

О.Я.Григоренко¹, М.Ю.Борисенко¹, О.В.Бойчук²,
А.А.Шумська³

**ЧИСЕЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ
ГОФРОВАНИХ ЗАМКНУТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК**

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com; mechanics530@gmail.com

²Миколаївський національний аграрний університет,
вул. Георгія Гонгадзе, 9, 54020, Миколаїв, Україна; *e-mail: boychuklena27@gmail.com*

³Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
просп. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна; *e-mail: shumska-aa@ukr.net*

Abstract. In the work by the finite element method the frequencies and forms of free vibrations of cantilever isotropic thin closed corrugated circular cylindrical shells with different number of corrugations along the contour are determined. The frequencies of corrugated shells with different number of corrugations are compared. The dependence of the frequency of free vibrations of corrugated shells on the number of corrugations and forms of vibrations is established. For all considered corrugated shells symmetrical and antisymmetrical forms of vibrations, and also forms of stretching, sliding, bending and torsional vibrations are established.

Key words: free vibrations, forms of vibrations, corrugated circular cylindrical shell, finite element method.

Вступ.

Проектування корпусів різних наземних, підводних, літальних та космічних апаратів, оболонкових елементів споруд та конструкцій базується на дослідженнях та розрахунках, одним з яких є визначення їх динамічних характеристик, так як при співпадінні частоти зовнішньої сили з частотою вільних коливань спостерігається руйнівне явище резонансу. Циліндричні оболонки широко використовуються у різних галузях промисловості і є однією з основних форм багатьох конструкцій, оскільки мають високу міцність та стійкість при відносно невеликій масі. Підвищення характеристик на міцність при збереженні маси можна здійснювати за рахунок зміни геометричних параметрів таких, як товщина стінки оболонки або зміни форми поперечного перерізу, наприклад, за допомогою гофрування, яке можна здійснювати як за гармонічним законом, так і переліками. У зв'язку з цим є необхідним поширити чисельні методи дослідження частот і форм вільних коливань гофрованих циліндричних оболонок.

Для оболонок простої геометричної форми визначення частот вільних коливань можливе в рамках теорії тонких оболонок [4, 5, 10, 15 – 17]. У випадку оболонок складної геометричної форми, які мають некруговий поперечний переріз сталі [7], або змінної [6] товщини, відкритий контур [12, 13], а також товстостінність [14] доцільно використовувати метод скінченних елементів (МСЕ), який є основою роботи багатьох сучасних програм для інженерного розрахунку, наприклад, програми Femap з розв'язувачем NX Nastran. Окрім чисельних методів має місце використання експе-

риментальних методів визначення частот і форм вільних коливань оболонок складної форми [1, 8, 11], який в порівнянні з МСЕ є більш затратний по часу та фінансам.

Проаналізуємо деякі публікації, присвячені тематиці даної роботи. В [3] проведено дослідження методом сплайн-колокації в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації резонансних частот некругових циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом; проаналізовано вплив кількості гофр на розподіл резонансних частот коливань. В [20] представлено напіваналітичний підхід до нелінійної вільної та вимушеної асиметричної вібрації гофрованих сендвіч-функціонально градуєваних циліндричних оболонок, що містять рідину під гармонічним радіальним навантаженням; гофра розглядається двох типів: трапецієвидна гофра і кругла гофра. В [21] запропоновано метод визначення власних частот і форм коливань гофрованих некруглих циліндричних оболонок, досліджено вплив довжини та амплітуди гофр на основну частоту ненавантажених та стиснених вздовж осі оболонок. В [9, 22, 23] досліджуються динамічні характеристики зв'язаних поздовжніх та згинних коливань гофрованої циліндричної п'єзоелектричної оболонки. В [9] визначені частоти і форми вільних коливань аналітично. В [22, 23] для отримання теоретичного розв'язку використовують класичну теорію оболонок. В [24] досліджено вібраційні характеристики композитних гофрованих сендвічевих циліндричних оболонок із вільними граничними умовами. В [25] на основі рівнянь динаміки великих прогинів осесиметричних пологих оболонок обертання досліджено нелінійні вимушені коливання гофрованої пологої оболонки при рівномірному навантаженні. В [19] теоретично досліджені вільні коливання поздовжньо гофрованих циліндричних оболонок та проведені розрахунки частот за допомогою МСЕ, реалізованого в програмі ANSYS. В [18] на основі теорії оболонок Флюгге, підходу матриці переносу та методу інтегрування Ромберга досліджено вплив параметрів гофрування та однорідності матеріалу на частоти коливань ізотропних та ортотропних овальних циліндричних оболонок з синусоподібним контуром.

Метою даної роботи є визначення методом скінченних елементів частот та форм вільних коливань консольних ізотропних тонких замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок з різною кількістю гофр по контуру.

§1. Основні співвідношення.

