

В.М.Назаренко, О.Л.Кіпніс

**ГРАНИЧНА РІВНОВАГА КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА,  
ПОСЛАБЛЕНОГО МІЖФАЗНИМИ ЗСУВНИМИ ТРІЩИНАМИ  
В КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,  
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;  
e-mail: nazvm1@gmail.com, a.l.kipnis@gmail.com*

**Abstract.** An exact analytical solution of the problem of composites fracture mechanics for piece-homogeneous isotropic elastic body weakened by interfacial shear cracks contained at the corner point of media-separating boundary was constructed by the Wiener – Hopf method. Character of changing of concentration level of the stress near cracks tip is established. The condition of the start of cracks is determined and stability of their equilibrium is investigated.

**Key words:** fracture mechanics of composites, corner point, interfacial shear crack, stress intensity factor, Wiener – Hopf method.

**Вступ.**

Широке використання у різних галузях промисловості конструкцій, виготовлених з композитів та підвищення вимог щодо їх надійності в процесі експлуатації ставить нові виклики перед механікою руйнування матеріалів. Зокрема, велику кількість наукових праць присвячено дослідженню напружено-деформованого стану в шаруватих композитних матеріалах за умови наявності дефектів в межі поділу середовищ. У відповідних задачах теорії пружності такі матеріали можуть моделюватися кусково-однорідними тілами, які послаблені міжфазними мікро- або макротріщинами. При цьому в залежності від геометрії навантаження дослідження виконуються як в рамках класичних [7, 16 – 19, 30, 31], так і в рамках неklasичних [3, 8, 14, 20, 22] підходів механіки руйнування із застосуванням відповідних критеріїв руйнування.

Важливим напрямком досліджень є вивчення проблем, пов'язаних з руйнуванням матеріалів, які знаходяться в умовах стиску вздовж тріщин. Через неможливість застосування критеріїв руйнування типу Гріфітса – Ірвіна за указаної схеми навантаження в роботах О.М. Гузя із залученням підходів тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл було запропоновано критерій руйнування, відповідно до якого старт процесу руйнування асоціюється з локальною втратою стійкості стану рівноваги матеріалу біля тріщини [2, 3, 8, 20]. Зокрема, зазначений метод застосовується при розв'язанні задач про стиск кусково-однорідних тіл вздовж міжфазної тріщини [15, 23 – 26], двох міжфазних тріщин [27], періодичної системи паралельних тріщин [28].

У більшості робіт, присвячених тріщинам, що розташовані на межі поділу середовищ, ця межа вважається гладкою [6, 7, 15 – 19, 23–29], перед усім прямолінійною (у випадку плоскої задачі). Проте, кутові точки негладкої межі поділу середовищ являють собою концентратори напружень зі степеневою особливістю, а тому становлять небезпеку з точки зору розриву суцільності в їх околі та зародження тріщин, які виходять з них. На початковому етапі руйнування довжини таких тріщин значно менші за лінійні розміри тіла, але якщо їх рівновага виявиться нестійкою, то після досягнення стану критичної рівноваги, режим розвитку тріщин буде динамічним, що може призвести до втрати цілісності всієї конструкції.

Викладене вище обґрунтовує актуальність дослідження задач механіки руйнування композитних матеріалів для кусково-однорідних тіл, послаблених міжфазними тріщинами, що зародилися в кутовій точці межі поділу середовищ.

В даній роботі побудовано точний аналітичний розв'язок задачі механіки руйнування для кусково-однорідної пружної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута з маломасштабними міжфазними зсувними тріщинами у його вершині (деякі положення на цю тему приведені в роботі [4]). Детально викладено математичні аспекти використання методу Вінера – Гопфа у його ефективному поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна при дослідженні крайових задач для клиноподібних тіл.

### §1. Постановка задачі.

В умовах плоскої деформації в рамках статичної симетричної задачі розглянемо кусково-однорідне тіло з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яке складене з ізотропних пружних частин з модулями Юнга  $E_1, E_2$  ( $E_1 > E_2$ ) і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  (рис. 1).

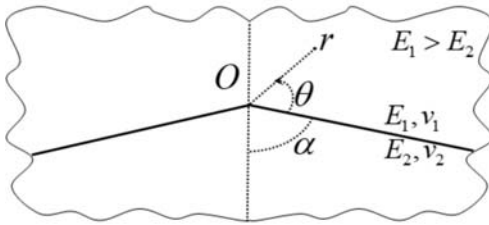


Рис. 1

У відповідності до загальних положень про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл [11, 13] кутова точка на межі поділу середовищ  $O$  являє собою концентратор напружень зі степеневу особливістю. Головні члени розкладів напружень в асимптотичні ряди при  $r \rightarrow 0$  є розв'язком однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ

у формі сторін кута (задачі  $K$ ), який породжується єдиним на інтервалі  $(-1; 0)$  коренем  $\lambda_0$  її характеристичного рівняння

$$\Delta(-\lambda - 1) = 0; \quad \Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2;$$

$$\delta_0(z) = (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha)[\alpha_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha];$$

$$\delta_1(z) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) \times \\ \times [\alpha_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha] - [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\alpha_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha);$$

$$\delta_2(z) = [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\alpha_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha);$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0; \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}; \quad \alpha_{1,2} = 3 - \nu_{1,2}.$$

При цьому мають місце формули виду

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = C g_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) r^{\lambda_0} + o(r^{\lambda_0});$$

$$\sigma_\theta(r, 0) = C g_2(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) r^{\lambda_0} + o(r^{\lambda_0}) \quad (r \rightarrow 0),$$

де функції  $g_1, g_2$  – відомі функції, які отримано з розв'язку задачі  $K$ , а стала  $C$  визначається з розв'язку кожної конкретної задачі теорії пружності (рис. 1). Сталу  $C$ , що залежить від зовнішнього навантаження, можна розглядати як коефіцієнт інтенсивності напружень у кутовій точці на межі поділу середовищ.

