

Я. Я. Рушицький, В. М. Юрчук

ПОРІВНЯННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ПРУЖНОЇ ПОДИНОКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ  
ХВИЛІ З ПРОФІЛЯМИ ФРІДЛАНДЕРА ТА МАКДОНАЛЬДА

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,  
вул. Гесстєрова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A comparative study of the nonlinear elastic cylindrical displacement wave is carried out theoretically and numerically for the wave profiles in the form of Friedlander and Macdonald functions. The five-constant Murnaghan model is used. Unlike the most profiles of nonlinear waves in materials which have periodical or single humps, these waves have no hump, decrease monotonously, and have the concave downward profile. Both profiles are very close by their plots, have the properties of solitary wave, and therefore can be studied in the frame of the nonlinear theory of elasticity. A comparison of the Macdonald and Friedlander profiles as the solutions of the linear wave equation for the cylindrical wave showed – when the Macdonald function is considered as the exact solution of this equation, then the Friedlander function owing its closeness of its graphical representation to the plot of Macdonald function can be considered as the approximate representation solution of this equation. To show up this closeness, the plots of the Macdonald and Friedlander functions are built for the chosen four composite materials. The conclusion follows from these plots that the representation of the solution in the form of solitary wave is possible for the Friedlander function as the approximation of the Macdonald function. The evolution of waves is studied by an approximate method of restriction on the gradient of displacement taking into account the first two approximations. The formulas are obtained theoretically for the approximate representation of the solitary cylindrical wave and the concrete representation of this wave for the given Macdonald and Friedlander initial profiles. It is shown that the flexion of the profiles changes when the waves propagate some distance but the behavior of the profiles (evolution scenarios) does not differ significantly from each other. It follows from this fact that within the framework of the stated problem both profiles are interchangeable despite of they are represented mathematically in different way.

**Key words:** solitary elastic cylindrical wave; five-constant Murnaghan potential; evolution; approximate method; Friedlander and Macdonald initial wave profiles.

**Вступ.**

У роботі вивчається хвиля зміщення  $u(x-vt)$ , яка є розв'язком нелінійного хвильового рівняння і має профіль, за яким може вважатися поодинокю.

Як відомо, поодинокі хвилі визначаються за формою профіля: він описується або фінітною функцією (відмінною від нуля лише на скінченному відрізку), або функцією скінченної ваги (величина площі під графіком функції залишається незмінною на скінченному відрізку, що поза цим відрізком нею можна знехтувати – площа-вага зосереджена на скінченному відрізку). Типовим прикладом поодинокї хвилі є хвиля з профілем у вигляді функції Гаусса (дзвіноподібна чи горбоподібна хвиля, яка є функцією скінченної ваги). Найпростіша подинокя хвиля може описуватись класичним розв'язком Д'Алямбера  $u(x, t) = f(x - vt)$  лінійного хвильового рівняння  $u_{,tt} - v^2 u_{,xx} = 0$  для одновимірної хвилі зміщення [2, 6, 9, 17].

Слід зазначити, що прості хвилі є класичним типом хвиль, починаючи з другої половини 19 століття, та залишаються предметом досліджень і на даний час [7, 8, 13, 15].

Еволюцію хвилі (зміну її початкового профіля при поширенні) можна вивчати як процес, що відбувається в просторі або у часі. Це впливає з того, що хвиля характеризується фазою  $\sigma = x - vt$  і при відомій швидкості хвилі  $v$  фіксована точка простору відповідає фіксованому часу.

У роботі еволюція циліндричної пружної хвилі вивчається з застосуванням нелінійної п'ятиконстантної моделі Мернагана [1 – 3, 6, 16, 21]. Найпростіший варіант нелінійного хвильового рівняння в рамках цієї моделі включає лише квадратичну нелінійність. Таке рівняння проаналізоване досить докладно у випадку плоских хвиль [2, 6, 9, 19, 20].

Проведене дослідження стосується циліндричної хвилі і тому в ньому використано квадратично нелінійне хвильове рівняння у циліндричних координатах. Раніше таке рівняння використовувалося в роботах [24, 25, 29, 30].

Вибрано циліндричну хвилю з несиметричними початковими профілями у вигляді функцій Фрідляндера та Макдональда. На відміну від профілів більшості досліджених нелінійних хвиль в матеріалах, які мають періодичну систему горбів чи поодинокі горби, профілі Фрідляндера та Макдональда не мають горба, монотонно спадають і є опуклими вниз.

Слід зазначити, що профіль Макдональда є природним для пружної циліндричної хвилі і вивчався раніше в роботах [4, 5, 15, 30], тоді як профіль Фрідляндера характерний для хвиль, що виникають при вибухах, і застосовувався до аналізу плоскої пружної хвилі в роботі [30]. Профіль Фрідляндера вважається одним з найпростіших і часто використовується в інтерпретації експериментів [10, 11, 14].

Спільною для обох профілів особливістю є те, що їх графічне зображення є майже ідентичним. У той же час, математичний запис цих профілів є дуже відмінним – профіль Фрідляндера задається звичайною функцією [9, 10, 11, 30]

$$F[a(r - v_L t)] = A^0 e^{-ba(r - v_L t)/x_{att}} [1 - a(r - v_L t)/x_{att}], \quad v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad (1)$$

профіль Макдональда задається спеціальною функцією (функцією Макдональда)

$$K_0[a(r - v_L t)]. \quad (2)$$

Тому виникає питання, яким чином відмінність в математичному представленні профілів впливатиме на опис еволюції хвилі. Дана робота дає певну відповідь на поставлене питання – сценарії еволюції подібні, але відмінні між собою.

