжа, зв’язаних пружним сферичним шарніром, визначається трьома нерівностями (2.7) – (2.9).

З нерівності (2.6) видно, що при частковій дисипації ($D_{11} = D_{21} = 0, D_{i3} \neq 0$) асимптотична стійкість неможлива.

Стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$) та коефіцієнта пружності сферичного шарніру k .

Таким чином, умови стабілізації відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$ запишуться так:

$$I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} > 0\,; \tag{2.10}$$

$$I_{54}\tilde{C}_2^4 + I_{53}\tilde{C}_2^3 + \ldots + I_{51}\tilde{C}_2 + I_{50} > 0\,; \tag{2.11}$$

$$\left(\tilde{I}_{74}\tilde{C}_2^4 + \tilde{I}_{73}\tilde{C}_2^3 + \ldots + \tilde{I}_{71}\tilde{C}_2 + \tilde{I}_{70}\right)\left[a_1 a_2 g - \left(a_1 + a_2\right)k\right] > 0. \tag{2.12}$$

Тут

$$I_{32} = D_{11}\left(D_{11}\mu^2 + D_{21}A_1'^2\right) > 0\,; I_{31} = -2D_{11}D_{21}\tilde{C}_1\left(A_1'A_2' - \mu^2\right);$$

$$I_{30} = (A_1'D_{21} + A_2'D_{11})\Big[((\mu + A_2')^2 D_{11} + (\mu + A_1')^2 D_{21})k -$$

$$-g(D_{11}A_2'^2 + D_{21}\mu^2)a_1 - g(D_{21}A_1'^2 + D_{11}\mu^2)a_2 +$$

$$+D_{21}D_{11}(A_1'D_{21}+A_2'D_{11})\Big]+\tilde{C}_1^2\Big[\mu^2 D_{21}-(A_2'D_{11}+2A_1'D_{21})A_2'\Big]D_{21};$$

$$I_{54}=D_{11}^2(k-a_1g)(D_{21}A_1'^2+D_{11}\mu^2);$$

$$\tilde{I}_{74}=D_{11}^2(D_{21}A_1'^2+D_{11}\mu^2)(D_{11}k^2(k+a_1gD_{21})^2).$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Дискримінант квадратної нерівності (2.10) прийме вигляд

$$D=4D_{11}\tilde{C}_2^2(A_1'D_{21}+A_2'D_{11})\Big[-(A_1'^2D_{21}+\mu^2D_{11})((\mu+A_2')^2D_{11}+$$

$$+(\mu+A_1')^2D_2)k+(A_2'^2D_{11}+\mu^2D_{21})(A_1'^2D_{21}+\mu^2D_{11})a_1g+$$

$$+(A_1'^2D_{21}+\mu^2D_{11})^2a_2g-D_{21}(\mu^2D_{11}^2+\mu^2\tilde{C}_1^2+D_{11}D_{21}A_2'^2)(A_1'D_{21}+A_2'D_{11})\Big].$$

Звідки випливає, що при $a_1\le 0$ і $a_2\le 0$ він від'ємний, а оскільки $I_{32}>0$, то в цьому випадку нерівність (2.10) буде завжди мати місце.

Знайдемо умови для величини коефіцієнта пружного моменту k, при яких нерівності (2.10) – (2.12) виконуватимуться при досить великих значеннях кутової швидкості ω_{02}.

Із (2.11) випливає, що коефіцієнт I_{54} буде додатнім при $k>a_1g$. Із нерівності (2.12) отримуємо, що старший коефіцієнт цієї нерівності буде додатнім, якщо $a_1a_2g>\ >(a_1+a_2)k$.

Потрібно зазначити, що центр мас механічної системи визначається виразом $(a_1+a_2)/(m_1+m_2)$.

Таким чином, маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases}k>a_1g,\\ a_1a_2g>(a_1+a_2)k.\end{cases}\qquad(2.13)$$

При $a_1+a_2>0$ система нерівностей (2.13) несумісна, оскільки в такому випадку $a_1g<k<a_1a_2g/(a_1+a_2)$, звідки слідує, що $a_1^2<0$.