Результати розрахунків показують, що  $\lambda_0 > -1/2$ ;  $g_1(\alpha) < 0$  при  $\alpha \neq 0, \pi/2, \pi$ ;  $g_1(0) = g_1(\pi/2) = g_1(\pi) = 0$ ;  $g_1 = 0$ , якщо  $E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2$ ;  $g_2(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in (0; \alpha_1) \cup (\pi/2; \alpha_2)$ ;  $g_2(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (\alpha_1; \pi/2) \cup (\alpha_2; \pi)$   $g_2(0) = g_2(\alpha_1) = g_2(\alpha_2) = g_2(\pi/2) = g_2(\pi) = 0$ ;  $g_2 = 0$ , якщо  $E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2$ . При збільшенні  $e_0$  зменшуються  $\alpha_1, \alpha_2$ . Деякі значення  $\lambda_0$  наведено у табл. 1 ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ).

Таблиця 1

$\alpha^\circ$	$e_0$			
	2	3	5	10
15	-0,036	-0,068	-0,122	-0,215
30	-0,075	-0,132	-0,232	-0,310
45	-0,112	-0,180	0,258	-0,332
60	-0,112	-0,184	-0,248	-0,308
75	-0,086	-0,127	-0,167	-0,203
105	-0,025	-0,037	-0,049	-0,059
120	-0,054	-0,081	-0,104	-0,124
135	-0,089	-0,130	-0,168	-0,202
150	-0,117	-0,173	-0,228	-0,278
165	-0,104	-0,168	-0,241	-0,318

Значенням  $e_0$ , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення  $\alpha^\circ_1$ , що дорівнюють 38,2°; 34,4°; 29,3°; 21,7° і значення  $\alpha^\circ_2$ , що дорівнюють 134,2°; 133,4°; 133,1°; 131,3°.

Якщо  $C < 0$  (нижче показано, що повинна виконуватись саме ця умова) і  $\alpha \in (\alpha_1; \pi/2) \cup (\alpha_2; \pi)$ , то згідно з властивостями функції  $g_2$  та з формулою, що наведено вище,  $\sigma_\theta(r, 0) \rightarrow -\infty$  при  $r \rightarrow 0$ , а тому на межі поділу середовищ біля кутової точки нормальні напруження є стискаючими. У цьому випадку внаслідок високої концентрації напружень у кутовій точці можливе виникнення міжфазних зсувних тріщин, що виходять з неї, з повністю контактуючими берегами, довжина яких значно менша, ніж розміри тіла (рис. 2). Чим більше відношення модулів Юнга  $e_0 = E_1/E_2 > 1$ , тим ширша область значень кута  $\alpha$ , при яких слід очікувати утворення таких тріщин.

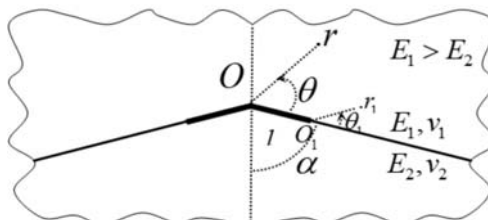


Рис. 2

Припускаємо, що тертя між берегами тріщин відсутнє.

Якщо  $C < 0$  і  $\alpha \in (0; \alpha_1) \cup (\pi/2; \alpha_2)$ , то на межі поділу середовищ біля кутової точки має місце висока концентрація нормальних розтягуючих напружень. У цьому випадку слід очікувати зародження відкритих тріщин. В подальшому розглядатимемо лише випадок  $C < 0, \alpha \in (\alpha_1; \pi/2) \cup (\alpha_2; \pi)$ .

Ставиться задача визначення коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_{II}$  у кінці тріщини  $O_1$ , встановлення умови розвитку тріщин та дослідження їх рівноваги на стійкість (рис. 2).

З урахуванням малості тріщин приходимо до плоскої статичної симетричної задачі теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу сере-

довижч у формі сторін кута, що містить розрізи скінченної довжини, які виходять з кутової точки та розташовані на цій межі (рис. 3).

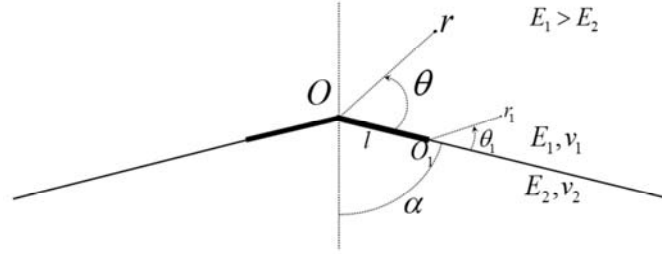


Рис. 3

На нескінченності задана асимптотика поля напружень, що являє собою розв'язок аналогічної задачі без розрізів – задачі *K*. Довільна стала *C*, що входить до вказаного розв'язку, вважається заданою. Вона характеризує інтенсивність зовнішнього поля.

