

А.О.Камінський¹, М.В.Дудик², В.М.Феньків²

ПРО ЗРУШЕННЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ З КОНТАКТОМ БЕРЕГІВ
ВІД КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: dfm11@ukr.net

²Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини,
вул. Садова, 2, 20300, Умань, Україна; e-mail: dudik_m@hotmail.com

Abstract. Under conditions of plane deformation, the solution of the problem of calculating the parameters of a small-scale failure zone in a bonding material at the end of an interfacial crack with a tip at the angular point of the polygonal interface of a piecewise homogeneous body is found using the Wiener-Hopf method. The dry friction is implied as an interaction law between the crack faces. The failure zone is modeled by the normal displacement discontinuity line, at which the normal stress is equal to the tensile strength of the bonding material. Expressions are obtained for the length of the failure zone, the crack opening and the local stress field near the tip. A mechanism for the initial crack evolution has been proposed, which involves the formation of a microcrack in part of the failure zone and its merging with the initial crack with increasing load. Numerical analysis of the dependence of the parameters of the failure zone, microcrack, and limiting load on the load and parameters of the composite body is performed.

Key words: corner point of interface, interfacial crack, contact of the faces with friction, failure zone, microcrack, crack starting.

Вступ.

В механіці руйнування кусково-однорідних тіл у 60-х роках минулого століття однією з перших була досліджена модель розкритої міжфазної тріщини як математичного розрізу з вільними від навантаження берегами [12, 13, 29, 34]. Її основним недоліком став висновок про осциляційну залежність переміщень берегів тріщини від відстані до вершини, що передбачає фізично неможливий взаємний перетин берегів. Це зумовило певні труднощі із коректним застосуванням критеріїв лінійної механіки руйнування до моделей даного типу [17].

Слід також зауважити, що поруч з розглядом тріщин нормального відриву та зсуву в роботах [4, 15, 16] були розглянуті проблеми руйнування кусково-однорідних тіл при стиску вздовж міжфазних тріщин, що призводить до втрати локальної стійкості в околі тріщин.

Альтернативна модель міжфазної тріщини з контактом прилеглої до вершини частини берегів, розвинута у роботах [3, 5, 6, 11, 18], дозволила уникнути вищезгаданого недоліку моделі розкритої тріщини. Однак в ній зберігалась степенева особливість напружень біля вершин, що означало наявність передумов для подальшого поширення тріщини. Однією з таких передумов є зародження біля вершини міжфазної тріщини, як концентратора напружень, зони передруйнування – області незворотних деформацій матеріалу, яка характеризується пластичною течією матеріалу, підвищеним рівнем утворення дислокацій, пор, мікротріщин та інших мікродефектів структури. Розрахунки параметрів зон передруйнування біля концентраторів напружень стали невід’ємною частиною досліджень структурної цілісності інженерних конструкцій і механізмів [21, 24, 25].

Більшість опублікованих робіт з визначення параметрів зон передруйнування у кусково-однорідному тілі стосується тріщин на плоскій межі поділу [2, 19, 20, 22, 27, 30, 31, 33]. Через складність визначальних рівнянь нелінійної механіки руйнування, яка базується на припущенні про значний вплив процесів передруйнування на напружено-деформований стан тіла, відповідні дослідження виконувались або за допомогою чисельних методів, або з прийняттям певних модельних спрощень.

Проте, у будові сучасних промислових виробів, будівельних матеріалів і конструкцій, композитів з гранульованими наповнювачами, гірських порід тощо нерідко зустрічаються міжфазні тріщини, розташовані на ламаній межі поділу. Для такої конфігурації кусково-однорідних тіл в роботах [7 – 9] були виконані дослідження різних моделей зон передруйнування біля вершини розкритої міжфазної тріщини, яка співпадає з кутовою точкою ламаної межі поділу.

Однак слід зазначити, що на широкому інтервалі кутів зламу показник сингулярності напружень біля вершини розкритої тріщини на ламаній межі поділу виявляється комплексним [7, 32], що передбачає фізично неможливі осциляції берегів тріщини і необхідність звернення до контактної моделі типу Комніноу у випадку невеликих розмірів області контакту берегів. Зокрема, в [1, 26] виконано розрахунок напружено-деформованого стану міжфазних зсувних тріщин з повністю контактуючими без тертя берегами, що виходять з кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів. В [1] зроблено висновок, що для міжфазних тріщин малих розмірів у випадку повного гладкого контакту берегів їх рівновага є нестійкою та передбачає їх подальший розвиток. У зв'язку з цим, у продовження робіт [1, 7 – 9, 26] в даній статті досліджується початковий етап зрушення тріщини з контактуючими берегами від кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, який вбачається в утворенні маломасштабної зони передруйнування на продовженні тріщини у з'єднувальному матеріалі з подальшим розривом міжчастинкових зв'язків у зоні та появою в ній мікротріщини, що збільшується за розмірами при зростанні навантаження аж до злиття з початковою тріщиною. Метою роботи є розрахунок параметрів зони передруйнування і мікротріщини та граничного навантаження, яке відповідає старту тріщини.

§1. Постановка задачі.

Для дослідження початкового етапу зрушення міжфазної тріщини в умовах плоскої деформації знайдемо розв'язок задачі про розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування біля вершини тріщини, яка співпадає з кутовою точкою ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних пружних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 , відповідно, при куті злому межі поділу, що дорівнює α . Вважаємо, що з'єднувальний матеріал є менш тріщиностійким, ніж матеріали з'єднуваних частин тіла, тому поширення тріщини відбувається у з'єднувальному матеріалі за крихким механізмом. Нехтуючи товщиною шару з'єднувального матеріалу, моделюватимемо зону передруйнування у ньому відрізком прямої лінії, на якому нормальне переміщення зазнає розриву, а нормальне напруження дорівнює опору відриву з'єднувального матеріалу σ_0 . Припускаючи наявність контакту берегів біля вершини тріщини, область контакту моделюємо розрізом, береги якого взаємодіють за законом сухого тертя з коефіцієнтом тертя μ .