### 1. Постановка задачі про поширення циліндричної радіальної хвилі зміщення.

Циліндрична радіальна пружна хвиля зміщення – це хвиля, яка поширюється в нескінченному пружному просторі з циліндричною круговою порожниною, до граничної поверхні якої прикладений імпульс. Імпульс збуджує осесиметричний рух в радіальному напрямку. У найпростішому випадку імпульс гармонічний в часі. Циліндрична система координат  $Or\mathcal{Z}$  вибирається таким чином, щоб вісь  $Oz$  збігалася з віссю порожнини. Тоді рух хвилі залежить лише від радіуса  $r$  і часу  $t$ . В описі термінами теорії пружності ненульовими є тільки радіальний зсув  $u_r$  і три компонента тензора напружень  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$ . Лінійне рівняння руху має вигляд [6, 17, 19]

$$(\lambda + 2\mu) \left( u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = \rho u_{r,tt}. \quad (3)$$

Відповідне нелінійне рівняння в рамках моделі Мернагана є таким [21, 30]

$$(c_L)^{-2} u_{r,tt} - \left( u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr});$$

$$S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}) = -\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \tilde{N}_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2;$$

$$\tilde{N}_1 = 3 + \frac{2(A+3B+C)}{\lambda+2\mu}; \quad \tilde{N}_2 = \frac{\lambda+2B+2C}{\lambda+2\mu}; \quad \tilde{N}_3 = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu};$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+2C}{\lambda+2\mu}; \quad \tilde{N}_5 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+C}{\lambda+2\mu}.$$

Для знаходження розв'язку лінійного рівняння (3) вводять потенціал  $\Phi(r, t)$  за формулою  $u_r = \Phi_{,r}$  і тоді рівняння (3) стає простішим

$$\Phi_{,rr} - (v_L)^2 [\Phi_{,rr} + (1/r)\Phi_{,r}] = 0. \quad (5)$$

Це рівняння має розв'язок у вигляді добутку гармонічної за часом функції і розв'язку рівняння

$$\hat{\Phi}_{,rr} + (1/r)\hat{\Phi}_{,r} + (k_L)^2 \hat{\Phi} = 0. \quad (6)$$

Розв'язок рівняння Бесселя (6) записується як залежна від радіуса функція Ханкеля першого роду і нульового порядку і тому розв'язок рівняння (5) матиме вигляд

$$\Phi(r, t) = A_o H_0^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}, \quad (7)$$

де  $A_o$  є заданим в умові  $\sigma_{rr}(r_o, t) = p_o e^{i\omega t}$  на поверхні порожнини  $r = r_o$  амплітудним

множником  $A_o = -\frac{p_o k_L}{k_L(\lambda+2\mu)H_0^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o} H_1^{(1)}(k_L r_o)}$ , і  $k_L = (\omega/v_L)$  є хвильовим

числом.

*Математична довідка.* Класичне рівняння Бесселя має вигляд

$$X'' + (1/x)X' + [1 - (\lambda^2/x^2)]X = 0. \quad (8)$$

Один з розв'язків цього рівняння записується через циліндричну функцію дійсного аргументу – функцію Ханкеля  $H_0^{(1)}(x)$  першого роду і порядку  $\lambda$ .

Одна з циліндричних функцій уявного аргументу – функція Макдональда  $K_\lambda(x)$  є одним з розв'язків рівняння

$$X'' + (1/x)X' - [1 + (\lambda^2/x^2)]X = 0. \quad (9)$$

Якщо розв'язувати нелінійне рівняння (4) методом послідовних наближень, то розв'язок в рамках перших двох наближень представляється у вигляді [2, 6, 19]

$$u_r(r, t) = u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t), \quad (10)$$

де перше наближення  $u_r^{(1)}(r, t)$  відповідає розв'язку лінійного рівняння (6)

$$u_r^{(1)}(r, t) = [A_o H_0^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}]_{,r} = -A_o k_L H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}. \quad (11)$$

Друге наближення можна визначати різними способами. Аналіз цих способів показав [1 – 4], що чотири з п'яти нелінійних доданків в (4), які включають множники  $r^{-1}$ ,  $r^{-2}$ ,  $r^{-3}$ , мало впливають на остаточний результат зі збільшенням відстані від

порожнини, тому нелінійними доданками можна знехтувати при даних множниках. Використання наближеного представлення функцій Ханкеля та спрощення (4) дає вигляд другого наближення, а отже вигляд загального розв'язку (7)

$$u_r(r, t) = u_o H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} + (u_o)^2 k_L \frac{\tilde{N}_1}{\lambda + 2\mu} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) e^{2i\omega t}. \quad (12)$$

**2. Наближений розв'язок методом обмеження на градієнт зміщення для циліндричної нелінійно пружної поодинокій хвилі з початковими профілями у вигляді функції Макдональда та Фрідляндера.**

