

П.З.Луговий, С.П.Орленко

ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ СФЕРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ДИСКРЕТНО-СИМЕТРИЧНИМ ЛЕГКИМ АРМОВАНИМ РЕБРАМИ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
м. Київ, Україна, email: plugovyy@inmech.kiev.ua*

Abstract. The dynamics of three-layer spherical shells with discrete-symmetric light, reinforced with ribs aggregate under non-stationary loads was studied. In the analysis of the elements of the elastic structure, the model of the theory of shells and rods by Timoshenko under independent static and kinematic hypotheses for each layer was used. The equation of motion of three-layer spherical shells with a discrete-symmetric lightweight, rib-reinforced filler under axisymmetric impulse loading is obtained according to the Hamilton-Ostrogradsky variational principle. Numerical results of the nature of vibrations of a three-layer elastic structure obtained by the finite element method. The effect of geometrical and physical-mechanical parameters of the symmetric layers of the shell on its dynamic behavior under axisymmetric internal impulse loading was investigated and new mechanical effects were revealed.

Key words: dynamics, three-layer spherical shell, discrete-symmetric lightweight aggregate, reinforcing ribs, non-stationary load, stress-strain state, mechanical phenomena.

Вступ.

Широке використання шаруватих конструкцій при створенні сучасних надзвукових (гіперзвукових) літальних апаратів і багаторазових космічних транспортних систем спостерігається в останні роки і активізується в даний час. Ефективна несуча здатність тришарових оболонкових конструкцій робить їх дуже корисними в різних інженерних додатках. Безперервна розробка нових конструкційних матеріалів призводить до все більш складних структурних конструкцій, що вимагають ретельного аналізу. В літературі є достатня кількість робіт по дослідженню різними методами динаміки шаруватих оболонок з підкріпленнями і технічними особливостями [8 – 10, 13, 14, 19]. Однак, останнім часом, створення прогресивних технологій, об'єктів спеціального призначення і т.д. часто призводить до необхідності розробки конструктивних тришарових оболонкових елементів із заповнювачем ускладненої геометричної структури. При цьому зазначені елементи піддаються динамічним навантаженням різного виду, в тому числі нестационарним навантаженням. Питання динамічної поведінки таких оболонок вивчені недостатньо [6]. Подібні питання динаміки тришарових оболонок розглянуті в роботах [3, 12, 16, 17].

В даній роботі розглядаються тришарові сферичні оболонки з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем. Армуючі ребра розташовані по лініях головних кривизн і з'єднують несучі шари. Відстані між армуючими ребрами значно більші від розмірів їх поперечних перетинів. В такому випадку доцільно застосовувати теорію шаруватих оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів. Це підвищує загальний порядок системи рівнянь, але дозволяє детальніше вивчити динамічну поведінку тришарової структури при вимушених динамічних навантаженнях. Дослідженню динаміки шаруватих сферичних оболонок присвячена значна кількість робіт [1, 2, 17, 20]. Початок досліджень динаміки тришарових оболо-

нок з дискретно неоднорідним заповнювачем при нестационарних навантаженнях покладено в роботах [3, 15, 18, 20], в яких відповідні задачі розв'язані методом скінченних різниць. Наявність легкого заповнювача, розташованого між несучими шарами і армуючими ребрами, суттєво ускладнює задачу. Тому для дослідження динаміки тришарових оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем застосований скінченно-елементний метод [12, 16].

В основу розв'язування задачі покладена теорія оболонок і стержнів, заснована на зсувній моделі Тимошенка з використанням незалежних статичних і кінематичних гіпотез до кожного шару. Для виведення рівнянь коливань тришарової неоднорідної за товщиною структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського. Чисельне моделювання динаміки тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем проведено скінченно-елементним методом. Наведені числові результати досліджень конкретних задач і виявлені нові механічні ефекти.