Наведемо рівняння рівноваги, умову сумісності деформацій і два співвідношення, які випливають із закону Гука

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0; \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} = 0; \quad (1.1)$$

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad \left( \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right); \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = \frac{1+\nu_j}{E_j} \left( 2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{1-\nu_j}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \frac{\nu_j}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right); \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1+\nu_j}{E_j} \left[ (1-\nu_j)\sigma_r - \nu_j\sigma_\theta \right] \quad (j=1, 2).$$

Беручи до уваги симетрію, крайові умови задачі (рис. 3) запишемо так:

$$\theta = \pi - \alpha, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0; \quad \theta = -\alpha, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0;$$

$$\theta = 0, \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = 0; \quad (1.4)$$

$$\theta = 0, r < l, \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = 0, r > l, \langle u_r \rangle = 0; \quad (1.5)$$

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty, \tau_{r\theta} = Cg_1 r^{\lambda_0} + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (-\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha; \langle a \rangle - \text{стрибок } a). \quad (1.6)$$

Розв'язок сформульованої задачі теорії пружності (рис. 3) є сумою розв'язків наступних двох задач. Перша (задача 1) відрізняється від другої тим, що замість першої з умов (1.5) маємо

$$\theta = 0, r < l, \tau_{r\theta} = -Cg_1 r^{\lambda_0}, \quad (1.7)$$

а на нескінченності напруження згасають як  $o(1/r)$  (у (1.6) відсутній перший доданок). Друга задача відповідає задачі *K*. Оскільки розв'язок другої задачі відомий, достатньо побудувати розв'язок першої задачі.

## §2. Виведення функціонального рівняння Вінера – Гопфа.

Для побудови точного розв'язку задачі 1 будемо використовувати метод Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [12].

Розглянемо змішану задачу теорії пружності для клина  $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$ .

Застосовуючи перетворення Мелліна

$$m^*(p) = \int_0^{\infty} m(r) r^p dr$$

з комплексним параметром  $p$  ( $-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0$ ,  $\varepsilon$  – досить мале додатне число) до рівнянь рівноваги (1.1) і умови сумісності деформацій (1.2), одержуємо систему диференціальних рівнянь відносно меллінівських трансформант напружень  $\sigma_{\theta}^*(p, \theta)$ ,  $\tau_{r\theta}^*(p, \theta)$ ,  $\sigma_r^*(p, \theta)$ .

$$\frac{d\tau_{r\theta}^*}{d\theta} - p\sigma_r^* - \sigma_{\theta}^* = 0; \quad \frac{d\sigma_{\theta}^*}{d\theta} - (p-1)\tau_{r\theta}^* = 0; \quad \frac{d^2\sigma_{\theta}^*}{d\theta^2} + \frac{d^2\sigma_r^*}{d\theta^2} + (p+1)^2(\sigma_{\theta}^* + \sigma_r^*) = 0. \quad (2.1)$$

Система диференціальних рівнянь (2.1) еквівалентна наступному диференціальному рівнянню четвертого порядку

$$\frac{d^4\sigma_{\theta}^*}{d\theta^4} + [(p+1)^2 + (p-1)^2] \frac{d^2\sigma_{\theta}^*}{d\theta^2} + (p+1)^2(p-1)^2\sigma_{\theta}^* = 0. \quad (2.2)$$

Розв'язок рівняння (2.2) має вигляд

$$\sigma_{\theta}^*(p, \theta) = A_1 \sin(p+1)\theta + A_2 \sin(p-1)\theta + A_3 \cos(p+1)\theta + A_4 \cos(p-1)\theta. \quad (2.3)$$

У цій формулі  $A_1(p)$ ,  $A_2(p)$ ,  $A_3(p)$ ,  $A_4(p)$  – невідомі функції параметра  $p$ .

Враховуючи перші два рівняння (2.1), одержуємо

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^*(p, \theta) = \frac{1}{p-1} [A_1(p+1)\cos(p+1)\theta + A_2(p-1)\cos(p-1)\theta - \\ - A_3(p+1)\sin(p+1)\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta]; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(p, \theta) = -\frac{1}{p-1} [A_1(p+3)\sin(p+1)\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta + \\ + A_3(p+3)\cos(p+1)\theta + A_4(p-1)\cos(p-1)\theta]. \end{aligned}$$

Застосовуючи перетворення Мелліна до співвідношень (1.3) та беручи до уваги (2.3) і (2.4), одержуємо наступні вирази для меллінівських трансформант напружень та похідних переміщень:

$$\sigma_{\theta}^* = A_1 \sin(p+1)\theta + A_2 \sin(p-1)\theta + A_3 \cos(p+1)\theta + A_4 \cos(p-1)\theta;$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^* = \frac{1}{p-1} [A_1(p+1)\cos(p+1)\theta + A_2(p-1)\cos(p-1)\theta - \\ - A_3(p+1)\sin(p+1)\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta]; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^* = -\frac{1}{p-1} [A_1(p+3)\sin(p+1)\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta + \\ + A_3(p+3)\cos(p+1)\theta + A_4(p-1)\cos(p-1)\theta]; \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \right)^* = \frac{1+\nu_1}{E_1(p-1)} [A_1(p-\alpha_1)\cos(p+1)\theta + A_2(p-1)\cos(p-1)\theta -$$

$$-A_3(p - \varkappa_1)\sin(p+1)\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta];$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^* = -\frac{1+\nu_1}{E_1(p-1)}[A_1(p+\varkappa_1)\sin(p+1)\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta +$$

$$+ A_3(p+\varkappa_1)\cos(p+1)\theta + A_4(p-1)\cos(p-1)\theta], \quad \varkappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}.$$