Отже, якщо

$$\begin{cases}k>a_1g,\\ k>a_1a_2g/(a_1+a_2),\\ a_1+a_2<0,\end{cases}$$

то старші коефіцієнти в нерівності (2.11) – (2.12) додатні і при досить великих значеннях кутової швидкості ω_{02} можлива стабілізація нестійкого обертання вихідного гіроскопа Лагранжа.

При $c_2<0$ $(c_2=-\tilde{c}_2)$ і $c_1>0$ нерівність $a_1+a_2<0$ еквівалентна нерівності

$$\tilde{c}_2>s+c_1m_1/m_2,\qquad(2.14)$$

з якої випливає, що центр мас другого гіроскопа повинен знаходитися нижче нерухомої точки на відстані c_1m_1/m_2, що дає можливість стабілізувати нестійке обертання першого гіроскопа (рис. 2).

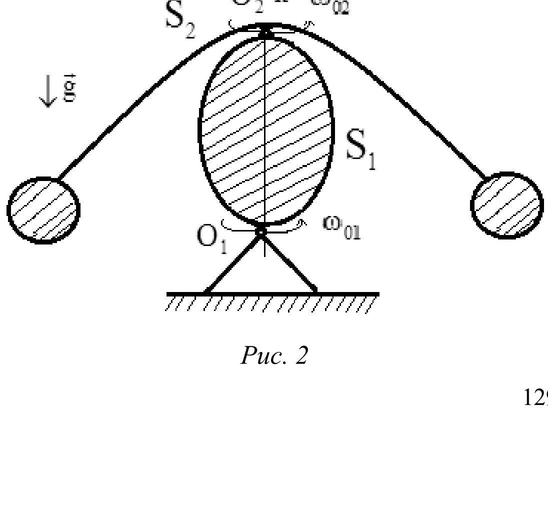

Рис. 2

§3. Випадок відсутності диссипативного і постійного моментів.

Розглянемо випадок відсутності дисипативних ($D_{ij}=0$, $i=1,2; j=1,3$) і постійних ($Q_i=0$) моментів і припустимо, що для «сплячого» гіроскопа Лагранжа не виконується критерій Маєвського, тобто $\omega_{01}^2<(4A_1'a_1 g)/C_1^2$. Покажемо можливість стабілізації цього гіроскопа за допомогою другого гіроскопа, який обертається, та пружного моменту. У цьому випадку система рівнянь (1.2) – (1.3) допускає розв'язки (1.5), де $r_i=\omega_{0i}$, а характеристичне рівняння (2.4) при $\tilde{a}_1=a_3=b_2=0$ матиме вигляд

$$a_4\lambda^4+ib_3\lambda^3+\tilde{a}_2\lambda^2+ib_1\lambda+a_0=0\,. \tag{3.1}$$

Коефіцієнти рівняння (3.1) знаходяться за формулами (2.5), в яких потрібно покласти $D_{ij}=0$.

Стійкість консервативних систем визначається тим, що корені рівняння (3.1) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (3.1) покладемо $\lambda=i\lambda_1$ і це рівняння матиме вигляд

$$a_4\lambda_1^4+b_3\lambda_1^3-\tilde{a}_2\lambda_1^2-b_1\lambda_1+a_0=0. \tag{3.2}$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (3.2) були різні і лежали на дійсній осі, згідно критерію Льєнара – Шіпара, записаного в іннорному вигляді [3], необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннорно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці $\Delta_1,\Delta_3,\Delta_5$ і Δ_7 :

$$I_1=|\Delta_1|=4a_4>0;$$

$$I_3=|\Delta_3|=\begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -\tilde{a}_2\\ 0 & 4a_4 & 3b_3\\ 4a_4 & 3b_3 & -2\tilde{a}_2\end{vmatrix}>0; \tag{3.3}$$