§1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Тришарова сферична оболонка з легким заповнювачем, армованим дискретно симетричними ребрами, являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішнього (індекс 1), зовнішнього (індекс 2) несучих шарів, легкого заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), жорстко з'єднаних з зазначеними несучими шарами. Оболонка має постійну загальну товщину h і віднесена до координат α, z . Координатна лінія $R\alpha$ на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ збігається з твірною лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединних поверхонь. Будемо вважати величину z додатною, якщо точка знаходиться з боку опуклості серединної поверхні. Оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами і легким заповнювачем. Вид деформованого стану внутрішнього і зовнішнього несучих шарів може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\overline{U}_1 = (u_s^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ і $\overline{U}_2 = (u_s^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$ [5]. Поля переміщень для легкого ребристого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщення $\overline{U}_t = (u_s^t, u_3^t, \varphi_1^t)^T$ згідно моделі, запропонованої в [7]. Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні записуються наступним чином: $A_1 = A_2 = R_i, \quad k_1 = k_2 = 1/R_i$.

Деформований стан армуючого ребра, спрямованого вздовж колової координати, будемо визначати узагальненим вектором переміщень $\overline{U}_j = (u_1^j, u_3^j, \varphi_1^j)^T$. Виходячи з припущень жорсткого з'єднання армуючих ребер із сферичними несучими шарами, записуються умови контакту центрів ваги ребер з несучими шарами [18]

$$u_1^j = u_1^{jk}(s_j) \mp \frac{H_j}{2} \varphi_1^{jk}(s_j); \quad u_3^j = u_3^{jk}(s_j); \quad \varphi_1^j = \varphi_1^{jk}(s_j) \quad (k = 1, 2), \quad (1.1)$$

де $s_j = R\alpha_j$ – координата лінії множин точок проєкцій центрів тяжіння поперечних перерізів j -го ребра на відповідну серединну поверхню несучого шару; $h_j = H_j$ – товщина легкого заповнювача. При цьому: $h_j^i = 0,5h_i + H_i/2$, $h_i (i=1, 2)$ – товщини сферичних несучих шарів; $H_i/2$ – відстань від осі j -го ребра до поверхні гладких оболонок.

На основі теорії деформації зсуву в оболонках [5] переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах в напрямку α (поздовжній), z (товщина) і t (час) при малих лінійних переміщеннях виражаються через наступні залежності:

$$\begin{aligned} u_1^i(s, z, t) &= u_0^i(s, t) + z_i \varphi_1^i(s, t); \\ u_3^i(s, z, t) &= u_{03}^i(s, t) \quad (i=1, 2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де φ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

При цьому деформаційні співвідношення для несучих шарів і j -го ребра приймаються у вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^i &= \frac{\partial u_0^i}{\partial s_i} + \frac{u_{03}^i}{R_i}; \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_0^i}{R_i} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{u_{03}^i}{R_i}; \quad \varepsilon_{13}^i = \varphi_1^i; \\ \kappa_{11}^i &= \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial s_i}; \quad \kappa_{22}^i = \frac{\varphi_1^i}{R_i} \operatorname{ctg} \alpha; \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Вирази для переміщень легкого заповнювача записуються згідно моделі [7]:

$$\begin{aligned}u_1^t(s, z, t) &= \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(s, t) + z_t u_1^t(s, t); \\ u_3^t(s, z, t) &= u_{03}^t(s, t).\end{aligned}\quad (1.4)$$

Кінематичні залежності для заповнювача прийняті з врахуванням малості деформацій:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^t &= \frac{1}{(1 + z_t/R_t)} \left(\frac{\partial u_0^t}{\partial s} + \frac{u_{03}^t}{R_t} \right); \quad \varepsilon_{22}^t = \frac{u_3^t}{R_t + z_t}; \\ 2\varepsilon_{13}^t &= \frac{1}{(1 + z_t/R_t)} \left(\frac{\partial u_{03}^t}{\partial s} - \frac{u_0^t}{R_t} \right) + u_1^t.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Умови сумісності, які передбачають ідеальне сполучення між заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування, представлено в наступному вигляді [11]:

$$\begin{cases} u_1^t(z = z_t^1) = u_0^t + \frac{1}{2}(-1)^k h_t \varphi_1^t; & \left\{ \begin{array}{l} \text{для } i = 1 \rightarrow (k = 0; z_t^1 = -h_t/2); \\ \text{для } i = 2 \rightarrow (k = 1; z_t^2 = h_t/2). \end{array} \right. \\ u_{03}^t = u_{03}^t; \end{cases}\quad (1.6)$$