Рівняння руху механічної системи зі скінченною кількістю ступенів свободи за відсутності зовнішніх сил описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1.1)$$

де $L = T - U$. Використовуючи дискретну форму функціоналів кінетичної енергії та енергії деформації, відповідно,

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\vec{\Phi}}_i; \quad U = \frac{1}{2} \vec{\Phi}_i^T \mathbf{K}_i \vec{\Phi}_i,$$

де \mathbf{K}_i та \mathbf{M}_i – матриця жорсткості та матриця мас i -го скінченного елемента, відповідно; $\vec{\Phi}_i$ – вектор вузлових переміщень i -го елемента, з рівняння Лагранжа (1.1) отримаємо наступні рівняння руху за відсутності демпфування

$$\mathbf{K} \vec{\Phi}_j + \mathbf{M} \ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (1.2)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно; $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -му ступеню свободи і відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях оболонок всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (1.3)$$

Після підстановки функцій (1.3) в рівняння руху (1.2) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1.4)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша, що вимагає менших ресурсів у порівнянні з іншими методами. Метод Ланцоша дозволяє визначати n -ну кількість необхідних власних значень і форм, при цьому результати можна вважати практично точними для даної дискретної моделі, оскільки похибка складає $\|\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \vec{\Phi}_j\| / \|\vec{\Phi}_j\| \leq 10^{-7}$.

Метод Ланцоша використовує зведення до тридіагонального вигляду матриці

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_k, \quad (1.5)$$

де $\mathbf{Q}_k = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_k\}$ – прямокутна матриця з елементами $N_{eq} \times k$; N_{eq} – кількість рівнянь; k – номер кроку за методом Ланцоша; \vec{q}_k – k -й вектор Ланцоша.

Вираз

$$\beta_{k+1} \vec{q}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \vec{q}_k - \alpha_k \vec{q}_k - \beta_k \vec{q}_k \quad (1.6)$$

генерує наступний вектор Ланцоша q_{k+1} і визначає поточний рядок матриці \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \beta_k & \alpha_k \end{vmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо задачу на власні значення:

$$\mathbf{T} \vec{s}_h^k - \lambda_h^k \vec{s}_h^k = 0, \quad h = 1, 2, \dots, k; \quad (\omega_h^k)^2 = 1 / \lambda_h^k, \quad (1.7)$$

де ω_h^k – k -та апроксимація кругової частоти ω_h , $h = 1, 2, \dots, n$; n – число власних пар.

Використовується алгоритм, що продовжує обчислення (при збільшенні k – номера кроку процедури Ланцоша) до тих пір, поки не буде досягнута задана точність за всіма необхідними власними значеннями.

Процедура вибіркової ортогоналізації підтримує необхідний рівень ортогоналізації векторів Ланцоша q_k , що забезпечує надійність і стійкість числового процесу розрахунку. При цьому застосовуються економічні методи для реалізації процедури вибіркової ортогоналізації й для визначення власних значень (1.7) шляхом використання подвійних QR -ітерацій зі зсувами. Вихідні власні вектори визначаються за формулою

$$\vec{\Phi}_h^k = \mathbf{Q}_k \vec{s}_h^k, \quad h = 1, 2, \dots, n. \quad (1.8)$$

§2. Тестова задача.

Достовірність розрахунків перевірялась на двох тестових задачах, результати якої порівнювались з частотами власних коливань, які розраховані методом сплайн-колокації у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації [3] для відкритих некругових циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом.

В середовищі програми Femap побудовано геометрію двох гофрованих циліндричних оболонок $k = 6$ (рис. 1, а) і $k = 10$ (рис. 1, б), висотою $h = 0,12\text{ м}$, товщиною $d = 0,002\text{ м}$ та серединною поверхнею, що задається параметричними рівняннями:

$$x(\theta) = [a + r \cos(k\theta)] \cos \theta; \quad y(\theta) = [b + r \cos(k\theta)] \sin \theta, \quad (2.1)$$

де $a = b = 0,044\text{ м}$ – напівосі базового еліпсу поперечного перерізу, $r = 0,002\text{ м}$ – амплітуда гофри, k – густина гофрування.

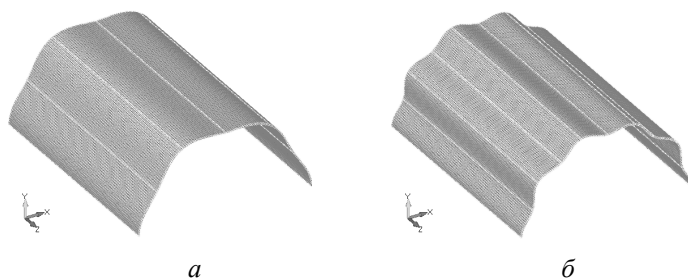


Рис. 1

Матеріалом оболонки задавалась сталь Х40Сг14 з модулем Юнга $E = 210\text{ ГПа}$, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,28$, густиною $\rho = 7740\text{ кг/м}^3$. Оболонка жорстко закріплювалась по всім контурам (СССС).

В результаті розв'язування тестових задач отримано частоти вільних коливань, які представлені в табл. 1 для $k = 6$ і в табл. 2 для $k = 10$ разом із частотами, отриманими іншим автором [3], а також з наведеною розбіжністю розрахунків у відсотках.

Таблиця 1

Форма	$f, \text{ Гц}$		$\epsilon, \%$
	Сплайн-кол. [3]	МСЕ	
1	3369	3269	3,06%
2	4841	4681	3,42%
3	4987	4827	3,31%
4	6183	5962	3,71%
5	6234	6011	3,71%

Таблиця 2

Форма	$f, \text{ Гц}$		$\epsilon, \%$
	Сплайн-кол. [3]	МСЕ	
1	5054	4879	3,59%
2	5339	5138	3,91%
3	6912	6643	4,05%
4	7140	6778	5,34%
5	8026	7676	4,56%

Отримані форми коливань представлені на рис. 2 для $k = 6$ і на рис. 3 для $k = 10$.