Розглянемо рівняння (2), проігноруємо тільки дві з п'яти нелінійних складових і збережемо справа в (4) вираз  $-\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2$ . Представимо рівняння (4) у вигляді

$$u_{r,rr} (1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}) + \frac{1}{r} u_{r,r} (1 - \tilde{N}_4 u_{r,r}) - \frac{u_r}{r^2} (1 - \tilde{N}_3 u_{r,r}) - \frac{1}{(c_L)^2} u_{r,tt} = 0.$$

Зважаючи на згаданий вище прецедент, приймемо наближено, що  $\tilde{N}_1 \approx \tilde{N}_3 \approx \tilde{N}_4$  і отримаємо остаточний вираз для нелінійного хвильового рівняння

$$(v_L)^2 (1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}) \left( u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0. \quad (13)$$

Розглянемо спочатку лінійний варіант рівняння (13)

$$(v_L)^2 \left( u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0. \quad (14)$$

Нагадаємо, що метою аналізу рівняння (13) є аналіз поодинокій хвилі. Але, незважаючи на відмінність між поодинокією і гармонічною хвилями, використаємо далі досвід аналізу гармонічної хвилі і введемо потенціал за формулою

$$u_r(r, t) = \Phi_{,r}(r, t). \quad (15)$$

Тоді рівняння (14) можна записати у вигляді

$$\Phi_{,tt} - (v_L)^2 [\Phi_{,rr} + (1/r)\Phi_{,r}] = 0. \quad (16)$$

Тепер шукатимемо розв'язок рівняння (16) у вигляді поодинокій хвилі

$$\Phi_{(L)}(r, t) = \Phi_r^o F_{(L)}(r - v_L t) = u_r^o F_{(L)}(\sigma_L). \quad (17)$$

Підстановка представлення розв'язку (17) у рівняння (16) дає рівняння для знаходження невідомої функції  $F_{(L)}$

$$\left[ F_{(L)}'' + \frac{1}{r} F_{(L)}' - \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) F_{(L)} \right] = 0. \quad (18)$$

Рівняння (18) є частинним випадком рівняння Бесселя (9) і має розв'язок, який виражається через функцію Макдональда  $K_1(x)$

$$\Phi_{(L)}(r, t) = \Phi_{(L)}^o K_1(r - v_L t) = \Phi_{(L)}^o K_1(\sigma_L). \quad (19)$$

Повернемось до нелінійного рівняння для циліндричної радіальної хвилі (13), яке має таку ж структуру, як і нелінійне рівняння для плоскої повздовжньої хвилі. А саме, воно має вигляд лінійного рівняння зі змінною швидкістю, яка залежить від розв'язку хвильового рівняння. Взагалі кажучи, це ознака простої хвилі [4, 6, 9, 19].

Для спрощення аналізу введемо потенціал за формулою (15) і перетворимо рівняння (13) до вигляду

$$\Phi_{,tt} - (v_L)^2 (1 - \tilde{N}_1 \Phi_{,rr}) [\Phi_{,rr} + (1/r) \Phi_{,r}] = 0. \quad (20)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (20) у вигляді поодинокі хвилі і її початковий профіль (початкову умову для хвильового рівняння) можна прийняти у вигляді відомої (заданої наперед) функції  $\Phi(r, t=0) = \Phi^o F(r)$ . Тоді збуджена у такий спосіб хвиля може бути представлена у вигляді

$$\Phi(r, t) = \Phi^o F(r - vt) = \Phi^o F(\sigma) \quad (21)$$

з невідомою фазовою змінною  $\sigma$  і, відповідно, невідомою швидкістю хвилі

$$v = \sqrt{1 - \tilde{N}_1 \Phi_{,rr}} v_L = \sqrt{1 - \tilde{N}_1 \Phi^o F_{,rr}} v_L \quad (22)$$

і відомим (заданим наперед) постійним початковим амплітудним множником хвилі  $\Phi^o$ .

Представлення (21) дає змогу перетворити лінійний аналог рівняння (20) у звичайне диференціальне рівняння щодо радіуса (18). Це рівняння за умови (21) має розв'язок (19)

$$\Phi(r, t) = \Phi^o K_1(r - vt) = \Phi^o K_1(\sigma). \quad (23)$$

Слід звернути увагу на відмінність між формулами (19) та (23) – у першій швидкість постійна і відома, тоді як у другій вона змінна і невідома.

Застосуємо далі метод обмеження на градієнт зміщення і врахуємо перші два наближення. Процедура отримання наближеного розв'язку для загального випадку (14) описана в попередніх публікаціях авторів [20, 22 – 27], де теж вказані необхідні обмеження на параметри задачі:

умова наближеного запису змінної швидкості у вигляді

$$v = (1 - (1/2) \tilde{N}_1 \Phi^o F_{,rr}) v_L; \quad (24)$$

$$|\tilde{N}_1 \Phi^o F_{,rr}| < 1; \quad (25)$$

$$|\delta^* = -(1/2) a c_L \alpha_1 u_{r,r} t| < 1. \quad (26)$$

Формули (25), (26) включають обмеження на три відомі величини – одна визначає довжину підшви поодинокі хвилі  $a$ , друга є швидкістю хвилі  $c_L$  у лінійному наближенні, третя  $\alpha_1$  пов'язана з властивостями матеріалу – і невідомий градієнт зміщення  $u_{r,r}(r, t)$ . Тоді хвилю (17) можна представити наближено формулою

$$u_r(r, t) \approx u_r^o F(\sigma) - (1/2) a^2 (u_r^o)^2 c_L \alpha_1 t [F'(\sigma)]^2. \quad (27)$$

Ця формула включає два доданки, які можна розглядати як перші два наближення – перший відповідає розв'язку класичного лінійного рівняння, другий є квадратично нелінійним щодо початкового профіля.