Використовуючи вирази для поля переміщень для несучих шарів (1.1), легкого заповнювача (1.3) і умов міжшарової неперервності переміщень (1.5), виведемо спрощені умови сумісності

$$\begin{aligned}u_0^t &= \frac{u_0^1 + u_0^2}{2} - \frac{1}{4}(h_2 \varphi_1^2 - h_1 \varphi_1^1); \\ u_1^t &= \frac{u_0^1 - u_0^2}{h_t} - \frac{1}{2h_t}(h_2 \varphi_1^2 + h_1 \varphi_1^1); \\ u_{03}^t &= \frac{1}{2}(u_{03}^1 + u_{03}^2).\end{aligned}\quad (1.7)$$

Рівняння руху для несучих шарів і легкого заповнювача виводяться з використанням варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського, згідно з яким

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (1.8)$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу. При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер і заповнювача з легкого матеріалу.

Вирази для варіацій повної потенціальної і кінетичної енергії вказаних компонентів записуються у вигляді:

$$\delta\Pi = \delta\sum_{i=1}^2\Pi^i + \delta\sum_{j=1}^J\Pi^j + \delta\sum_{S_i}\Pi^t; \quad \delta K = \delta\sum_{i=1}^2K^i + \delta\sum_{j=1}^JK^j + \delta\sum_{S_i}K^t, \quad (1.9)$$

де

$$\delta\Pi^i = \int_{S_i} \left[\int_{-h_i/2}^{h_i/2} \left(T_{11}^i \delta\varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta\varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta\varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta\kappa_{11}^i + M_{22}^i \delta\kappa_{22}^i \right) dz_i \right] dS_i; \quad (1.10)$$

$$\delta\Pi^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h_i/2}^{h_i/2} \left(T_{11}^t \delta\varepsilon_{11}^t + T_{22}^t \delta\varepsilon_{22}^t + T_{13}^t \delta\varepsilon_{13}^t + M_{11}^t \delta\kappa_{11}^t + M_{22}^t \delta\kappa_{22}^t \right) dz_t \right] dS_i; \quad (1.11)$$

$$\delta\Pi^j = \int_{L_j} \left(T_{11j} \delta\varepsilon_{11j} + T_{22j} \delta\varepsilon_{22j} + T_{13j} \delta\varepsilon_{13j} + M_{11j} \delta\kappa_{11j} \right) dL_j; \quad (1.12)$$

$$\delta K^i = \int_{S_i} \left\{ \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \delta u_1^i + \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2} \delta u_3^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \delta \varphi_1^i \right) \right] dz_i \right\} dS_i; \quad (1.13)$$

$$\delta K^t = \int_{S_i} \left[\int_{-h_i/2}^{h_i/2} \rho_t h_i \left(\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2} \delta u_0^t + \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2} \delta u_1^t + \frac{h_t^2}{12} \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2} \delta u_{03}^t \right) dz_t \right] dS_i; \quad (1.14)$$

$$\delta K^j = \int_{L_j} \left[\rho_j F^j \left(\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial t^2} \delta u_1^j + \frac{\partial^2 u_3^j}{\partial t^2} \delta u_3^j \right) + \rho_j \left(I_{kr}^j \frac{\partial^2 \varphi_1^j}{\partial t^2} \delta \varphi_1^j \right) \right] dL_j. \quad (1.15)$$

В рівняннях (1.10) – (1.15) величини F^j, I_{kr}^j відповідають геометричним характеристикам поперечних армуючих ребер; ρ_j – питома вага матеріалу армуючого ребра; ρ_i, ρ_t – питома вага матеріалів несучих шарів і легкого заповнювача, відповідно.