Рис. 2



Рис. 3

Аналізуючи отримані результати тестової задачі, можна побачити добру узгодженість між частотами вільних коливань, отриманими за допомогою FEMAP, та частотами, розрахованими методом сплайн-колокації у поєднанні з методом дискретної орто-

гоналізації, що свідчить про коректність використання розглянутих методик. Також можна відмітити неоднакові форми коливань при однакових порядкових номерах форми.

§3. Побудова розрахункової моделі.

За допомогою системи Femap змодельовано геометрію десяти еквівалентних по масі замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок з різною кількістю гофр по контуру (рис. 4) висотою $h = 0,12$ м, товщиною $d = 0,002$ м, серединною поверхнею, що описується параметричними рівняннями (2.1), де $r = 0,002$ м, значення a, b при різних k наведені в табл. 3. Як матеріал задавалась сталь з характеристиками: модуль Юнга $E = 214$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,32$, густина $\rho = 7820$ кг/м³. Оболонки досліджувались при жорстко закріпленому одному торці.

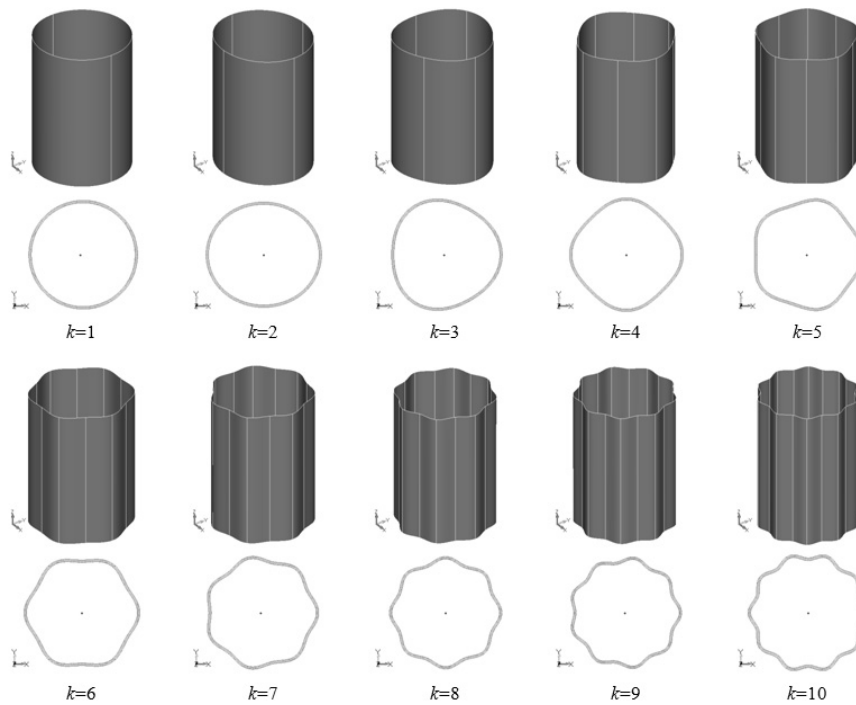


Рис. 4

Розрахунок проводився на визначення частот і форм вільних коливань.

Таблиця 3

k	1	2	3	4	5
$a = b, \text{ м}$	0,041547	0,043455	0,043340	0,043179	0,042971
k	6	7	8	9	10
$a = b, \text{ м}$	0,042716	0,042414	0,042064	0,041665	0,041217

§4. Результати числових розрахунків.

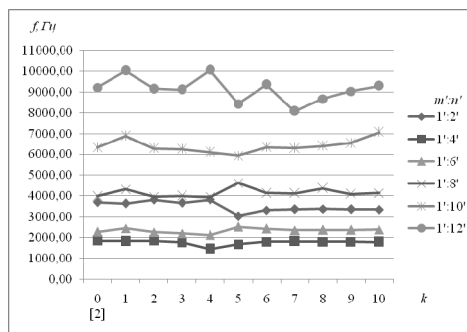
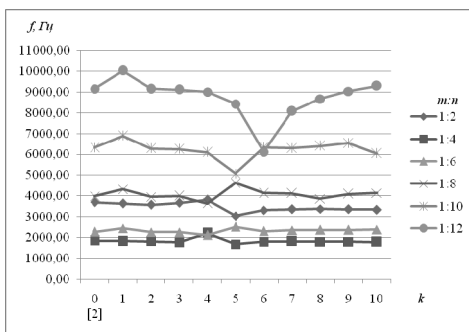
В результаті розрахунків отримано частоти і форми вільних коливань сталених консольних замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок. Частоти вільних коливань досліджуваних гофрованих оболонок та негофрованої кругової циліндричної оболонки [2] еквівалентної маси з $m = 1$ представлені в табл. 4, де m – кількість вузлів вздовж твірної, n – кількість вузлів вздовж дугової координати оболонки; $m:n$ – симетричні форми коливань; $m':n'$ – антисиметричні форми коливань. Симетричні та антисиметричні форми коливань описані в літературі, наприклад, в [18] вони отримані теоретично, а в [1] отримані чисельно та підтверджені експериментально.