Виходячи з крайових умов (1.4), за допомогою (2.5) одержуємо систему лінійних рівнянь

$$A_1(p+1)\cos(p+1)(\pi-\alpha) + A_2(p-1)\cos(p-1)(\pi-\alpha) -$$

$$-A_3(p+1)\sin(p+1)(\pi-\alpha) - A_4(p-1)\sin(p-1)(\pi-\alpha) = 0;$$

$$A_1(p-\varkappa_1)\cos(p+1)(\pi-\alpha) + A_2(p-1)\cos(p-1)(\pi-\alpha) - \quad (2.6)$$

$$-A_3(p-\varkappa_1)\sin(p+1)(\pi-\alpha) - A_4(p-1)\sin(p-1)(\pi-\alpha) = 0;$$

$$A_3 + A_4 = \sigma_\theta^*(p, 0); \quad A_1(p+1) + A_2(p-1) = (p-1)\tau_{r\theta}^*(p, 0).$$

Розв'язок системи (2.6) має вигляд

$$A_1 = \frac{p-1}{2\Delta_+} [(\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha)\sigma_\theta^*(p, 0) + (\sin 2p(\pi-\alpha) - \sin 2\alpha)\tau_{r\theta}^*(p, 0)];$$

$$A_2 = -\frac{1}{2\Delta_+} [(p+1)(\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha)\sigma_\theta^*(p, 0) +$$

$$+ (p-1)(\sin 2p(\pi-\alpha) + \sin 2\alpha)\tau_{r\theta}^*(p, 0)];$$

$$A_3 = \frac{1-p}{2\Delta_+} [(\sin 2p(\pi-\alpha) + \sin 2\alpha)\sigma_\theta^*(p, 0) - (\cos 2p(\pi-\alpha) + \cos 2\alpha)\tau_{r\theta}^*(p, 0)];$$

$$A_4 = \frac{1}{2\Delta_+} [(p+1)(\sin 2p(\pi-\alpha) - \sin 2\alpha)\sigma_\theta^*(p, 0) - \quad (2.7)$$

$$- (p-1)(\cos 2p(\pi-\alpha) + \cos 2\alpha)\tau_{r\theta}^*(p, 0)]; \quad \Delta_+ = \sin 2p(\pi-\alpha) - p \sin 2\alpha.$$

Розглянувши змішану задачу теорії пружності для клина  $-\alpha \leq \theta \leq 0$ , приходимо до системи лінійних рівнянь

$$B_1(p+1)\cos(p+1)\alpha + B_2(p-1)\cos(p-1)\alpha +$$

$$+ B_3(p+1)\sin(p+1)\alpha + B_4(p-1)\sin(p-1)\alpha = 0;$$

$$B_1(p-\varkappa_2)\cos(p+1)\alpha + B_2(p-1)\cos(p-1)\alpha +$$

$$+ B_3(p-\varkappa_2)\sin(p+1)\alpha + B_4(p-1)\sin(p-1)\alpha = 0;$$

$$B_3 + B_4 = \sigma_\theta^*(p, 0); \quad B_1(p+1) + B_2(p-1) = (p-1)\tau_{r\theta}^*(p, 0)$$

$$(B_1(p), B_2(p), B_3(p), B_4(p) - \text{невідомі функції}).$$

Розв'язок останньої системи має вигляд

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\frac{p-1}{2\Delta_-} \left[ (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) \sigma_\theta^*(p, 0) - (\sin 2p\alpha + \sin 2\alpha) \tau_{r\theta}^*(p, 0) \right]; \\
 B_2 &= \frac{1}{2\Delta_-} \left[ (p+1)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) \sigma_\theta^*(p, 0) - \right. \\
 &\quad \left. - (p-1)(\sin 2p\alpha - \sin 2\alpha) \tau_{r\theta}^*(p, 0) \right]; \\
 B_3 &= -\frac{p-1}{2\Delta_-} \left[ (\sin 2p\alpha - \sin 2\alpha) \sigma_\theta^*(p, 0) + (\cos 2p\alpha + \cos 2\alpha) \tau_{r\theta}^*(p, 0) \right]; \\
 B_4 &= \frac{1}{2\Delta_-} \left[ (p+1)(\sin 2p\alpha + \sin 2\alpha) \sigma_\theta^*(p, 0) + \right. \\
 &\quad \left. + (p-1)(\cos 2p\alpha + \cos 2\alpha) \tau_{r\theta}^*(p, 0) \right]; \quad \Delta_- = \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha.
 \end{aligned}$$