Розглянемо далі два конкретні випадки, коли функція  $F[a(r - vt)]$  описує поодинокі хвилі з конкретними початковими профілями. Ці профілі вказані раніше і описуються формулами (1) та (2). Тобто, це функції Макдональда  $K_\lambda(r)$  [29, 30] та Фрідландера  $F(r) = A^o e^{-br/x_{att}} (1 - r/x_{att})$  [9, 10].

Якщо підставити вираз для початкового профіля хвилі у вигляді функції Макдональда  $F(\sigma) = K_0(\sigma)$ , то розв'язок (27) приймає наступний вигляд

$$u_r(r, t) \approx u_r^0 K_0(a(r - c_L t)) - (1/2) a^2 (u_r^0)^2 \alpha_1 a c_L t [K_1(a(r - c_L t))]^2. \quad (28)$$

Формула (28) описує зміну початкового профіля хвилі через пряму залежність нелінійного доданку від часу.

Для початкового профіля хвилі у вигляді функції Фрідляндера

$$F(\sigma) = A^0 e^{-b\sigma/x_{att}} (1 - \sigma/x_{att})$$

розв'язок (27) приймає такий конкретний вигляд

$$u_1(x_1, t) = u_r^0 e^{-ba(r - c_L t)/x_{att}} [1 - a(r - c_L t)/x_{att}] - (1/2) \alpha a^2 c_L t (1/x_{att})^2 (u_r^0)^2 \{1 + b[1 - a(r - c_L t)/x_{att}]\}^2 e^{-2ba(r - c_L t)/x_{att}}. \quad (29)$$

Формула (29) описує зміну початкового профіля хвилі через пряму залежність нелінійного доданку від часу.

### 3. Порівняння сценаріїв еволюції циліндричної нелінійно пружної поодинокі хвилі з початковими профілями Фрідляндера та Макдональда.

Отримані формули (16) і (17) створюють нову можливість дослідити чисельно еволюцію вибраної циліндричної хвилі з двома відмінними між собою профілями. Більш точно, ці профілі дуже близькі за своїм графічним зображенням, але дуже відмінні за математичним записом. Тому у цій роботі поставлена мета побудувати чисельно сценарії еволюції обидвох профілів окремо і далі встановити, чи будуть вони відмінними з причини різного математичного запису.

Сценарії еволюції визначались для чотирьох композитних матеріалів при їх описі моделлю Мернагана з такими механічними параметрами [1, 2, 6, 12, 16 – 19, 28] (показані параметри є такими:  $\rho$  – густина;  $\lambda$ ,  $\mu$  – пружні постійні Ляме (постійні другого порядку);  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – пружні постійні Мернагана (постійні третього порядку).

*Матеріал 1* (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам, об'ємний вміст матриці 0,8)

$$\rho = 0,594 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 5,59 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 3,26 \cdot 10^{-10};$$

$$A = -0,658 \cdot 10^{-11}; \quad B = -2,18 \cdot 10^{-11}; \quad C = -4,35 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 4,515 \cdot 10^3.$$

*Матеріал 2* (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам, об'ємний вміст матриці 0,6)

$$\rho = 0,918 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 11,6 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 0,721 \cdot 10^{-10};$$

$$A = -1,33 \cdot 10^{-11}; \quad B = -4,45 \cdot 10^{-11}; \quad C = -9,5 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 3,769 \cdot 10^3.$$

*Матеріал 3* (матриця – вольфрам, наповнювач – мідь, об'ємний вміст матриці 0,2)

$$\rho = 0,179 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 4,26 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 0,363 \cdot 10^{-10};$$

$$A = -73,1 \cdot 10^{-10}; \quad B = -29,1 \cdot 10^{-10}; \quad C = -3,43 \cdot 10^{-10}; \quad c_L = 5,278 \cdot 10^3.$$

*Матеріал 4* (матриця – молібден, наповнювач – вольфрам, об'ємний вміст матриці 0,8)

$$\rho = 0,378 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 0,022 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 0,042 \cdot 10^{-10};$$

$$A = -19,58 \cdot 10^{-11}; \quad B = -17,04 \cdot 10^{-11}; \quad C = -15,34 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 0,532 \cdot 10^3.$$

Слід зазначити, що оскільки така задача чисельного обчислення за формулами (16) і (17) є багатопараметричною, на кінцеві результати впливає не лише вибір мате-

ріалу, але і час поширення хвилі, вибрана підшва хвилі та значення максимальної амплітуди початкового профіля. Додатково з метою зближення графіка профіля Фрідляндера до вже зафіксованого графіка профіля Макдональда для профіля Фрідляндера вибрано параметри  $b = 2,5 \cdot 10^2$ ;  $x_{att} = 2 \cdot 10^{-2}$ .