Криві залежності частот при відповідній симетричній (a) і антисиметричній (b) формах коливань від кількості гофр представлені на рис. 5.

Таблица 4

m	n	f, Γ_{Π}					
		$k=0, [2]$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1	2	3696,64	3633,52	3565,30	3663,94	3817,38	3041,47
1'	2'	3696,64	3636,61	3816,02	3663,92	3817,38	3041,48
1	4	1835,91	1815,49	1809,03	1764,48	2197,84	1672,47
1'	4'	1835,36	1815,35	1839,60	1764,49	1447,19	1672,47
1	6	2265,74	2424,94	2247,68	2250,33	2104,68	2509,06
1'	6'	2265,84	2424,94	2251,45	2191,30	2104,68	2509,05
1	8	3976,71	4323,40	3953,15	3990,28	3631,37	4625,79
1'	8'	3975,42	4323,40	3953,38	3990,29	3913,25	4625,79
1	10	6318,14	6886,91	6285,77	6253,79	6103,60	5072,81
1'	10'	6317,61	6887,10	6285,76	6253,78	6103,60	5926,92
1	12	9154,78	10024,50	9148,11	9109,10	9008,85	8424,99
1'	12'	9221,22	10024,73	9148,22	9113,79	10052,03	8425,01

m	n	f, Γ_{Π}					
		$k=0, [2]$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
1	2	3696,64	3307,61	3361,60	3368,61	3357,64	3336,93
1'	2'	3696,64	3307,61	3361,61	3368,61	3357,64	3336,94
1	4	1835,91	1786,36	1798,94	1796,62	1789,80	1780,77
1'	4'	1835,36	1786,34	1798,93	1796,62	1789,79	1780,78
1	6	2265,74	2295,07	2345,73	2347,22	2356,65	2371,31
1'	6'	2265,84	2412,21	2345,73	2347,21	2356,65	2371,30
1	8	3976,71	4126,88	4123,40	3857,00	4083,29	4138,01
1'	8'	3975,42	4126,87	4123,39	4360,93	4083,29	4138,00
1	10	6318,14	6340,51	6287,41	6393,69	6530,70	6035,40
1'	10'	6317,61	6340,52	6287,42	6393,69	6530,71	7066,81
1	12	9154,78	6111,88	8073,83	8667,69	9029,40	9288,05
1'	12'	9221,22	9355,50	8073,81	8667,70	9029,39	9288,05



а

б

Рис. 5

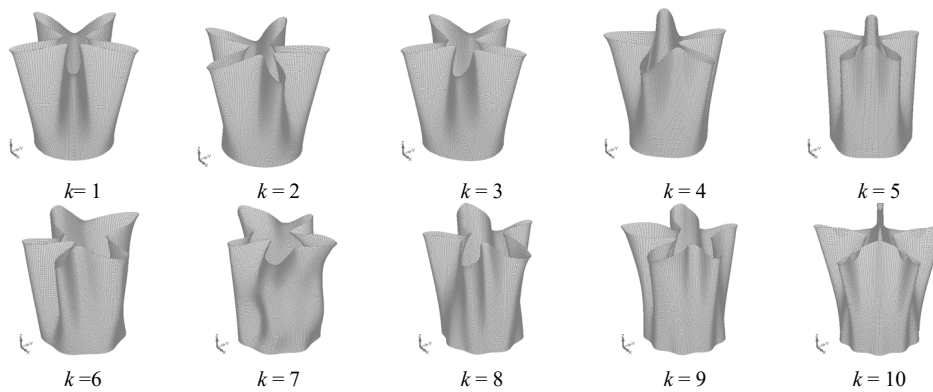


Рис. 6

Для порівняння форм коливань представлені симетричні форми $m=1$, $n=10$ на рис. 6 і $m=1$, $n=12$ на рис. 7, оскільки при цих формах коливань розбіжність частот при різній кількості гофр максимальна.

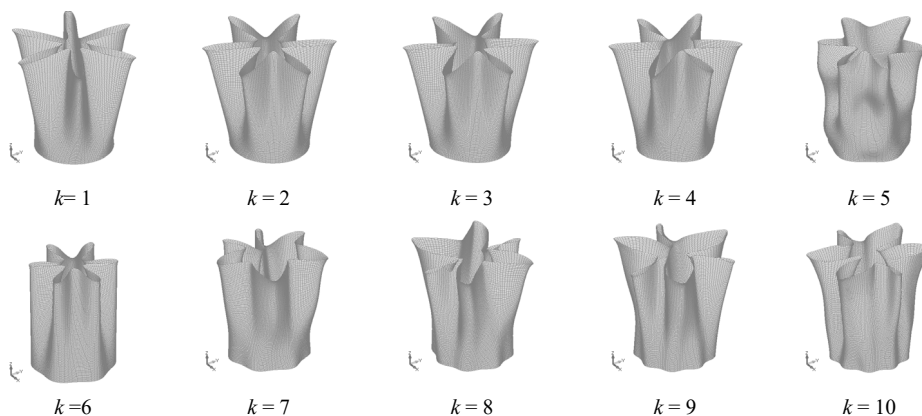


Рис. 7

Порівняння деяких симетричних і антисиметричних форм коливань представлені на рис. 8 для оболонок з різною кількістю гофр.