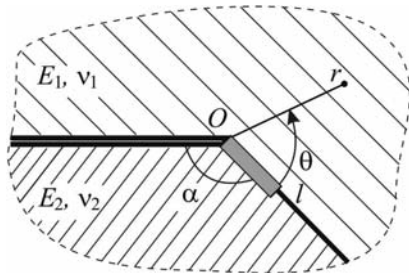


Рис. 1

На досліджуваному етапі розміри зони передруйнування є малими, тому її довжину l вважаємо набагато меншою порівняно з довжинами тріщини L та області контакту s . Це дозволяє обмежитися вивченням напружено-деформованого стану лише в околі вершини і звести вихідну задачу до задачі про розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кусково-однорідній площині біля вершини напівнескінченної міжфазної тріщини з контактуючими берегами, яка співпадає з кутовою точкою ламаної межі поділу (рис. 1).

Враховуючи прийняті вище припущення, приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами

$$\theta = 0: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \langle u_r \rangle = 0; \quad (1.1)$$

$$\theta = -\alpha \cup (2\pi - \alpha): \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \langle u_\theta \rangle = 0, \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta;$$

$$\theta = 0, \quad r < l: \sigma_\theta = \sigma_0; \quad \theta = 0, \quad r > l: \langle u_\theta \rangle = 0 \quad (1.2)$$

($\langle g \rangle$ – стрибок величини g).

Для формулювання умови на нескінченності використовуємо метод зрощування асимптотичних розкладів, який передбачає перехід на відстанях $l \ll r \ll s$ шуканого розв'язку у відомий розв'язок аналогічної задачі теорії пружності без зони передруйнування [23]:

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty: \sigma_\theta = CF(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu)r^\lambda + o\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$F(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu) = (1-e)^2 f_1 + (1-e)(1+\kappa_2)f_2 + \quad (1.3)$$

$$+ e(1-e)(1+\kappa_2)f_3 + e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)f_4 + e^2(1+\kappa_2)^2 f_5;$$

$$f_1 = -4\mu\delta_{11}t_1; \quad f_2 = 4t_1[\cos\lambda\beta - \mu\sin(\lambda+2)\beta];$$

$$f_3 = \delta_{11}\delta_{32} - 2\lambda\delta_{22}\delta_1(\beta) + \mu[(\lambda+2)\delta_{12}\delta_{31} + 2\delta_{21}\delta_1(\beta) + 4\delta_{11}\delta_1(\alpha)];$$

$$f_4 = 2\sin\lambda\pi \left[2\sin\lambda(\pi-\alpha)\delta_1(\alpha) - \delta_{31}\cos\lambda(\pi-\alpha) + \right.$$

$$\left. + \sin(\lambda+2)\beta[\delta_{23}\sin\lambda(\pi-\alpha) + \lambda\delta_{22}\cos\lambda(\pi-\alpha) - 2\mu\delta_2] \right];$$

$$f_5 = 4\sin\lambda\pi\delta_2[\cos(\lambda+2)\alpha + \mu\sin(\lambda+2)\alpha];$$

$$t_1 = (\lambda+1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda+1)\alpha;$$

$$\delta_{11} = \lambda\sin(\lambda+2)\beta - (\lambda+2)\sin\lambda\beta; \quad \delta_{12}(\lambda) = \cos\lambda\beta - \cos(\lambda+2)\beta;$$

$$\delta_{21} = \lambda\sin(\lambda+2)\alpha - (\lambda+2)\sin\lambda\alpha; \quad \delta_{22}(\lambda) = \cos\lambda\alpha - \cos(\lambda+2)\alpha;$$

$$\delta_{23} = (\lambda+2)\sin(\lambda+2)\alpha - \lambda\sin\lambda\alpha;$$

$$\delta_{31}(\lambda) = -(\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha; \quad \delta_{32}(\lambda) = (\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha;$$

$$\delta_1(x) = (\lambda+1)\sin^2 x + \sin^2(\lambda+1)x;$$

$$\delta_2 = (\lambda+1)\sin\alpha\cos(\lambda\pi+\alpha) - \sin(\lambda+1)\alpha\cos[(\lambda+1)\alpha - \lambda\pi];$$

$$\beta = 2\pi - \alpha; \quad e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}; \quad \kappa_1 = 3 - 4\nu_1; \quad \kappa_2 = 3 - 4\nu_2.$$

У цих формулах λ – показник сингулярності напружень, що визначається як найменший на інтервалі $(-1, 0)$ корінь характеристичного рівняння задачі:

$$\begin{aligned}
D_0(\lambda) &= 0; \quad D_0(\lambda) = D_{01}(\lambda) + \mu D_{02}(\lambda); \\
D_{01}(\lambda) &= (1-e)[0,5(1+\kappa_1)D_{11}t_1 - 0,5e(1+\kappa_2)D_{12}t_3 + e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)d_3] + \\
&\quad + e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)D_{13}; \tag{1.4} \\
D_{02}(\lambda) &= (1-e)\{(1+\kappa_1)D_{21}t_1 - e(1+\kappa_2)[D_{22}t_3 - (1+\kappa_1)d_4] + 2(1-e)^2t_1t_3\} + \\
&\quad + e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)D_{23}; \\
D_{11} &= (1-e)d_5 + (1+\kappa_1)\sin 2(\lambda+1)(2\pi-\alpha); \quad D_{12} = e(1+\kappa_2)\sin 2(\lambda+1)\alpha + (1-e)d_2; \\
D_{13} &= \sin^2 \lambda\pi[(1+\kappa_1)d_7 - e(1+\kappa_2)d_9]; \\
D_{21} &= (1-e)d_6 - (1+\kappa_1)t_2; \quad D_{22} = e(1+\kappa_2)t_4 + (1-e)d_1; \\
D_{23} &= \sin^2 \lambda\pi[(1+\kappa_1) - e(1+\kappa_2)]d_8; \\
d_1 &= (\lambda+1)\sin^2 \alpha + 3t_4; \quad d_2 = (\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha; \\
d_3 &= \left[(\lambda+1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda+1)\alpha \sin(\lambda+1)\beta \right] \sin 2(\lambda+1)(\alpha-\pi) - \\
&\quad - 2(\lambda+1)\sin^2 \lambda\pi \sin 2\alpha \cos^2(\lambda+1)(\pi-\alpha); \\
d_4 &= 2 \left[(\lambda+1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda+1)\alpha \sin(\lambda+1)\beta \right] \sin^2(\lambda+1)(\pi-\alpha) - \\
&\quad - 4\sin^2 \lambda\pi \left[(\lambda+1)\sin^2 \alpha \cos^2(\lambda+1)(\pi-\alpha) + \sin(\lambda+1)\alpha \sin(\lambda+1)\beta \right]; \\
d_5 &= (\lambda+1)\sin 2\alpha - \sin 2(\lambda+1)\beta; \quad d_6 = (\lambda+1)\sin^2 \alpha + 3t_2; \\
d_7 &= (\lambda+1)\sin \alpha \cos \alpha - \sin(\lambda+1)\alpha \cos(\lambda+1)\beta; \\
d_8 &= (\lambda+1)\sin^2 \alpha + \sin(\lambda+1)\alpha \sin(\lambda+1)\beta; \\
d_9 &= (\lambda+1)\sin \alpha \cos \alpha + \cos(\lambda+1)\alpha \sin(\lambda+1)\beta.
\end{aligned}$$