$$I_5=|\Delta_5|=\begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -\tilde{a}_2 & -b_1 & a_0\\ 0 & a_4 & b_3 & -\tilde{a}_2 & -b_1\\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2\tilde{a}_2\\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2\tilde{a}_2 & 0\\ 4a_4 & 3b_3 & -2\tilde{a}_2 & 0 & 0\end{vmatrix}>0; \tag{3.4}$$

$$I_7=|\Delta_7|=\begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -\tilde{a}_2 & -b_1 & a_0 & 0 & 0\\ 0 & a_4 & b_3 & -\tilde{a}_2 & -b_1 & a_0 & 0\\ 0 & 0 & a_4 & b_3 & -\tilde{a}_2 & -b_1 & a_0\\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2\tilde{a}_2 & a_1\\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2\tilde{a}_2 & a_1 & 0\\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2\tilde{a}_2 & a_1 & 0 & 0\\ 4a_4 & 3b_3 & -2\tilde{a}_2 & a_1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}>0. \tag{3.5}$$

Так як $I_1>0$, то стійкість рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначається трьома нерівностями (3.3) – (3.5).

Стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2(\tilde{C}_2=C_2\omega_{02})$ та коефіцієнта пружності сферичного шарніру k .

Таким чином, умови стабілізації відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$ запишуться так:

$$I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} > 0\,; \tag{3.6}$$

$$I_{54}\tilde{C}_2^4 + I_{53}\tilde{C}_2^3 + ... + I_{51}\tilde{C}_2 + I_{50} > 0\,; \tag{3.7}$$

$$I_{76}\tilde{C}_2^6 + I_{75}\tilde{C}_2^5 + ... + I_{71}\tilde{C}_2 + I_{70} > 0. \tag{3.8}$$

Тут

$$I_{32} = 3A_1'^2\left(A_1'A_2' - s_1^2a_2^2\right) = 3A_1'^2\left(A_1 + c_1^2m_1\right)\left(A_2 + c_2^2m_2\right) + A_2s_1^2m_2 > 0;$$

$$I_{54} = A_1'^2\left(\tilde{C}_1^2 - 3(a_1g - k)A'\right); \tag{3.9}$$

$$I_{76} = A_1'^2(k - a_1g)^2\left(\tilde{C}_1^2 - 4(a_1g - k)A'\right). \tag{3.10}$$

Щоб $I_{54} > 0$ і $I_{76} > 0$, необхідно покласти

$$k > \left(4A_1'a_1g - \tilde{C}_1^2\right)\Big/4A_1',$$

або

$$\tilde{C}_1^2 > 4\left(a_1g - k\right)A_1'. \tag{3.11}$$

Так як $I_{32} > 0$, то при виконанні нерівності (3.11) і досить великій кутовій швидкості ω_{02} буде можлива стабілізація.

З нерівності (3.11) випливає, що наявність пружності у сферичному шарнірі ($k > 0$) дозволяє дослідити випадок, який виходить за межі використання критерія Маєвського.

Таким чином, у випадку наявності дисипації стабілізація можлива тільки тоді, коли центр мас другого тіла знаходиться нижче нерухомої точки (рис. 2), а при відсутності дисипації центр мас другого тіла може знаходитись вище нерухомої точки (рис. 1). У цьому є принципова різниця в цих двох випадках.

Висновок.