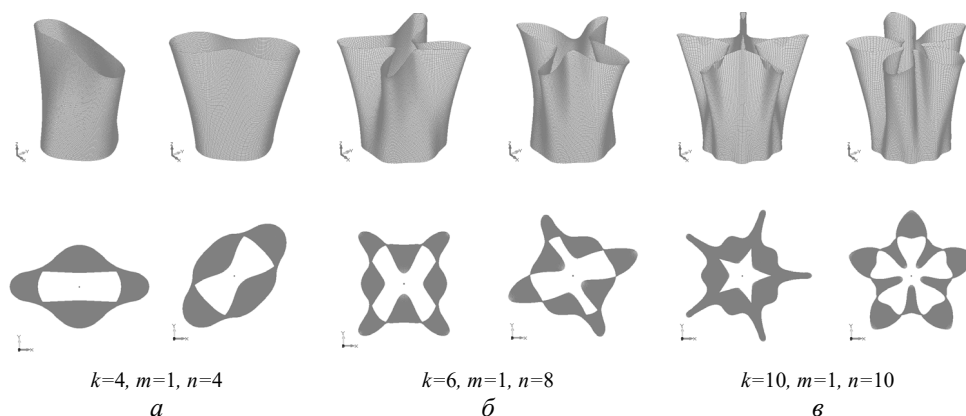


Рис. 8

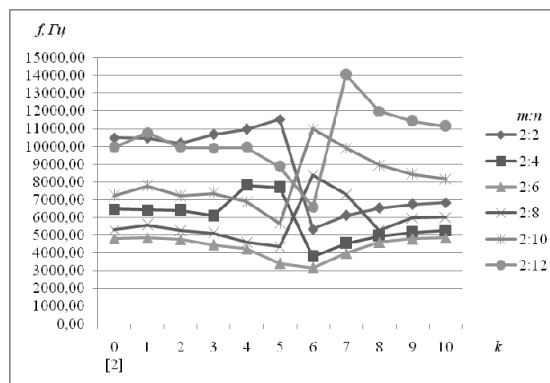
Відмітимо, що поділ форм коливань на симетричні та антисиметричні інколи формальний, оскільки не завжди спостерігається порушення симетрії форми. Можна спостерігати поворот коливань або поворот форми, при цьому глобальна зміна вигляду проекції форми на площину закріплення оболонки може відбуватися чи не відбуватися, що залежить від конструктивної жорсткості оболонки і додає складностей при класифікації форм коливань. Таким чином, на формах рис. 8, *a* спостерігається поворот форми із збереженням симетрії, на рис. 8, *б* – поворот форми без збереження симетрії, на рис. 8, *в* – зміна проекції форми з поворотом та збереженням симетрії.

Частоти вільних коливань досліджуваних гофрованих оболонок та негофрованої кругової циліндричної оболонки [2] з кількістю вузлів вздовж твірної $m=2$ представлені в табл. 5. Криві залежності частот при відповідній симетричній (*a*) і антисиметричній (*б*) формах коливань від кількості гофр представлені на рис. 9.

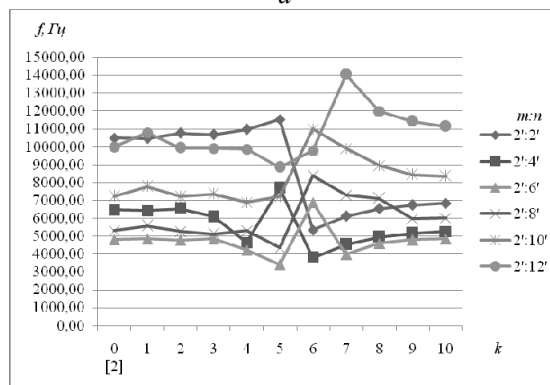
Таблица 5

m	n	f, Гц					
		k=0, [2]	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
2	2	10485,02	10463,60	10176,24	10668,04	10962,10	11522,82
2'	2'	10485,03	10470,89	10762,39	10668,06	10962,10	11522,82
2	4	6476,41	6420,54	6402,32	6085,10	7816,31	7680,70
2'	4'	6474,30	6419,90	6531,67	6085,12	4640,95	7680,68
2	6	4811,59	4852,27	4771,80	4449,82	4228,76	3408,97
2'	6'	4811,62	4852,47	4791,16	4850,22	4228,76	3408,97
2	8	5302,22	5581,95	5256,96	5116,23	4596,61	4356,76
2'	8'	5309,67	5581,99	5264,34	5116,24	5306,30	4356,77
2	10	7230,85	7770,17	7205,71	7349,18	6881,51	5660,99
2'	10'	7230,40	7770,25	7205,84	7349,23	6881,51	7204,03
2	12	9935,44	10788,65	9928,64	9909,22	9921,64	8857,55
2'	12'	9993,59	10788,77	9928,68	9914,56	9877,19	8857,56