Стала C , аналогічна за змістом коефіцієнту інтенсивності напружень біля вершини тріщини, визначається з розв'язку зовнішньої задачі і вважається заданою. Передбачається, що в задачі, яка відповідає етапу процесу деформування, коли зона передруйнування ще не з'явилася, при $\theta = 0$ в околі вершини тріщини нормальне напруження є розтягувальним ($\theta = 0, \sigma_\theta > 0$). Це вимагає виконання умови $CF(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu) > 0$ додатково до вимоги стискального напруження на берегах тріщини ($\theta = -\alpha \cup (2\pi - \alpha), \sigma_\theta < 0$), яке необхідне для контакту берегів.

В кінці лінії розриву, яка моделює зону передруйнування, відповідно до загальних положень про поведінку напружень в околі гострокінцевих концентраторів має місце коренева особливість напружень і градієнта нормального переміщення:

$$\theta = 0, r \rightarrow l+0; \sigma_\theta \sim \frac{1+\kappa_1+e(1+\kappa_2)}{2(1+\kappa_1)} \frac{k}{\sqrt{2\pi(r-l)}}; \quad (1.5)$$

$$\theta = 0, r \rightarrow l-0, \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{1+e\kappa_2}{1+\kappa_1} \frac{k}{\sqrt{2\pi(l-r)}},$$

де k – локальний коефіцієнт інтенсивності напружень, що визначається в ході розв’язання задачі.

Розв’язок сформульованої крайової задачі (1.1) – (1.3) шукаємо у вигляді суми розв’язків наступних двох задач. Перша відрізняється від другої тим, що в (1.2) замість першої умови використовується умова

$$\theta = 0, r < l: \sigma_\theta = \sigma_0 - CF(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu)r^\lambda, \quad (1.6)$$

а на нескінченності напруження спадають як $o(1/r)$. Друга задача є аналогічною, але без зони передруйнування, розв’язок якої відомий, тому достатньо знайти розв’язок першої задачі.

§2. Розв’язування задачі.

Розв’язок першої задачі шукаємо за допомогою методу Вінера – Гопфа [28]. Шляхом процедур, детально описаних у [22], застосовувавши до рівнянь рівноваги умови сумісності деформацій, використовуючи закон Гука, граничні умови (1.1), а також інтегральне перетворення Мелліна виду $f^*(p, \theta) = \int_0^\infty f(r, \theta) r^p dr$ ($f(r, \theta)$ – довільна компонента тензора напружень або градієнта переміщення, а p – комплексний параметр перетворення) та, використавши другу умову в (1.2) і умову (1.6), приходимо до функціонального рівняння

$$\Phi^+(p) + \frac{\sigma_0}{p+1} - \frac{CF(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu)l^\lambda}{p+1+\lambda} = A \operatorname{ctg} p\pi G(p) \Phi^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2);$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l, 0) \rho^p d\rho; \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle_{r=\rho l, \theta=0} \rho^p d\rho; \quad (2.1)$$

$$A = \frac{(1+\kappa_1)[1+\kappa_1+e(1+\kappa_2)]}{2(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)}; \quad G(p) = \frac{(1+\kappa_1)D_1(p) \sin p\pi}{2AD_0(-1-p) \cos p\pi};$$

$$D_1(p) = -(1+\kappa_1)^2 \cos(p+1)\beta \Delta_1 \Delta_5 - e^2(1+\kappa_2)^2 \cos(p+1)\alpha \Delta_4 \Delta_6 + \mu(1-e)(1+\kappa_1) -$$

$$-\mu e(1-e)(1+\kappa_2) \Delta_2 \Delta_4 + 2e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2) \left[\cos(p+1)(\pi-\alpha) \Delta_7 \Delta_8 + \sin^2 p\pi \Delta_9 \right];$$

$$\Delta_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha; \quad \Delta_2(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha;$$

$$\Delta_3(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p(2\pi-\alpha); \quad \Delta_4(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\beta;$$

$$\Delta_5(p) = \cos(p-1)\beta + \mu \sin(p-1)\beta; \quad \Delta_6(p) = \cos(p-1)\alpha - \mu \sin(p-1)\alpha;$$

$$\Delta_7(p) = p^2 \sin^2 \alpha + \sin p\alpha \sin p\beta; \quad \Delta_8(p) = \cos(p-1)(\pi-\alpha) + \mu \sin(p-1)(\pi-\alpha);$$

$$\Delta_9(p) = p^2 \sin^2 \alpha - 2\mu p \sin \alpha \cos p(\pi - \alpha) \cos[p(\pi - \alpha) - \alpha] - \sin p\alpha \sin p\beta$$

($-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі додатні числа).