Спочатку слід порівняти початкові профілі Макдональда та Фрідляндера як розв'язки лінійного рівняння (23). Для цього функцію Макдональда розглядаємо як точний розв'язок рівняння (23). Функція ж Фрідляндера через подібність її графічного зображення до графіка функції Макдональда може трактуватися як наближений розв'язок рівняння (23). З метою виявлення степені наближеності для всіх чотирьох матеріалів були побудовані графіки функцій Макдональда та Фрідляндера для значень параметрів, які відповідають вибраним матеріалам. Ці графіки показані на рис. 1, де позначення рисунках  $a - \varepsilon$  відповідають номеру матеріалу 1 - 4.

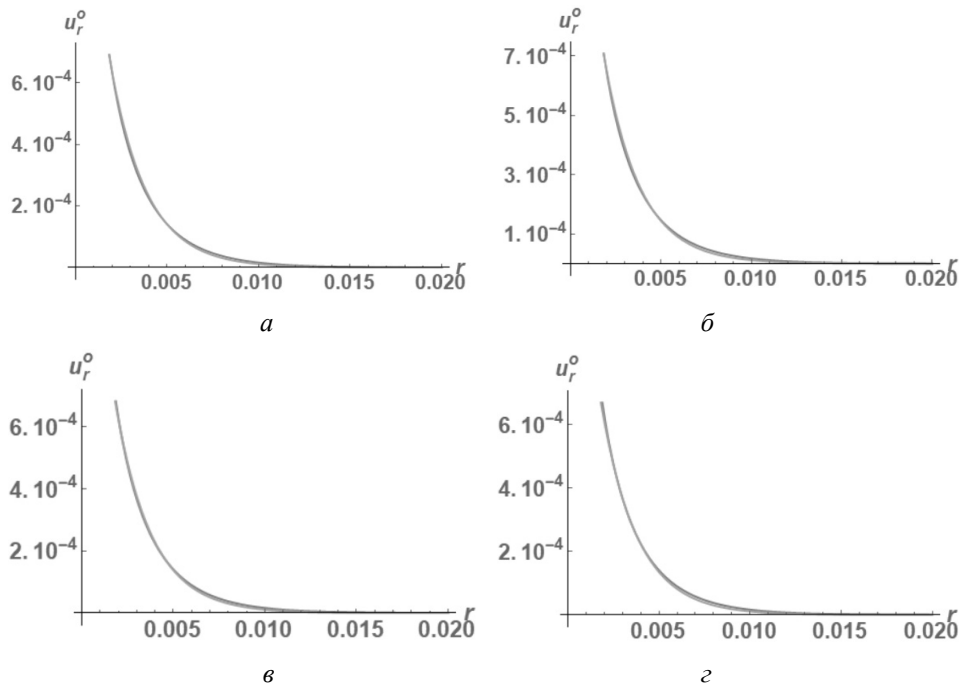


Рис. 1

Як показують отримані графіки рис. 1,  $a - \varepsilon$ , при відповідному виборі параметрів функції Фрідляндера можна дуже зблизити її графік з графіком функції Макдональда. Оскільки функція Макдональда є точним розв'язком, то з отриманого факту близькості графіків можна зробити висновок, що вибрані варіанти функції Фрідляндера є наближеними розв'язками рівняння (23). А з цього висновку випливає інший – представлення розв'язку у вигляді поодинокі хвилі (21) є можливим для функції Фрідляндера як наближення функції Макдональда. Тут зауважимо, що у математичному представленні ці дві функції є дуже відмінними.

На рис. 2 - 5 побудовано по три графіки ( $a, б, в$ ), на яких зображено по два профілі, що відповідають розв'язкам (16) та (17). Номери рис. 2 - 5 відповідають номерам матеріалів 1 - 4.

Слід зазначити, що графіки рис. 1 стосуються початкового моменту хвильового руху і показують початкові профілі хвилі.

Рис. 2,  $a - 5, a$  відповідають початковому руху, коли хвиля пройшла відстань, що дорівнює лише 50 підшвам. Рис. 2,  $б - 5, б$  відповідають середній відстані приблизно 200 підшв. Рис. 2,  $в - 5, в$  відповідають суттєвій відстані, приблизно 400 підшв.

На всіх графіках нижня лінія відповідає профілю Макдональда, а верхня лінія – профілю Фрідляндера.

Для кожного матеріалу визначались три основні параметри: початкова амплітуда  $A^o = 1 \cdot 10^{-3}$ , довжина підшви  $a = 0,02$  та швидкість хвилі  $c_L$  (яка визначена для кожного матеріалу при вище вказаному описі).

Далі показані графіки, на яких зображені профілі хвилі як залежність амплітуди хвилі  $u_r^o$  від радіуса  $r$ .