m	n	f, Гц					
		k=0, [2]	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10
2	2	10485,02	5348,62	6104,46	6522,41	6737,03	6846,88
2'	2'	10485,03	5348,60	6104,48	6522,42	6737,04	6846,93
2	4	6476,41	3787,83	4533,08	4961,87	5163,63	5257,96
2'	4'	6474,30	3787,81	4533,10	4961,83	5163,66	5258,01
2	6	4811,59	3175,87	3974,01	4599,15	4797,12	4855,03
2'	6'	4811,62	6888,34	3974,00	4599,15	4797,14	4855,04
2	8	5302,22	8365,55	7292,37	5256,29	5965,42	6011,99
2'	8'	5309,67	8365,52	7292,36	7100,83	5965,40	6012,02
2	10	7230,85	10985,13	9903,77	8957,71	8442,78	8163,31
2'	10'	7230,40	10985,23	9903,78	8957,70	8442,78	8352,94
2	12	9935,44	6596,47	14031,10	11987,13	11417,89	11136,17
2'	12'	9993,59	9786,47	14031,23	11987,12	11417,90	11136,16



а



б

Рис. 9

Для порівняння форм коливань представлені симетричні форми $m = 2, n = 10$ на рис. 10 і $m = 1, n = 12$ на рис. 11, оскільки при цих формах коливань розбіжність частот при різній кількості гофр максимальна.

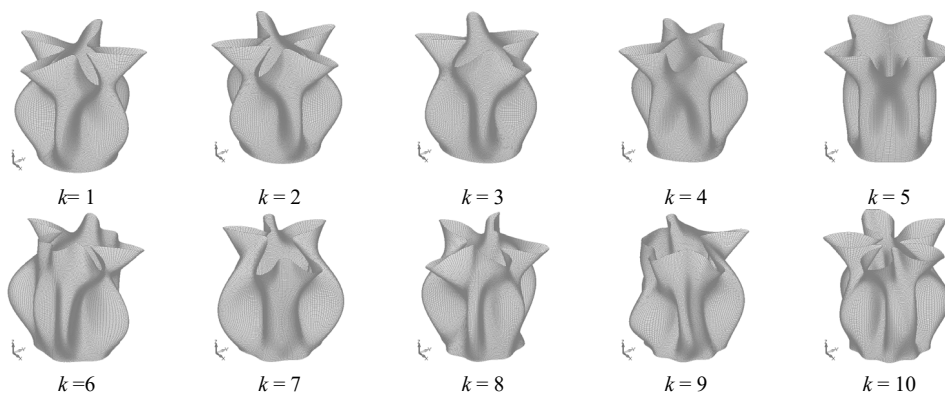


Рис. 10

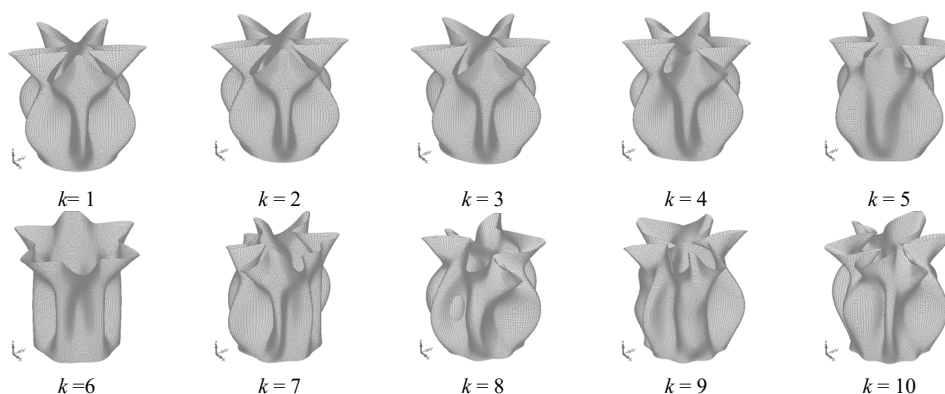


Рис. 11

При розрахунку частот вільних коливань досліджуваних гофрованих оболонок було виявлено частоти, наведені в табл. 6, форми коливань яких відповідають деформаціям кручення (рис. 12, 13), розтягу-стиску (рис. 14) та зсуву (рис. 15). При цьому тільки при зсувних коливаннях спостерігаються симетричні та антисиметричні форми коливань.

Таблиця 6

Форма	$f, \text{Гц}$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
Кручення	6708,45	6708,59	6711,84	6738,60	—
Розтяг-стиск	10771,52	10748,01	10758,89	10810,42	10862,66
Зсувні	15711,89	15820,94	15730,42	16197,54	17162,35
Зсувні'	15725,23	16259,80	15730,44	16197,54	17162,38
Форма	$f, \text{Гц}$				
	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
Кручення	6456,06	6472,24	6441,02	6392,24	6332,08
Розтяг-стиск	10930,70	10988,13	10915,60	11006,41	11022,96
Зсувні	12179,12	12349,77	12646,06	12789,03	12860,98
Зсувні'	12179,12	12349,77	12646,06	12789,03	12861,01