Розв'язування рівняння (2.1) потребує факторизації (подання у вигляді добутку аналітичних функцій) коефіцієнта при $\Phi^-(p)$. Множник $\operatorname{ctg} p\pi$ факторизуємо за допомогою гамма-функції Ейлера:

$$\operatorname{ctg} p\pi = \frac{K^+(p)K^-(p)}{p}; \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0,5 \mp p)},$$

де функції $K^+(p)$ і $K^-(p)$ аналітичні і не мають нулів у півплощинах $\operatorname{Re} p < 0,5$ і $\operatorname{Re} p > -0,5$, відповідно. Для факторизації множника $G(p)$ врахуємо, що функція $G(it)$ має додатню парну дійсну та непарну уявну частини, які при $t \rightarrow \pm\infty$ прямують до 1 і 0, відповідно, тому за формулою Гахова [14] маємо:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0); \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0; \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases}$$

При цьому функція $G^+(p)$ аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p < 0$, а функція $G^-(p)$ – у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$. Використовуючи вищенаведені факторизації, перепишемо рівняння (2.1) у вигляді

$$\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \left[\Phi^+(p) + \frac{\sigma_0}{p+1} - \frac{CF(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu)l^\lambda}{p+1+\lambda} \right] = \frac{AK^-(p)}{pG^-(p)} \Phi^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0).$$

Для усунення особливостей у лівій частині отриманого рівняння при $p = -1$ і $p = -1 - \lambda$ подамо його у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} + \frac{\sigma_0}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} \right] - \\ & - \frac{CF(\alpha)l^\lambda}{p+1+\lambda} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right] = \\ & = \frac{AK^-(p)}{pG^-(p)} \Phi^-(p) - \frac{\sigma_0}{p+1} \frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} + \frac{CF(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu)l^\lambda}{(p+1+\lambda)K^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ліва частина рівняння (2.2) є аналітичною функцією у півплощині $\operatorname{Re} p < 0$, а права – у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$. Тоді, у відповідності з принципом аналітичного продовження, повинна існувати єдина функція, яка є аналітичною у всій комплексній площині і дорівнює лівій і правій частинам цього рівняння у відповідних півплощинах. Для її знаходження дослідимо асимптотичну поведінку функцій, що входять в рівняння (2.2), в околі нескінченно віддаленої точки.

Застосувавши до асимптотик (1.5) теорему абелевого типу [28], отримаємо:

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) & \sim \frac{\kappa_1 + 1 + e(1 + \kappa_2)}{2(e + \kappa_1)} \cdot \frac{k}{\sqrt{-2pl}} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p < 0); \\ \Phi^-(p) & \sim -\frac{1 + e\kappa_2}{1 + \kappa_1} \cdot \frac{k}{\sqrt{2pl}} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p > 0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

З формули Гахова для $G^\pm(p)$ випливає, що $G^\pm(p) \rightarrow 1$, якщо $p \rightarrow \infty$, а формула Стірлінга для гамма-функції призводить до асимптотик:

$$K^+(p) \sim \sqrt{-p} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p < 0, 5); \quad K^-(p) \sim \sqrt{p} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p > -0, 5).$$

Враховуючи вказані асимптотики, знаходимо, що ліва і права частини рівняння (2.2) прямують на нескінченності до нуля. Тому, згідно з теоремою Ліувілля, єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині p . Звідси, прирівнюючи ліву і праву частини рівняння (2.2) до нуля, отримуємо шуканий розв'язок вихідного функціонального рівняння (2.1):

$$\Phi^+(p) = -K^+(p)G^+(p) \left\{ \frac{\sigma_0}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} \right] - \frac{CF(\alpha)l^\lambda}{p+\lambda+1} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0); \quad (2.4)$$

$$\Phi^-(p) = \frac{pG^-(p)}{AK^-(p)} \left\{ \frac{\sigma_0}{p+1} \frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} - \frac{CF(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu)l^\lambda}{(p+\lambda+1)K^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right\} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

§3. Визначення параметрів зони передруйнування.

З отриманого розв'язку (2.4) випливає асимптотика

$$\Phi^+(p) \sim \frac{1}{\sqrt{-p}} \left\{ \frac{\sigma_0}{K^+(-1)G^+(-1)} - \frac{CF(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu)l^\lambda}{K^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right\} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p < 0).$$

Порівнюючи цей вираз з асимптотикою (2.3) для $\Phi^+(p)$, знайдемо коефіцієнт інтенсивності біля кінця лінії розриву нормального переміщення:

$$k = \sqrt{2l} \frac{2(e + \kappa_1)}{\kappa_1 + 1 + e(1 + \kappa_2)} \left\{ \frac{\sigma_0}{K^+(-1)G^+(-1)} - \frac{CF(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu)l^\lambda}{K^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right\}.$$

Умова обмеженості напружень в кінці зони передруйнування вимагає, щоб коефіцієнт інтенсивності k дорівнював нулю. Ця вимога призводить до рівняння для визначення довжини зони:

$$l = \left(\frac{2CF(e, \kappa_1, \kappa_2, \alpha, \mu) J(0)}{\sqrt{\pi} \sigma_0 K^+(-\lambda-1) J(\lambda)} \right)^{-1/\lambda}; \quad (3.1)$$

$$J(x) \equiv G^+(-1-x) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(x+1) \ln |G(it)| + t \cdot \arg(G(it))}{t^2 + (x+1)^2} dt \right].$$

Згідно з (3.1) довжина зони передруйнування нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, якому стала C є прямо пропорційною. Крім того, довжина зони передруйнування тим більша, чим менший опір відриву з'єднувального матеріалу σ_0 .

Знайдений розв'язок (2.4) рівняння (2.2) із залученням оберненого перетворення Мелліна і теореми про лишки дозволяє визначити поле напружень в околі вершини тріщини, яке змінилося внаслідок утворення зони передруйнування. Загальна структура тензора напружень на відстанях $r \ll l$ матиме вигляд

$$\sigma_{mn}(r, \theta) = \sigma_{mn}^0(\theta) + \sum_i g_{mn}(\theta, \lambda_i) r^{\lambda_i} \quad (r \rightarrow 0), \quad (3.2)$$

де $\sigma_{mn}^0(\theta)$, $g_{mn}(\theta, \lambda'_i)$ – відомі функції, λ'_i – корені рівняння

$$D_1(-1-x) = 0, \quad (3.3)$$

що через вимогу обмеженості переміщень задовольняють умову $\text{Re } \lambda'_i > -1$. Зокрема, кореням рівняння (3.3) зі смуги $-1 < \text{Re } \lambda'_i < 0$ відповідатимуть сингулярні складові в розкладі (3.2), які зумовлюватимуть концентрацію напружень біля вершини тріщини.