Виходячи з останньої умови (1.4), за допомогою (2.5) одержуємо рівність

$$A_1(p - \varepsilon_1) + A_2(p - 1) = e \left[ B_1(p - \varepsilon_2) + B_2(p - 1) \right], \quad e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0. \quad (2.8)$$

Підставляючи вирази для  $A_1, A_2, B_1, B_2$ , приходимо до співвідношення, що зв'язує трансформанти  $\sigma_\theta^*(p, 0)$  і  $\tau_{r\theta}^*(p, 0)$

$$\sigma_\theta^*(p, 0) = \frac{N(p)}{D(p)} \tau_{r\theta}^*(p, 0); \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 N(p) &= (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \left[ (1 - \varepsilon_1) \sin 2p(\pi - \alpha) - (2p - 1 - \varepsilon_1) \sin 2\alpha \right] - \\
 &\quad - (\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha) \left[ (1 - \varepsilon_2) \sin 2p\alpha - (2p - 1 - \varepsilon_2) \sin 2\alpha \right] e; \\
 D(p) &= (1 + \varepsilon_1) \left[ \cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha \right] (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) + \\
 &\quad + (1 + \varepsilon_2) (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) \left[ \sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha \right] e.
 \end{aligned}$$

Використовуючи (2.5), знаходимо

$$\left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^* = \frac{-(1 + \nu_1)}{E_1(p-1)} \left\{ A_3(p + \varepsilon_1) + A_4(p - 1) - [B_3(p + \varepsilon_2) + B_4(p - 1)] e \right\}. \quad (2.10)$$

Підставляючи у (2.10) вирази для  $A_3, A_4, B_3, B_4$  і враховуючи (2.9), приходимо до співвідношення, яке зв'язує трансформанти  $\tau_{r\theta}^*(p, 0)$  і  $\left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^*$

$$\tau_{r\theta}^*(p, 0) = \frac{(1 + \varepsilon_1) D(p)}{2D_0(p)} \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^* ;$$

$$D_0(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\varepsilon_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \right. \\
& \times [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times \\
& \quad \left. \times (\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) \right\} e + \\
& + [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) e^2.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Беручи до уваги другу з умов (1.5) і умову (1.7), одержуємо

$$\tau_{r\theta}^*(p, 0) = l^{p+1} \left[ \Phi^+(p) + \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} \right]; \quad \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^* = l^{p+1} \Phi^-(p); \tag{2.12}$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho; \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^* \rho^p d\rho, \quad \tau = -Cg_1 l^{\lambda_0}.$$

Підставляючи одержані для трансформант  $\tau_{r\theta}^*(p, 0)$  і  $\left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^*$  вирази (2.12) у (2.11), приходимо до наступного функціонального рівняння Вінера – Гопфа відносно невідомих функцій  $\Phi^+(p)$ ,  $\Phi^-(p)$ :

$$\begin{aligned}
\Phi^+(p) + \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} &= G_1^0(p) \Phi^-(p); \quad G_1^0(p) = \frac{(1 + \varkappa_1) [a_0(p) + a_1(p)e]}{2 [b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2]}; \\
a_0(p) &= (1 + \varkappa_1) [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha); \\
a_1(p) &= (1 + \varkappa_2) (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha]; \\
b_0(p) &= (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha]; \\
b_1(p) &= (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \\
& \times [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha); \\
b_2(p) &= [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) \\
& (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2, \varepsilon_{1,2} - \text{досить малі додатні числа}).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Функція  $\Phi^+(p)$  аналітична у півплощині  $\operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ , а функція  $\Phi^-(p)$  аналітична у півплощині  $\operatorname{Re} p > -\varepsilon_1$ .

### §3. Розв'язування рівняння Вінера – Гопфа.

Рівняння (2.13) запишемо так:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} = A \operatorname{ctg} p\pi G_1(p) \Phi^-(p); \tag{3.1}$$



$$A = \frac{(1 + \varkappa_1)[1 + \varkappa_1 + (1 + \varkappa_2)e]}{2[\varkappa_1 + (1 + \varkappa_1\varkappa_2)e + \varkappa_2e^2]}; \quad G_1(p) = \frac{G_{11}(p)}{G_{12}(p)};$$

$$G_{11}(p) = [\varkappa_1 + (1 + \varkappa_1\varkappa_2)e + \varkappa_2e^2] [a_0(p) + a_1(p)e] \sin p\pi;$$

$$G_{12}(p) = [1 + \varkappa_1 + (1 + \varkappa_2)e] [b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \cos p\pi \quad (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2).$$

Функція  $G_1(p)$  на уявній осі задовольняє умові Гельдера. Індекс функції  $G_1(p)$  по уявній осі дорівнює нулю. Отже, справедлива факторизація [1]

$$G_1(p) = \frac{G_1^+(p)}{G_1^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0); \quad \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G_1(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G_1^+(p), & \operatorname{Re} p < 0; \\ G_1^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Функція  $G_1^+(p)$  аналітична, не має нулів і прямує до одиниці при  $p \rightarrow \infty$  у півплощині  $\operatorname{Re} p < 0$ , а функція  $G_1^-(p)$  аналітична, не має нулів і прямує до одиниці при  $p \rightarrow \infty$  у півплощині  $\operatorname{Re} p > 0$ .