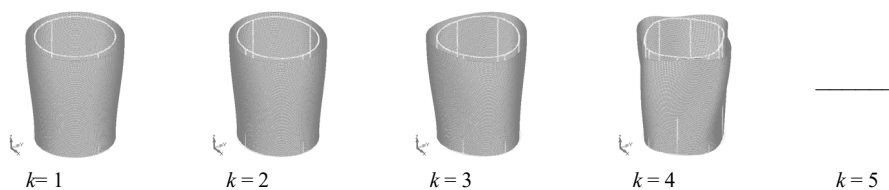


Рис. 12

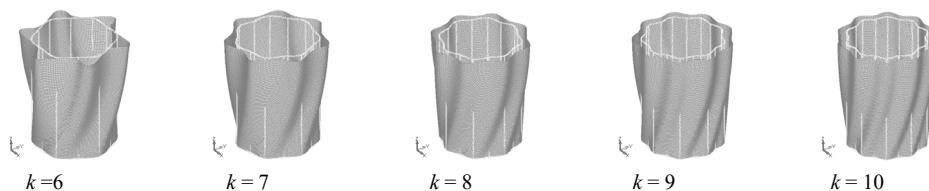


Рис. 13.

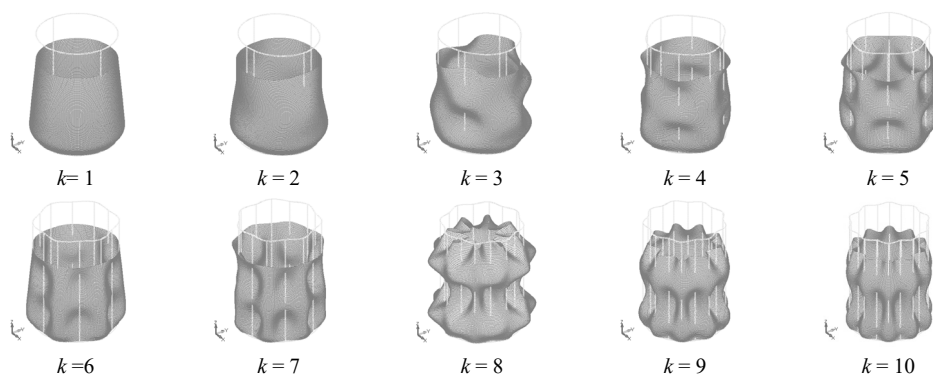


Рис. 14.

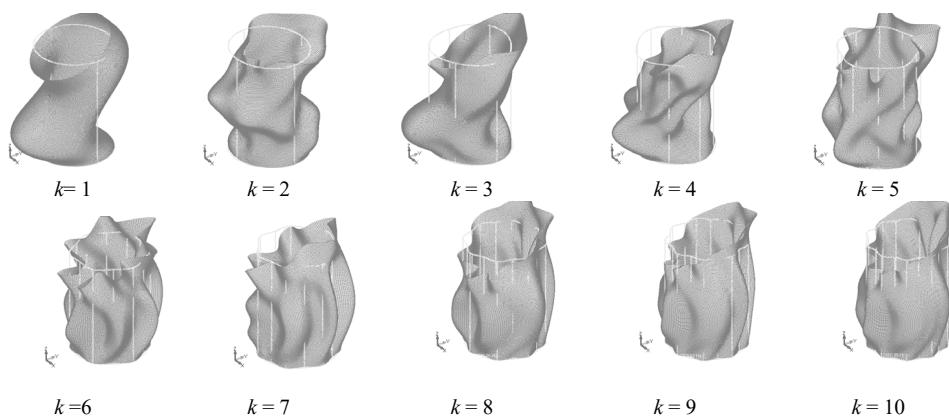


Рис. 15.

Висновки.

В роботі методом скінченних елементів визначено частоти і форми вільних коливань тонких замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок з різною кількістю гофр.

Розв'язано дві тестові задачі для відкритих некругових циліндричних оболонок з круговим гофрованим поперечним перерізом, які показали добру узгодженість (похи-

бка не перевищує 5,5%) розрахованих частот вільних коливань запропонованим методом, з частотами, розрахованими іншим автором методом сплайн-колокації у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації.

Для всіх розглянутих гофрованих оболонок встановлені симетричні і антисиметричні форми згинних коливань, а також форми коливань, які відповідають деформаціям кручення, розтягу-стиску та зсуву. Для зсувних коливань спостерігаються симетричні та антисиметричні форми коливань. Максимальні відхилення між частотами симетричних та антисиметричних форм згинних коливань спостерігаються при кратності кількості вузлів вздовж дугової координати оболонки n кількості гофр k , що добре спостерігається, починаючи з $k = 4$, і навпаки, майже відсутня розбіжність для $k = 7$ і $k = 9$. Зауважимо, що розглядаються форми коливань до значення $n = 12$ включно, при цьому n приймає тільки парні значення.