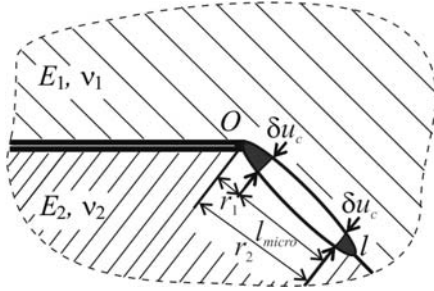


Рис. 2

На досліджуваному етапі розвитку зони передруйнування розкриття тріщини в її вершині, згідно з прийнятими в (1.1) граничними умовами, дорівнює нулю, тому відповідно до деформаційного критерію руйнування її зрушення здається неможливим. Однак можна уявити механізм зрушення тріщини, за яким спочатку відбувається розрив міжчастинкових зв'язків у зоні передруйнування у місці максимального розходження берегів зони, яке дорівнює стрибку нормального переміщення $\delta u(r) = \langle u_\theta(r, 0) \rangle$, при досягненні ним деякого

критичного значення δu_c , що є характеристикою з'єднувального матеріалу. В результаті в середині зони передруйнування утворюється мікротріщина (рис. 2), яка зростає зі збільшенням навантаження аж до досягнення нею вершини початкової тріщини, що і призводить до зрушення останньої.

Використовуючи розв'язок (2.4) рівняння (2.1), знаходимо залежність $\delta u(r)$:

$$\delta u(r) = \frac{2\sigma_0(1+\nu_1)}{E_1} r \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{D_0(-1-\lambda'_i)K^+(-1-\lambda'_i)J(\lambda'_i)\lambda}{D'_1(-1-\lambda'_i)K^+(-1)J(0)\lambda'_i(1+\lambda'_i)(\lambda'_i-\lambda)} \left(\frac{r}{l}\right)^{\lambda'_i} \right] + \frac{D'_0(-1)}{D'_1(-1)} \right\}. \quad (3.4)$$

Умова максимуму розходження берегів зони передруйнування $\delta u(r)$ призводить до рівняння для розрахунку відстані r_m , на якій можна очікувати зародження мікротріщини:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{D_0(-1-\lambda'_i)K^+(-1-\lambda'_i)J(\lambda'_i)\lambda}{D'_1(-1-\lambda'_i)K^+(-1)J(0)\lambda'_i(\lambda'_i-\lambda)} \left(\frac{r_m}{l}\right)^{\lambda'_i} \right] + \frac{D'_0(-1)}{D'_1(-1)} = 0. \quad (3.5)$$

Підставивши r_m у (3.4), знайдемо значення найбільшого розкриття берегів зони $\delta u(r_m)$ за даного навантаження, заданого сталою C . Прирівнявши це розкриття критичному значенню, яке відповідає повному розриву міжчастинкових зв'язків на даній ділянці зони передруйнування, приходимо до рівняння $\delta u(r_m) = \delta u_c$, з якого можна визначити навантаження, що відповідає моменту зародження мікротріщини.

Після зародження мікротріщини подальше збільшення навантаження буде супроводжуватися зростанням її довжини. Положення кінців мікротріщини та її довжина визначаються з рівнянь $\delta u(r_{1(2)}) = \delta u_c$ ($0 < r_1 \leq r_m \leq r_2 < l$) і $l_{micro} = r_2 - r_1$ (рис. 2). При цьому слід мати на увазі, що наявність мікротріщини буде істотно впливати на напружено-деформований стан в області зони передруйнування, тому розглянута вище модель зони і знайдений розв'язок задачі про її параметри є коректними лише за виконання умови $l_{micro} \ll l$.

Відзначимо, що в (3.4) – (3.5) підсумовування передбачається за всіма коренями рівняння (3.3), які задовольняють умову $\text{Re } \lambda'_i > -1$; проте в дійсності виявляється, що внаслідок підвищеного рівня напружень в околі вершини тріщини справджується

нерівність $r_m \ll l$, тому достатня точність визначення r_m досягається при врахуванні всього лише 4 – 6 перших коренів, і тільки для відстаней одного порядку з l потрібно в сумі ряду (3.4) брати значно більше доданків.

§4. Аналіз отриманих результатів.

Для числового розрахунку параметрів маломасштабної зони передруйнування зовнішнє навантаження будемо задавати безрозмірним параметром $\sigma = |C|L^\lambda / \sigma_0$. Таблиця і рис. 3 демонструють залежність від навантаження параметрів зони передруйнування і мікротріщини (відносних довжин зони передруйнування $x = l/L$ (рис. 3, а, крива 1) і мікротріщини $x_{micro} = (r_2 - r_1)/L$ (рис. 3, а, крива 2), відстані r_m/L до положення максимального розходження берегів зони (рис. 3, б, крива 1) і нормованого значення цього розходження $\delta\tilde{u}_m = \frac{\delta u(r_m)E_1}{2(1+\nu_1)L\sigma_0}$, положення вершин мікротріщини r_1/L (рис. 3, б, крива 3), r_2/L (рис. 3, б, крива 2)) для окремих значень характеристик з'єднаних матеріалів ($\alpha = 210^\circ$; $E_1/E_2 = 0,5$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $\mu = -1$; нормоване значення критичного розходження $\delta\tilde{u}_c = 1 \cdot 10^{-4}$).