Функцію  $p \operatorname{ctg} p\pi$  можна факторизувати так [5]:

$$p \operatorname{ctg} p\pi = K^+(p) K^-(p), \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(\frac{1}{2} \mp p)} \quad (3.3)$$

( $\Gamma(z)$  – гамма-функція). Функція  $K^+(p)$  аналітична і не має нулів у півплощині  $\operatorname{Re} p < 1/2$ , а функція  $K^-(p)$  аналітична і не має нулів у півплощині  $\operatorname{Re} p > -1/2$ . Справедливі асимптотичні оцінки

$$K^+(p) \sim \sqrt{-p}; \quad K^-(p) \sim \sqrt{p} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (3.4)$$

За допомогою факторизацій (3.2), (3.3) рівняння (3.1) перепишемо так:

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G_1^+(p)} + \frac{\tau}{(p + \lambda_0 + 1)K^+(p)G_1^+(p)} = \frac{AK^-(p)\Phi^-(p)}{pG_1^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \quad (3.5)$$

Другий доданок в (3.5) представимо у вигляді

$$\frac{\tau}{(p + \lambda_0 + 1)K^+(p)G_1^+(p)} = \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} \left[ \frac{1}{K^+(p)G_1^+(p)} - \frac{1}{K^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)} \right] + \frac{\tau}{(p + \lambda_0 + 1)K^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \quad (3.6)$$

Підставляючи (3.6) у (3.5), одержуємо

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G_1^+(p)} + \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} \left[ \frac{1}{K^+(p)G_1^+(p)} - \frac{1}{K^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)} \right] = \\ & = \frac{AK^-(p)\Phi^-(p)}{pG_1^-(p)} - \frac{\tau}{(p + \lambda_0 + 1)K^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функція в лівій частині (3.7) аналітична у півплощині  $\text{Re } p < 0$ , а функція в правій частині (3.7) аналітична у півплощині  $\text{Re } p > 0$ . На основі принципу аналітичного продовження ці функції дорівнюють одній і тій самій функції, що аналітична у всій площині  $p$ .

Вивчимо поведінку функцій  $\Phi^+(p)$  і  $\Phi^-(p)$  при  $p \rightarrow \infty$ .



Рис. 4

В околі кінця розрізу  $O_1$  реалізується асимптотика, що являє собою розв'язок однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини. Ця площина містить на прямолинійній межі поділу середовищ півнескінченну лінію розриву дотичного переміщення (рис. 4), що породжується найменшим на інтервалі  $(-1; 0)$  коренем її характеристичного рівняння.

Зокрема, справедливі асимптотики

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad r \rightarrow l + 0, \quad \tau_{r\theta} &\sim \frac{\alpha_1 + e + 1 + \alpha_2 e}{2(1 + \alpha_2 e)} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}; \\ \theta = 0, \quad r \rightarrow l - 0, \quad \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle &\sim -\frac{4(1 - \nu_1^2) \alpha_1 + e}{E_1} \frac{K_{II}}{1 + \alpha_1} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}; \\ \theta = 0, \quad r \rightarrow l - 0, \quad \sigma_\theta &\sim -\frac{1 - \alpha_1 - (1 - \alpha_2)e}{2(1 + \alpha_2 e)} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r(l-r)}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Оскільки  $\frac{1 - \alpha_1 - (1 - \alpha_2)e}{2(1 + \alpha_2 e)} > 0$ , а контактне напруження від'ємне, повинна виконуватись умова  $K_{II} > 0$ .

Має місце наступна теорема абелевого типу [9]. Якщо

$$f(x) \sim ax^\eta \quad (x \rightarrow +0, \quad -1 < \eta < 0),$$

то

$$\int_0^\infty f(x) e^{-zx} dx \sim a\Gamma(\eta + 1)z^{-\eta-1} \quad (z \rightarrow \infty, \quad \text{Re } z > 0).$$

Виходячи з (3.8), за теоремою абелевого типу одержуємо

$$\Phi^+(p) \sim \frac{\alpha_1 + e + 1 + \alpha_2 e}{2(1 + \alpha_2 e)} \frac{K_{II}}{\sqrt{-2pl}}; \quad \Phi^-(p) \sim -\frac{\alpha_1 + e}{1 + \alpha_1} \frac{K_{II}}{\sqrt{2pl}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (3.9)$$

З (3.2), (3.4), (3.9) випливає, що функції у лівій і правій частинах (3.7) прямують до нуля при  $p \rightarrow \infty$  у півплощинах  $\text{Re } p < 0$  і  $\text{Re } p > 0$ , відповідно. За теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій площині  $p$ .