У роботі запропоновано підхід та розроблено метод дослідження задач стабілізації в середовищі з опором «сплячого» гіроскопу Лагранжа за допомогою другого обертового гіроскопа. Цей метод дозволяє розглядати досить широке коло задач стабілізації в середовищі з опором твердого тіла та систем зв'язаних твердих тіл. В даній статті «сплячий» гіроскоп обертається навколо нерухомої точки, а другий гіроскоп знаходиться над ним. Обертання гіроскопів підтримуються постійними моментами, спрямованими вздовж їх осей симетрії. З використанням кутів Крилова і на основі критерію Льєнара – Шіпара в іннорному вигляді отримано умови стабілізації у вигляді системи трьох нерівностей. Показана можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнта пружності шарніра. Стабілізація буде неможлива при відсутності пружності в шарнірі і збігу центру мас другого гіроскопа з їх загальною точкою з першим гіроскопом. Знайдено умови для коефіцієнта пружності шарніра, при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Звідки випливає, що стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що його центр мас знаходиться нижче нерухомої точки. Одержані умови стабілізації порівнюються з аналогічними умовами за відсутності дисипації. Таким чином показано, що у випадку наявності дисипації стабілізація можлива тільки тоді, коли центр мас другого тіла знаходиться нижче нерухомої точки, а при відсутності дисипації центр мас другого тіла може знаходитися вище нерухомої точки. У цьому є принципова різниця в цих двох випадках.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано підхід та розроблено метод дослідження задач стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа за допомогою другого обертового гіроскопа. «Сплячий» гіроскоп обертається навколо нерухомої точки під дією постійного моменту, спрямованого уздовж осі обертання, а другий гіроскоп знаходиться над ним. Гіроскопи з'єднані пружним сферичним шарніром і їх обертання підтримуються постійними моментами, спрямованими вздовж їх осей симетрії. З використанням кутів Крилова і на основі іннорного підходу отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнта пружності сферичного шарніру. Показано, що стабілізація буде неможлива за відсутності пружності в шарнірі і збігові центру мас другого гіроскопа з їх загальною точкою із першим гіроскопом. Знайдено умови для коефіцієнта пружності, при яких старші коефіцієнти цих нерівностей позитивні. Звідки випливає, що стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що центр мас механічної системи знаходиться нижче нерухомої точки. Проведено порівняння отриманих умов стабілізації з аналогічними умовами при відсутності дисипації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динамічно симетричні тверді тіла, середовище з опором, стабілізація, асимптотична стійкість.

1. *Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А.* Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика». – Том 9. – Киев: Наук. думка, 2012. – 395 с.
2. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. – Москва: Наука, 1979. – 304 с.
3. *Карапетян А.В.* О стационарных движениях волчка Лагранжа с возбуждением в сопротивляющейся среде // Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2000. – № 5. – С. 39 – 43.
4. *Кононов Ю.Н.* О влиянии перегородок в цилиндрической полости на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа // Матем. физ. и нелин. механика. – 1992. – **17**, № 51. – С. 33 – 37.
5. *Кононов Ю.Н., Хомяк Т.В.* Об эффекте стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 2004. – **34**. – С. 161 – 169.
6. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – Москва: Наука, 1976. – 320 с.
7. *Савченко А.Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. – Киев: Наук. думка, 1977. – 160 с.
8. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 166 с.
9. *Akulenko L.D., Zinkevich Ya.S., Kozachjenko T.A., Leshchenko D.D.* The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque // J. of Appl. Mathem. and Mech. – 2017. – **81,** N 2. – P. 79 – 84.
10. *Aslanov V.S.* Rigid Body Dynamics for Space Applications. – Oxford: Butterworth Heinemann, 2017. – 410 p.
11. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D.* Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. – Berlin: Springer, 2017. – 260 p.
12. *Khomyak T.V.* Stabilization of the Unstable Spinning of a Lagrange Top Filled with a Fluid // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 6. – P. 702 – 705.
13. *Kononov Yu.M.* Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium under a Constant Moment // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 4. – P. 432 – 439.
14. *Kononov Y.N., Khomyak T.V.* On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body // Facta Universitatis. Series Mechanics, Automatic Control and Robotics. – 2005. – **4**, N 17. – P. 195 – 201.
15. *KononovYu.M., SviatenkoYa.I.* On the subject of influence of dissipative and constant of moments on the stability of uniform rotations of non-free two elastically connected gyroscopes of Lagrange // Праці інституту прикл. матем. і мех. НАНУ. – 2020. – **34**. – С. 50 – 61.
16. *Leshchenko D.D., Ershkov S.V., Kozachenko T.A.* Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques // Nonlinear Dyn. – 2021. – N 103. – P. 1517 – 1528.

Надійшла 09.08.2021 Затверджена до друку 31.05.2022