Частоти згинних коливань при формах коливання $m = 1; n = 4$ і $m = 1; n = 6$ із збільшенням кількості гофр змінюються несуттєво в порівнянні з іншими частотами згинних коливань при інших формах, які мають значні відхилення. Зміна частоти при формах розтягу-стиску та кручення із збільшенням кількості гофр, також, має монотонний характер. Для оболонки з кількістю гофр $k = 5$ відсутня частота і форма крутильних коливань. Зміна частоти зсувних коливань має значний стрибок при переході кількості гофр від $k = 5$ до $k = 6$.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Методом скінчених елементів визначено частоти і форми вільних коливань консольних ізотропних тонких замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок з різною кількістю гофр по контуру. Розв'язано дві тестові задачі для відкритих кругових циліндричних оболонок з гофрованим поперечним перерізом, які показали добру збіжність, що не перевищує 5,5%, розрахованих частот вільних коливань запропонованим методом з частотами, розрахованими іншим автором методом сплайн-колокації у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації. Проведено порівняння частот вільних коливань гофрованих оболонок з різною кількістю гофр. Встановлено залежність частоти вільних коливань гофрованих оболонок від кількості гофр та форм коливань. Для всіх розглянутих гофрованих оболонок встановлені симетричні і антисиметричні форми коливань, а також форми розтягуючих, зсувних, згинних та крутильних коливань.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: вільні коливання, форми коливань, гофрована кругова циліндрична оболонка, метод скінчених елементів.

1. Будак В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Пригода О.П., Бойчук О.В. Визначення власних частот тонкостінної оболонки не кругового поперечного перерізу методом стробоголографічної інтерферометрії // Пробл. обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2015. – № 24. – С. 18 – 25.
2. Будак В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, серія: «Фізико-математичні науки». – 2015. – № 1. – С. 23 – 28.
3. Пузырев С.В. О свободных колебаниях некруговых цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим сечением // 36. наукових праць НУК. – 2013. – № 1. – С. 47 – 53.
4. Arnold R.N., Warburton G.B. The flexural vibration of thin cylinders // Proc. Inst. Mech. Eng. – 1953. – 167 A, N 1. – P. 62 – 80.
5. Baron M.L., Bleich H.H. Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells // J. Appl. Mech. – 1954. – 21, N 2. – P. 178 – 188.
6. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Natural Frequencies and Modes of Noncircular Cylindrical Shells with Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 2. – P. 167 – 172.
7. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method // J. Math. Sci. – 2016. – 212, N 2. – P. 182 – 192.

8. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Khorishko V.V., Borisenko M.Yu. Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 1. – P. 68 – 74.
9. Du H. et al. High-frequency vibrations of corrugated cylindrical piezoelectric shells // *Acta Mechanica Solida Sinica.* – 2008. – **21**, N 6. – P. 564 – 572.
10. Greenspon J.F. Vibration of thick cylindrical shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1959. – **31**, N 12. – P. 1682 – 1683.
11. Grigorenko A., Zolotoi Yu., Prigoda A., Zhuk I., Khorishko V., Ovcharenko A. Experimental investigation of natural vibrations of a thick-walled cylindrical shell by the method of holographic interferometry // *J. Math. Sci.* – 2013. – **194**, N 3. – P. 239 – 244.
12. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Y. Free Vibrations of an Open Non-circular Cylindrical Shell of Variable Thickness. In: *Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W.* (eds). *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials.* – Cham: Springer. – 2020. – **134**. – P. 141 – 154.
13. Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Free Vibrations of an Open Elliptical Cylindrical Shell // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 4. – P. 389 – 401.
14. Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Prigoda A.P. Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 1, – P. 75 – 84.
15. Grigorenko A.Ya., Parkhomenko O.Yu., Vasil'eva L.Ya., Borisenko M.Yu. Solution of the Problem of Free Vibrations of a Nonthin Orthotropic Shallow Shell of Variable Thickness in the Refined Statement // *J. Math. Sci.* – 2017. – **229**, N 3. – P. 253 – 268.
16. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Solving the Stress Problem for Hollow Cylinders with Corrugated Elliptical Cross Section // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 2. – P. 169 – 175.
17. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Using Spline-Approximation to Solve Problems of Axisymmetric Free Vibration of Thick-Walled Orthotropic Cylinders // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 10. – P. 1137 – 1147.
18. Khalifa A.M. Solving the vibration problem of inhomogeneous orthotropic cylindrical shells with hoop-corrugated oval cross section // *Comptes Rendus Mécanique.* – 2015. – **343**, N 9. – P. 482 – 494.
19. Kim Y.W. Vibration Analysis of Longitudinally Corrugated Cylindrical Shells // *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering.* – 2016. – **26**, N 7. – P. 851 – 856.
20. Nguyen T.P. et al. Nonlinear vibration of full-filled fluid corrugated sandwich functionally graded cylindrical shells // *J. of Vibration and Control.* – 2020. – C. 1077546320936537.
21. Semenyuk N.P., Babich I.Y., Zhukova N.B. Natural Vibrations Of Corrugated Cylindrical Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 5. P. 512 – 519.
22. Xu L. et al. Study on the vibration characteristics of a finite-width corrugated cylindrical shell piezoelectric transducer // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control.* – 2010. – **57**, N 6. – P. 1460 – 1469.
23. Xu L. et al. Vibration characteristics of a corrugated cylindrical shell piezoelectric transducer // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control.* – 2008. – **55**, N 11. – P. 2502 – 2508.
24. Yang J. S. et al. Modal response of all-composite corrugated sandwich cylindrical shells // *Composites Sci. and Technology.* – 2015. – **115**. – P. 9 – 20.
25. Yuan H., Liu Rh. Nonlinear vibration of corrugated shallow shells under uniform load // *Appl. Math. Mech.* – 2007. – **28**. – P. 573 – 580.

Надійшла 20.07.2021

Затверджена до друку 19.07.2022