Таким чином, розв'язок рівняння Вінера – Гопфа (2.13) має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= \frac{\tau K^+(p) G_1^+(p)}{p + \lambda_0 + 1} \left[ \frac{1}{K^+(-\lambda_0 - 1) G_1^+(-\lambda_0 - 1)} - \frac{1}{K^+(p) G_1^+(p)} \right] \quad (\text{Re } p < 0); \\ \Phi^-(p) &= \frac{\tau p G_1^-(p)}{AK^+(-\lambda_0 - 1) G_1^+(-\lambda_0 - 1) (p + \lambda_0 + 1) K^-(p)} \quad (\text{Re } p > 0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

**§4. Дослідження напруженого стану біля кінця тріщини та граничної рівноваги тіла з тріщинами.**

За допомогою (3.10) знаходимо асимптотику

$$\Phi^-(p) \sim \frac{\tau}{AK^+(-\lambda_0-1)G_1^+(-\lambda_0-1)\sqrt{p}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (4.1)$$

Згідно (3.9), (4.1) одержуємо наступну формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень:

$$K_{II} = g_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) k(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) Cl^{\lambda_0+1/2};$$

$$k = \frac{2\sqrt{2}(1+\varkappa_2 e)\Gamma(\lambda_0+3/2)}{[1+\varkappa_1+(1+\varkappa_2)e]\Gamma(\lambda_0+2)G_1^+(-\lambda_0-1)}; \quad (4.2)$$

$$G_1^+(-\lambda_0-1) = \exp \left[ \frac{\lambda_0+1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G_1(it)}{t^2+(\lambda_0+1)^2} dt \right].$$

Оскільки  $K_{II} > 0$ ,  $g_1 < 0$ , повинна виконуватись умова  $C < 0$ .

Залежності безрозмірного коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_{II}^0 = -K_{II} / (Cl^{\lambda_0+1/2})$  від кута  $\alpha$  для різних значень відношення модулів Юнга  $e_0 = E_1 / E_2 > 1$  зображено на рис. 5 ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ).

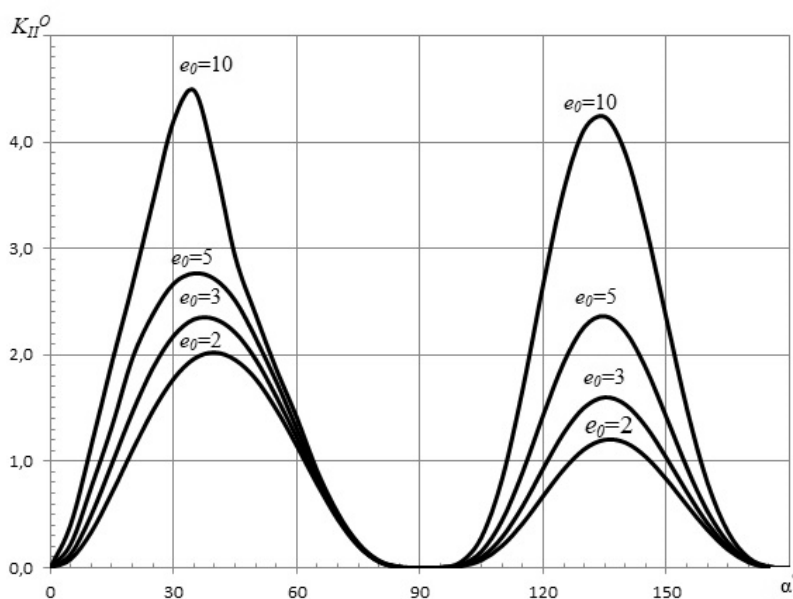


Рис. 5

Таблиця 2

$e_0$	2	3	5	10
$\alpha_{\max 1}^\circ$	42,4	37,1	35,3	33,5
$K_{II}^0(\alpha_{\max 1})$	2,0224	2,3371	2,7663	4,5121
$\alpha_{\max 2}^\circ$	139,2	135,4	134,1	132,4
$K_{II}^0(\alpha_{\max 2})$	1,2025	1,6012	2,3644	4,2363

Аналіз одержаних результатів показує, що функція  $K_{II}^0(\alpha)$  на кожному з інтервалів  $(0; \pi/2)$ ,  $(\pi/2; \pi)$  набуває свого максимуму. Значення  $\alpha_{\max 1}^{\circ}$ ,  $\alpha_{\max 2}^{\circ}$  кута  $\alpha$  та відповідні їм значення безрозмірного коефіцієнта напружень наведено у табл. 2.

З наведеної інформації випливає, що зі зростанням кута  $\alpha$  від  $\alpha_1$  до  $\pi/2$  і від  $\alpha_2$  до  $\pi$  концентрація напружень біля кінця тріщини  $O_1$  спочатку збільшується, а потім зменшується. Значенням  $e_0$ , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення кута найбільшої концентрації напружень, що дорівнюють 42,4°; 37,1°; 35,3°; 33,5°.

Чим більше відношення модулів Юнга  $e_0 = E_1 / E_2 > 1$ , тим більша і концентрація напружень біля кінця тріщини та меншими є гострий и тупий кути максимальної концентрації напружень.

У відповідності до силового критерію руйнування [10], прирівнюючи праву частину (4.2) до критичного значення коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_{IIc}$ , приходимо до рівняння для визначення руйнуючого навантаження

$$C = \frac{K_{IIc}}{g_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)k(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)l^{\lambda_0+1/2}}.$$

Розвиток тріщин відбудеться тоді, коли параметр навантаження  $C$ , зростаючи за модулем зі зростанням зовнішнього навантаження, досягне свого граничного значення, яке визначається попередньою формулою.