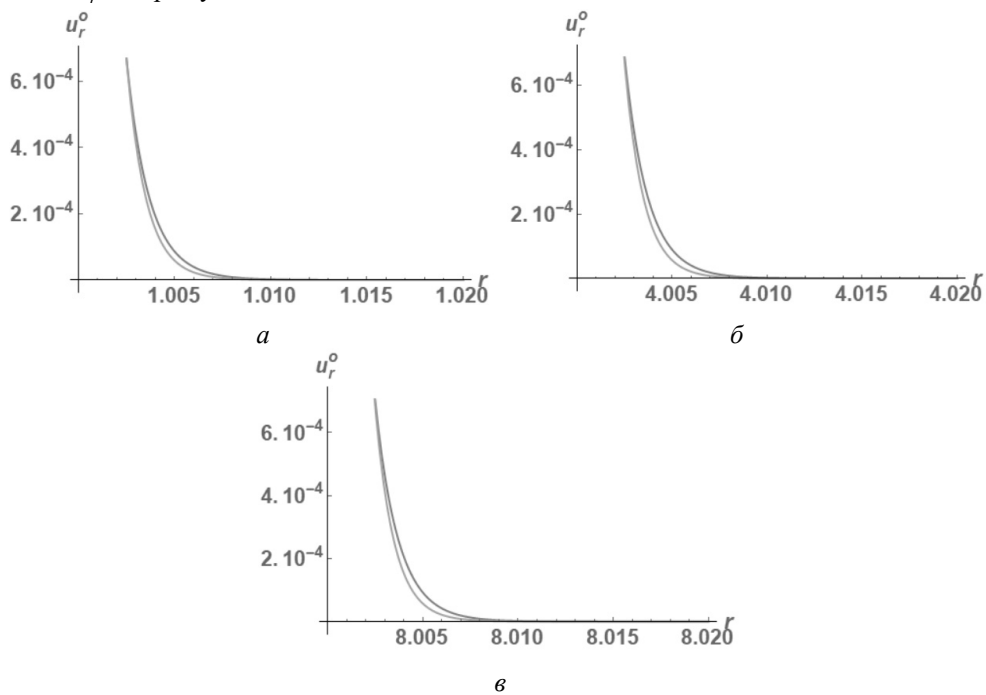


Рис. 2

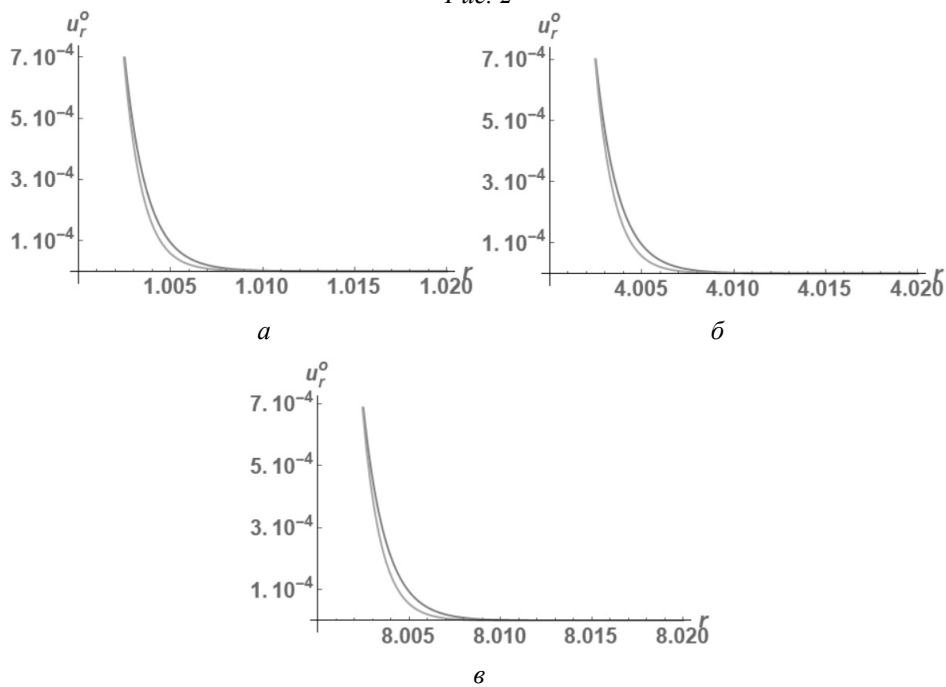


Рис. 3



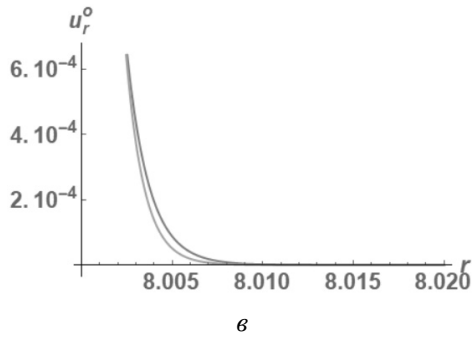
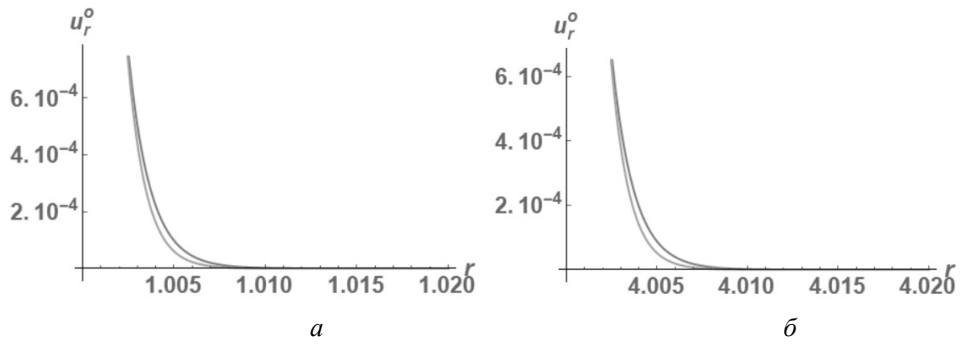