σ	x	r_m/L	$\delta\tilde{u}_m$	r_1/L	r_2/L	x_{micro}
0,002	$8,66 \cdot 10^{-7}$	$6,33 \cdot 10^{-8}$	$1,36 \cdot 10^{-7}$			
0,004	$6,08 \cdot 10^{-6}$	$4,44 \cdot 10^{-7}$	$9,55 \cdot 10^{-7}$			
0,006	$1,90 \cdot 10^{-5}$	$1,39 \cdot 10^{-6}$	$2,98 \cdot 10^{-6}$			
0,008	$4,27 \cdot 10^{-5}$	$3,12 \cdot 10^{-6}$	$6,70 \cdot 10^{-6}$			
0,01	$7,99 \cdot 10^{-5}$	$5,84 \cdot 10^{-6}$	$1,25 \cdot 10^{-5}$			
0,012	$1,33 \cdot 10^{-4}$	$9,74 \cdot 10^{-6}$	$2,09 \cdot 10^{-5}$			
0,014	$2,06 \cdot 10^{-4}$	$1,50 \cdot 10^{-5}$	$3,23 \cdot 10^{-5}$			
0,016	$2,99 \cdot 10^{-4}$	$2,19 \cdot 10^{-5}$	$4,70 \cdot 10^{-5}$			
0,018	$4,17 \cdot 10^{-4}$	$3,05 \cdot 10^{-5}$	$6,55 \cdot 10^{-5}$			
0,02	$5,60 \cdot 10^{-4}$	$4,09 \cdot 10^{-5}$	$8,80 \cdot 10^{-5}$			
0,022	$7,33 \cdot 10^{-4}$	$5,35 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-4}$	$1,18 \cdot 10^{-5}$	$1,50 \cdot 10^{-4}$	$1,38 \cdot 10^{-4}$
0,024	$9,35 \cdot 10^{-4}$	$6,84 \cdot 10^{-5}$	$1,47 \cdot 10^{-4}$	$3,94 \cdot 10^{-6}$	$3,10 \cdot 10^{-4}$	$3,07 \cdot 10^{-4}$
0,026	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$8,56 \cdot 10^{-5}$	$1,84 \cdot 10^{-4}$	$1,69 \cdot 10^{-6}$	$4,98 \cdot 10^{-4}$	$4,96 \cdot 10^{-4}$
0,028	$1,44 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-4}$	$2,27 \cdot 10^{-4}$	$8,16 \cdot 10^{-7}$	$7,20 \cdot 10^{-4}$	$7,19 \cdot 10^{-4}$
0,03	$1,75 \cdot 10^{-3}$	$1,28 \cdot 10^{-4}$	$2,75 \cdot 10^{-4}$	$4,21 \cdot 10^{-7}$	$9,77 \cdot 10^{-4}$	$9,77 \cdot 10^{-4}$

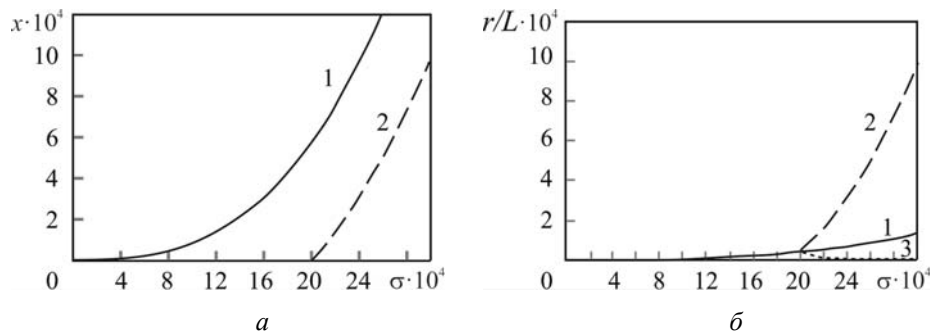


Рис. 3

Розрахунки підтверджують попередній висновок про нелінійне зростання довжини зони передруйнування при збільшенні навантаження, отриманий на основі аналізу формули (3.1) (рис. 3, а, крива 1). Оскільки у прийнятому наближенні величини r_m і l входять у рівняння (3.5) у вигляді відношення, отримуємо, що відстань від вершини первинної тріщини до точки максимального розходження берегів зони r_m (рис. 3, б, крива 1), величина цього розходження $\delta u(r_m)$ (таблиця) та довжина мікротріщини після її утворення l_{micro} (рис. 3, а, крива 2) збільшуються з ростом навантаження прямо пропорційно довжині зони передруйнування: $r_m / l = \text{const}$, $\delta u(r_m) / l = \text{const}$, $l_{micro} / l \approx \text{const}$. При цьому ближній кінець мікротріщини істотно зближується з вершиною початкової тріщини ($r_1 \rightarrow 0$, рис. 3, б, крива 3) і подальші розрахунки стають некоректними через необхідність врахування впливу мікротріщини на напружено-деформований стан в околі вершини і її можливого злиття з початковою тріщиною. Відстань r_2 від вершини первинної тріщини до віддаленого кінця мікротріщини (рис. 3, б, крива 2) зі збільшенням навантаження зростає швидше, ніж r_m , і при досить високих навантаженнях визначає довжину мікротріщин ($r_2 \simeq l_{micro}$).

Згідно з результатами, наведеними у таблиці і на рис. 3, б, порівняно невелике збільшення навантаження супроводжується стрімким зближенням мікротріщини з вершиною первинної тріщини, що призводить до розкриття останньої, подальшого поширення шляхом злиття з мікротріщиною та можливого руйнування кусково-однорідного тіла шляхом його поділу по межі поділу матеріалів. Це припущення дозволяє оцінити граничне навантаження, при якому відбувається зрушення тріщини, за значенням граничного навантаження σ_c , що визначається з умови $\delta u(r_m) = \delta u_c$, якій відповідає зародження мікротріщини.

Рис. 4, а – в демонструють, як залежать від кута зламу межі поділу матеріалів безрозмірне граничне навантаження σ_c та відповідні йому відносні довжина зони передруйнування x_c і відстань $r_{max,c}/L$ до вершини тріщини, на якій утворюється мікротріщина. Розрахунки виконано для параметрів $E_1 / E_2 = 0,5$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\delta \tilde{u}_c = 5 \cdot 10^{-3}$; суцільні лінії відповідають гладкому контакту берегів тріщини ($\mu = 0$), пунктирні – наявності тертя ($\mu = -1$). По мірі збільшення кута зламу в обраному інтервалі значень граничне навантаження зменшується, причому наявність тертя обумовлює більші значення граничного навантаження порівняно з випадком гладкого контакту. Довжина зони передруйнування та відстань від вершини тріщини до місця утворення мікротріщини за наявності тертя також зменшуються зі збільшенням кута зламу, на відміну від випадку гладкого контакту берегів, для якого ці величини мають максимум.