Оскільки  $\lambda_0 > -1/2$ , з (4.2) знаходимо

$$\frac{\partial K_{II}}{\partial l} = (\lambda_0 + 1/2)kCg_1l^{\lambda_0-1/2} > 0.$$

Використовуючи цю нерівність і критерій стійкості рівноваги тріщин [10], можна сформулювати наступний висновок. Якщо у кутовій точці на межі поділу ізотропних пружних середовищ виникли міжфазні тріщини, довжина яких значно менша, ніж розміри тіла, то у випадку повного гладкого контакту берегів їх рівновага є нестійкою. Після досягнення стану граничної рівноваги режим розвитку тріщин буде динамічним.

#### **Висновок.**

Досліджено граничну рівновагу кусково-однорідного ізотропного пружного тіла з маломасштабними міжфазними зсувними тріщинами у кутовій точці на межі поділу середовищ. Точний розв'язок відповідної симетричної задачі теорії пружності для клиноподібного тіла побудовано методом Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна. На основі цього розв'язку одержано формулу для коефіцієнту інтенсивності напружень в кінці міжфазної тріщини та досліджено його залежність від кута при різних значеннях відношення модулів Юнга. У відповідності до силового критерію руйнування виведено рівняння для визначення руйнуючого навантаження та показано, що рівновага тріщин є нестійкою.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** З використанням методу Вінера – Гопфа побудовано точний аналітичний розв'язок задачі механіки руйнування композитних матеріалів для кусково-однорідного ізотропного пружного тіла, послабленого міжфазними зсувними тріщинами у кутовій точці межі поділу середовищ. Встановлено характер зміни рівня концентрації напружень біля кінця тріщин. Визначено умову розвитку тріщин та досліджено їх рівновагу на стійкість.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** механіка руйнування композитних матеріалів, кутова точка, міжфазна зсувна тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, метод Вінера – Гопфа.

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
2. Гузь А.Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача // Докл. АН СССР. – 1981. – **259**, № 6. – С. 1315 – 1318.
3. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. – Киев: Литера, 2008. – 592 с. (т. 1), 736 с. (т. 2).
4. Кіппіс О.Л. Напружений стан біля міжфазних зсувних тріщин у кутовій точці межі поділу середовища: автореф. дис. кан. фіз.-мат. наук. – Київ, 2016. – 20 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1973. – 736 с.
6. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: в 4-х томах. Т.2. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с.
7. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М., Рывкин М.Б. Деформация составной упругой плоскости, ослабленной периодической системой произвольно нагруженных щелей // Прикл. математика и механика. – 1981. – **45**, N 6. – С. 1088 – 1094.
8. Неклассические проблемы механики разрушения (Под общ. ред. Гузя А.Н.): в 4-х томах. – Киев: Наук. думка, 1990 – 1992. – 312 с. (т. 1), 288 с. (т. 2), 248 с. (т. 3), 456 с. (т. 4).
9. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
10. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с.
11. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
12. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
13. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
14. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Nonclassical Problems in the Fracture Mechanics of Composites with Interacting Cracks // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 64 – 84.
15. Bogdanov V.L., Kipnis A.L. Investigation of the Fracture of a Semibounded Body Compressed Along a Near-Surface Interface Crack // J Math. Sci. – 2021. – **253**. – P. 99 – 107.
16. Cherepanov G.P. Mechanics of Brittle Fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 952 p.
17. Comninou M., Schmueser D. The interface crack in a combined tension-compression and shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1979. – **46**. – P. 345 – 348.
18. Erdogan F. Fracture problems in composite materials // Eng. Fract. Mech. – 1972. – **4**, N 4. – P. 811 – 840.
19. Erdogan F., Gupta G.D., Ratwami M. Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1974. – **41**, N 4. – P. 1007 – 1013.
20. Guz A.N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
21. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin – Hiedelberg – New York: Springer, 1999. – 555 p.
22. Guz A.N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III. // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 343 – 415.
23. Guz A.N., Guz I.A. Analytical solution of stability problem for two composite half plane compressed along interacting cracks // Composites. – 2000. – **31**, P B. – P. 405 – 411.
24. Guz A.N., Guz I.A. The Stability of the Interface Between Two Bodies Compressed Along Interface Cracks. 1. Exact Solution for the Case of Unequal Roots // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 4. – P. 482 – 491.
25. Guz A.N., Guz I.A. The Stability of the Interface Between Two Bodies Compressed Along Interface Cracks. 2. Exact Solution for the Case of Equal Roots // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 5. – P. 615 – 622.
26. Guz A.N., Guz I.A. The Stability of the Interface Between Two Bodies Compressed Along Interface Cracks. 3. Exact Solution for the Combined Case of Equal and Unequal Roots // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 6. – P. 759 – 768.
27. Guz I.A. Investigation of the Stability of a Composite in Compression along Two Parallel Structural Cracks at the Layer Interface // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, N 11. – P. 841 – 847.
28. Guz I.A. Problems of the Stability of Composite Materials in Compression Along Interlaminar Cracks: Periodic System of Parallel Macrocracks // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, N 7. – P. 551 – 557.
29. Guz I.A., Guz A.N. Stability of Two Different Half-Planes in Compression Along Interfacial Cracks: Analytical Solutions // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 7. – P. 906 – 912.
30. Kassir M.K., Sih G.C. Mechanics of Fracture. Three Dimensional Crack Problems. – Leyden: Noordhoff, 1975. – 452 p.
31. Rice J.R. Elastic fracture mechanics concept for interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – **55**. – P. 98 – 103.

Надійшла 07.12.2021

Затверджена до друку 19.07.2022