Рис. 4

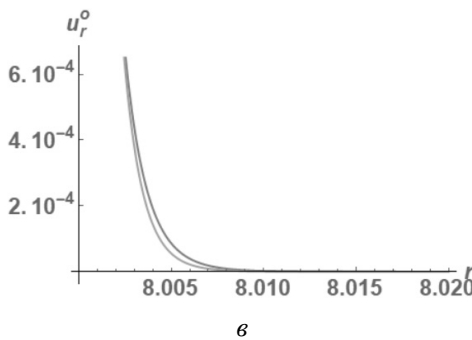
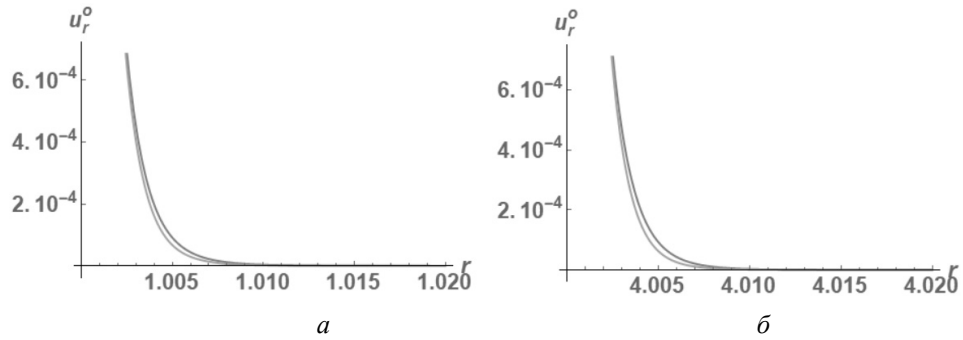


Рис. 5

Всі графіки свідчать про те, що з початку руху хвилі відбувається еволюційна зміна профіля хвилі, спричинена нелінійністю середовища поширення: опуклість хвилі стає більшою.

Графіки рис. 2, а – 5, а відображають вказаний вище нелінійний ефект збільшення опуклості, але ще й показують, що дисторсія обох профілів на початковій стадії поширення хвилі є значною і відмінність між порівнюваними графіками є малою.

Графіки рис. 2, б, в – 5, б, в засвідчують, що на розвинених стадіях поширення продовжується збільшення опуклості обох графіків, однак відмінність (розходження) між ними є малою і зберігається незмінною.

Отже, проведене теоретичне дослідження і числове моделювання показало, що сценарії еволюції профілів дуже подібні. З цього випливає, що в рамках розглянутої задачі обидва профілі є взаємозамінними, хоча математично представляються по-різному.

#### **Загальні висновки.**

Проаналізовано теоретично і чисельно нелінійну пружну циліндричну радіальну хвилю зміщення для довільного випадку поодинокого профіля хвилі і двох початкових профілів хвилі у вигляді функцій Макдональда та Фрідляндера. Теоретичну основу аналізу складає п'ятиконстантна нелінійна модель пружного деформування Мернагана. На відміну від більшості нелінійних хвиль в матеріалах, які мають періодичну систему горбів чи поодинокі горби, профілі цих хвиль не мають горба, монотонно спадають і є опуклими вниз. Порівняння профілів Макдональда та Фрідляндера як розв'язків лінійного хвильового рівняння показало, що якщо функцію Макдональда розглядати як точний розв'язок рівняння, то функція Фрідляндера через подібність її графічного зображення до графіка функції Макдональда може трактуватися як наближений розв'язок цього ж рівняння. Для виявлення степені наближеності для вибраних чотирьох композитних матеріалів були побудовані графіки функцій Макдональда і Фрідляндера. З отриманих графіків випливає висновок, що представлення розв'язку у вигляді поодинокі хвилі є можливим для функції Фрідляндера як наближення функції Макдональда. Тут ще раз зауважимо, що у математичному представленні ці дві функції є дуже відмінними. Еволюція хвилі вивчалася наближеним методом обмеження на градієнт зміщення зі збереженням двох перших наближень. Отримані теоретично формули для наближеного представлення поодинокі циліндричної хвилі і конкретного представлення хвилі для заданих початкових профілів Макдональда і Фрідляндера. Отже, проведене теоретичне дослідження і числове моделювання показало, що сценарії еволюції профілів дуже подібні. З цього випливає, що в рамках розглянутої задачі обидва профілі є взаємозамінними, хоча математично представляються по-різному.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Нелінійна пружна циліндрична радіальна хвиля зміщення проаналізована теоретично і чисельно для довільного випадку поодинокі профіля хвилі і двох початкових профілів хвилі у вигляді функцій Макдональда та Фрідляндера. Теоретичну основу аналізу складає п'ятиконстантна нелінійна модель пружного деформування Мернагана. На відміну від більшості нелінійних хвиль в матеріалах, які мають періодичну систему горбів чи поодинокі горби, профілі цих хвиль не мають горба, монотонно спадають і є опуклими вниз. Порівняння профілів Макдональда та Фрідляндера як розв'язків лінійного хвильового рівняння показало, що якщо функцію Макдональда розглядати як точний розв'язок рівняння, то функція Фрідляндера через подібність її графічного зображення до графіка функції Макдональда може трактуватися як наближений розв'язок цього ж рівняння. Еволюція хвилі вивчалася наближеним методом обмеження на градієнт зміщення зі збереженням двох перших наближень. Отримані теоретично формули для наближеного представлення поодинокі циліндричної хвилі і конкретного представлення хвилі для заданих початкових профілів Макдональда і Фрідляндера. Отже, проведене теоретичне дослідження і числове моделювання показало, що сценарії еволюції профілів є дуже схожими. З цього випливає, що в рамках розглянутої задачі обидва профілі є взаємозамінними, хоча математично представляються по-різному.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** поодинокі пружна циліндрична хвиля, п'ятиконстантний потенціал Мернагана, еволюція, наближений метод, профілі початкових хвиль Фрідляндера та Макдональда.