З утворенням зони передруйнування відбувається зміна показника сингулярності напружень біля вершини тріщини. Результати розрахунків коренів рівнянь (1.4) і (3.3) для $\alpha = 210^\circ$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\mu = -1$ подано на рис. 4, з. Вони показують, що наявність зони передруйнування призводить до посилення концентрації напружень: найменший на інтервалі $(-1, 0)$ корінь λ'_1 (крива 1) рівняння (3.3) виявляється за модулем більшим, ніж аналогічний корінь рівняння (1.4) $\lambda_1 \equiv \lambda$ (крива 2). Крім того, у виразі (3.2) для компонент тензора напружень при утворенні зони передруйнування суттєвим є сингулярний доданок з показником сингулярності λ'_2 (крива 3), відмінним від аналогічного показника λ_2 (крива 4) за відсутності зони передруйнування, яким нехтується у граничній умові на нескінченості (1.3). Оскільки $\lambda'_2 < \lambda_2$, це зумовлює додаткове посилення концентрації напружень.

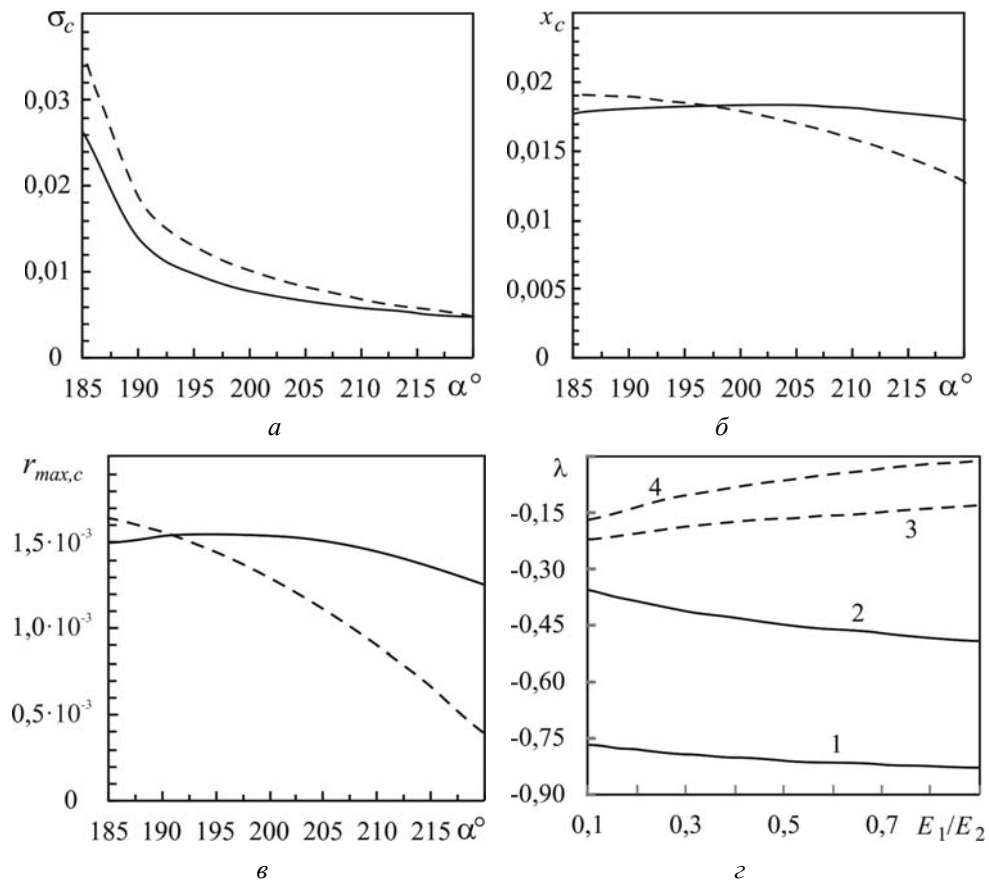


Рис. 4

Утворення зони передруйнування в околі концентратора напружень зазвичай супроводжується розвантаженням матеріалу в цій області. Проте, як зазначено вище, в розглянутій моделі спостерігається зворотний процес – зростання рівня напружень, наслідком якого виявляється зародження і розвиток мікротріщини. Але, крім появи мікротріщини, підвищений рівень напружень зумовлює також і зворотній механізм зниження рівня концентрації напружень, який полягає у деструкції матеріалу в зоні передруйнування безпосередньо біля вершини початкової тріщини. На відміну від описаної вище моделі зони передруйнування, в області деструкції матеріалу (зоні процесу руйнування) високого рівня досягають не лише відривні деформації, але і деформації зсуву. Зокрема, комплексна модель зони передруйнування, яка включає в себе маломасштабну зону деструкції, для міжфазної тріщини на плоскій межі поділу середовищ реалізована в роботах [10, 19]. Власне, поява зони деструкції й спричиняє розкриття тріщини у її вершині та є останнім етапом перед зрушенням початкової тріщини.

Висновки.

Контактна модель міжфазної тріщини, запропонована Комніноу, розв'язала одну з ключових проблем класичної моделі розкритої тріщини – проблему осцилюючої особливості напружень і деформацій. Проте, в рамках контактної моделі постає питання про механізм поширення тріщини як наслідок утворення мікротріщини в частині зони передруйнування з наступним злиттям мікротріщини з початковою тріщиною при збільшенні навантаження. Отримана формула для максимального розходження меж зони передруйнування дає можливість визначення граничного навантаження, яке від-

повідляє зародженню мікротріщини, і яке може бути використано як оцінка граничного навантаження, за якого відбудеться старт початкової тріщини. Однак, в рамках розглянутої моделі залишилось нерозв'язаним питання про розкриття тріщини у її вершині, що є необхідною передумовою її зрушення. Показано, що вирішення цієї проблеми може бути знайдене в рамках комплексної моделі міжфазної тріщини [19] шляхом урахування деструкції матеріалу в частині зони передруйнування, прилеглої до вершини тріщини.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. В умовах плоскої деформації за допомогою методу Вінера – Гопфа знайдено розв'язок задачі про розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі кусково-однорідного тіла в кінці міжфазної тріщини з вершиною у кутовій точці ламаної межі поділу матеріалів і контактом берегів, взаємодіючих за законом сухого тертя. Зона передруйнування моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву з'єднувального матеріалу. Отримано вирази для довжини зони передруйнування, розходження її берегів і локального поля напружень в околі вершини. Запропоновано механізм зрушення початкової тріщини, який передбачає утворення мікротріщини в частині зони передруйнування та її об'єднання з початковою тріщиною при збільшенні навантаження. Виконано числовий аналіз залежності параметрів зони передруйнування, мікротріщини та граничного навантаження від навантаження і параметрів композитного тіла.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: кутова точка межі поділу, міжфазна тріщина, контакт берегів з тертям, зона передруйнування, мікротріщина, зрушення тріщини.