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.1. Общие вопросы. Т.2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка. – 1986. – 376 с., 536 с.
2. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 519 с.
3. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 464 с.

4. Руцицький Я.Я. Про наблизений аналіз еволюції поздовжньої хвилі, що поширюється в пружному середовищі // Доп. НАН України. – 2019. – № 8. – С. 46 – 58.
5. Руцицький Я.Я. Нетипова еволюція поодинокі хвилі, що поширюється в нелінійно пружному середовищі // Доп. НАН України. – 2020. – № 12. – С. 34 – 40.
6. Руцицький Я.Я., Цурнал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
7. Alonso M., Reguera N. Numerical detection and generation of solitary waves for a nonlinear wave equation // Wave Motion. – 2015. – **56**. – P.137 – 146.
8. Beli D., Arruda J.R.F., Ruzzene M. Wave propagation in elastic metamaterial beams and plates with interconnected resonators // Int. J. Solids Struct. – 2018. – 139-140. – P. 105 – 120.
9. Cattani C., Rushchitsky J. Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostructure. – Singapore – London: World Scientific, 2007. – 466 p.
10. Chandra N., Ganpule S., Kleinschmit N.N., Feng R., Holmberg A.D., Sundaramurthy A., Selvan V., Alai A. Evolution of blast wave profiles in simulated air blasts: experiment and computational modeling // Shock Waves. – 2012. – **22**. – P. 403 – 415.
11. Freidlander F.G. The diffraction of sound pulses. I. Diffraction by a semi-infinite plate // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1946. – **186**. – P. 322 – 344.
12. Guz I.A., Rushchitskii Y.Y. Comparison of mechanical properties and effects in micro- and nanocomposites with carbon fillers (carbon microfibers, graphite microwhiskers, and carbon nanotubes) // Mechanics of Composite Materials. – 2004. – **40**, N 3. – P. 179 – 190.
13. Ishii Y., Biwa S., Adachi T. Second-harmonic generation of two-dimensional elastic wave propagation in an infinite layered structure with nonlinear spring-type interfaces // Wave Motion. – 2020. – **97**, N 9. – P. 102569.
14. Kuriakose M., Skotak M., Misistia A., Kahali S., Sundaramurthy A., Chandra N. Tailoring the Blast Exposure Conditions in the Shock Tube for Generating Pure, Primary Shock Waves: The End Plate Facilitates Elimination of Secondary Loading of the Specimen // PLoS ONE – 2016. – **11**, N 9. – e0161597.
15. Li Z.N., Wang Y.Z., Wang Y.S. Three-dimensional nonreciprocal transmission in a layered nonlinear elastic wave metamaterial // Int. J. Non-Linear Mech. – 2020. – **125**, N 10. – P. 193531.
16. Murnaghan F. Finite Deformation in an Elastic Solid. 3rd ed. Gloucester. – MA, USA: Peter Smith Publisher Inc. 1985. – 140 p.
17. Rushchitsky J.J. Theory of waves in materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011. – 270 p.
18. Rushchitsky J.J. Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects // Int. J. Appl. Math. Mech. – 2012. – **8**, N 6. – P. 400 – 443.
19. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
20. Rushchitsky J.J. Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution. Chapter in the book “Understanding Plane Waves”. Ed. William A. Cooper – London: Nova Science Publishers, 2019. – 300 p. – P. 201 – 220.
21. Rushchitsky J.J. Foundations of Mechanics of Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 276 p.
22. Rushchitsky J.J. Scenarios of Evolution of Some Types of Simple Waves in Nonlinear Elastic Materials // Archive of Appl. Mech. – 2021. – **91**, N 7. – P. 3151 – 3170.
23. Rushchitsky J.J., Cattani C., Sinchilo S.V. Physical Constants for One Type of Nonlinearly Elastic Fibrous Micro- and Nanocomposites with Hard and Soft Nonlinearities // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 12. – P. 1368 – 1377.
24. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. One Approximate Method for Analyzing Solitary Waves in Nonlinearly Elastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 3. – P. 282 – 290.
25. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Numerical Analysis of the Evolution of Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 104 – 110.
26. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1 // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 5. – P. 581 – 589.
27. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 2 // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 6. – P. 666 – 673.
28. Structural and Residual Stress Analysis. Ed. V.Hauk. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1997 (e-variant 2006). – 640 p.
28. Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J. Numerical Analysis of Evolution of the Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 104 – 110.
30. Yurchuk V.M., Rushchitsky J.J., Hryhorchuk O.M., Symchuk Ya.V. Noncharacteristic Evolution of a Nonlinear Elastic Single Cylindrical Wave // Int. App. Mech. – 2021. – **57**, N 6. – P. 619 – 634.

Надійшла 28.12.2021

Затверджена до друку 19.07.2022