1. Назаренко В.М., Кипніс О.Л. Гранична рівновага кусково-однорідного пружного тіла з міжфазними зсувними тріщинами у кутовій точці межі поділу середовищ // Доп. НАН України. – 2018. – № 3. – С. 36 – 42.
2. Aravas N., Sharma S.M. An elastoplastic analysis of the interface crack with contact zones // J. Mech. Phys. Solids. – 1991. – **39**, N 3. – P. 311 – 344.
3. Audoly B. Asymptotic study of the interfacial crack with friction // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – **48**, N 9. – P. 1851 – 1864.
4. Bogdanov V.L., Kipnis A.L. Investigation of the Fracture of a Semibounded Body Compressed Along a Near-Surface Interface Crack // J. Mathem. Sci. – 2021. – **253**, N 1. – P. 99 – 107.
5. Comninou M. The interface crack // J. Appl. Mech. T. ASME. – 1977. – **44**. – P. 631 – 636.
6. Comninou M., Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear // J. Elasticity. – 1980. – **10**, N 2. – P. 203 – 212.
7. Dudyk M.V., Dikhtyarenko Yu.V. Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media // J. Mathem. Sci. – 2012. – **184**, N 2. – P. 121 – 135.
8. Dudyk M.V., Dikhtyarenko Yu.V. Investigation of the influence of plasticity of materials on the strength of a composite joint // J. Mathem. Sci. – 2014. – **201**, N 1. – P. 83 – 98.
9. Dudyk M.V., Dikhtyarenko Yu.V. Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media // Materials Sci. – 2012. – **47**, N 5. – P. 627 – 635.
10. Dudyk M.V., Kipnis L.A. Model of the structure of the near tip area of interface crack in a piece-homogeneous elastic-plastic body // Strength, Fracture and Complexity. – 2018. – **11**, N 1. – P. 31 – 50.
11. Dundurs J., Gautesen A.K. An opportunistic analysis of the interface crack // Int. J. Fract. – 1988. – **36**. – P. 151 – 159.
12. England A.H. A crack between dissimilar media // J. Appl. Mech. T. ASME. – 1965. – **32**, N 2. – P. 400 – 402.
13. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks // J. Appl. Mech. T. ASME. – 1965. – **32**, N 2. – P. 403 – 410.
14. Gakhov F.D. Boundary Value Problems. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 561 p.
15. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Fracture of materials under compression along cracks. – Ser. Advanced Structured Materials. – **138**. – Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. – XVI+490 p.

16. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed along Cracks (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
17. *Guz A.N.* On Physically Incorrect Results in Fracture Mechanics // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 10. – P. 1041 – 1051.
18. *Herrmann K.P., Loboda V.V.* On interface crack models with contact zone situated in an anisotropic bimaterials // *Arch. App. Mech.* – 1999. – **69**. – P. 317 – 335.
19. *Kamins'kyi A.O., Dudyk M.V., Kipnis L.A.* Investigation of the process zone near the tip of an interface crack in the elastic body in shear within the framework of the complex model // *J. Mathem. Sci.* – 2017. – **220**, N 2. – P. 117 – 132.
20. *Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Kolmakova V.A.* On the Dugdaill Model for a Crack at the Interface of Different Media // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 1. – P. 58 – 63.
21. *Kaminsky A.A.* Studies of Subcritical Crack Growth in Viscoelastic Anisotropic Bodies Using the Continued Fraction Operator Method: Synthesis and Summary // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 3. – P. 266 – 283.
22. *Kaminsky A.A., Dudik M.V., Kipnis L.A.* On the Direction of Development of a Thin Fracture Process Zone at the Tip of an Interfacial Crack between Dissimilar Media // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 2. – P. 136 – 144.
23. *Kaminsky A.A., Dudyk M.V., Fenkiv V.M., Chornoivan Y.O.* On the Scope and Limitations of the Comminou Model for the Crack on the Polygonal Interface // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 4. – P. 32 – 44.
24. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Fracture Process Zone at the Tip of a Mode I Crack in a Nonlinear Elastic Orthotropic Material // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 1. – P. 23 – 40.
25. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Mechanism of Development of the Area of Passive Deformation in a Nonlinear Elastic Orthotropic Body with a Crack // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 4. – P. 402 – 414.
26. *Nazarenko V.M., Kipnis A.L.* Influence of Interface Shear Cracks Located Near the Angular Point of the Interface in a Bi-Homogeneous Body on the Stress State Formed in the Vicinity of this Point // *J. Mathem. Sci.* – 2022. – **261**, N 1. – P. 151 – 161.
27. *Needleman A.* An analysis of decohesion along an imperfect interface // *Int. J. Fract.* – 1990. – **42**, N 1. – P. 21 – 41.
28. *Noble B.* Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for the solution of partial differential equations, 2nd ed. – New York: Chelsea Pub. Co., 1988. – 246 p.
29. *Rice J.R., Sih G.C.* Plane problems of cracks in dissimilar media // *J. Appl. Mech. T. ASME.* – 1965. – **32**, N 2. – P. 418 – 423.
30. *Shih C.F., Asaro R.J.* Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I – Small Scale Yielding // *J. Appl. Mech.* – 1988. – **55**. – P. 299 – 316.
31. *Shih C.F., Asaro R.J.* Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part II – Structure of Small-Scale Yielding Fields // *J. Appl. Mech.* – 1989. – **56**. – P. 763 – 779.
32. *Theocaris P.S., Gdoutos E.E.* Stress singularities in cracked composite full-planes // *Int. J. Fract.* – 1977. – **13**, N 6. – P. 763 – 773.
33. *Tvergaard V.* Predictions of mixed mode interfacial crack growth using a cohesive zone model for ductile fracture // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2004. – **52**. – P. 925 – 940.
34. *Williams M.L.* The stresses around a fault or crack in dissimilar media // *Bulletin of the Seismological Soc. of America.* – 1959. – **49**. – P. 199 – 204.

Надійшла 28.12.2021

Затверджена до друку 19.07.2022