Вважається, що тришарова сферична структура навантажена внутрішнім осесиметричним розподіленим нестационарним нормальним навантаженням $P_1(s, t)$, де s і t – просторова і часова координати.

Слід зазначити, що при розрахунку потенціальної і кінетичної енергії для легкого заповнювача в виразах $\delta\Pi^t$ та δK^t інтегрування проводиться за об'ємом, величина якого збільшена на величину обсягу армуючих ребер. Але цей факт практично не впливає на загальну похибку теорії оболонок, оскільки обсяг армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для тришарових оболонок обертання менше 5%.

Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянні (1.8), з урахуванням співвідношень (1.10) – (1.15), отримаємо систему гіперболічних рівнянь руху 9-го порядку для тришарової сферичної оболонки з легким заповнювачем армованим дискретними ребрами при осесиметричному імпульсному навантаженні і відповідні граничні та початкові умови:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{11}^i) - \frac{1}{R_i} (\operatorname{ctg} \alpha T_{22}^i - T_{13}^i) - \frac{1}{R_i} T_{13}^i &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{13}^i) - \frac{1}{R_i} (T_{11}^i + T_{22}^i) - \frac{1}{R_i h_i} (M_{11}^i + M_{22}^i) + P_3 &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha M_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_i} M_{22}^i - T_{13}^i &= \frac{\rho_i h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha T_{11}^t) + \frac{1}{R_t} (T_{11}^i - T_{13}^i) + \frac{8}{h_t^2} M_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^i}{\partial t^2}; \\
\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha M_{11}^t) - T_{13}^i + \frac{1}{R_{t1}} M_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\
\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha T_{13}^t) - \frac{1}{R_t} (T_{11}^i + T_{22}^i) &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2};
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\left[T_{11}^{i\pm} \right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad \left[T_{13}^{i\pm} \right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad \left[M_{11}^{i\pm} \right]_j = \rho_j I_{kj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}.$$

Ці рівняння коливань тришарових пружних структур описуються двома системами гіперболічних рівнянь дев'ятого порядку, які утворюються за рахунок врахування розривних коефіцієнтів «несучі шари-армуючі елементи».

На лініях розривів в рівняннях коливань (1.16) $\left[T_{11}^{i\pm} \right]_j$; $\left[T_{13}^{i\pm} \right]_j$; $\left[M_{11}^{i\pm} \right]_j$ – відповідають зусиллям і моментам, які діють на j -й дискретний елемент з боку несучих шарів.

Співвідношення між величинами зусиль і моментів та відповідними величинами деформацій для несучих шарів і армуючих ребер мають вигляд

$$\begin{aligned}
T_{11}^i &= \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2} (\varepsilon_{11}^i + \nu_i \varepsilon_{22}^i); \quad T_{22}^i = \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2} (\varepsilon_{22}^i + \nu_i \varepsilon_{11}^i); \quad T_{13}^i = k^2 G_{13}^i \varepsilon_{13}^i \quad (i = 1, 2); \\
M_{11}^i &= \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)} (\kappa_{11}^i + \nu_i \kappa_{22}^i); \quad M_{22}^i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)} (\kappa_{22}^i + \nu_i \kappa_{11}^i); \\
T_{22j} &= E_j F_j \varepsilon_{22j},
\end{aligned} \tag{1.17}$$

E_i, G_{13}^i, ν_i – фізико-механічні параметри матеріалу несучих шарів; k^2 – інтегральний коефіцієнт поперечного зсуву теорії пластин та оболонок; E_j, F_j – модуль пружності матеріалу і площа поперечного перетину j -го ребра, відповідно.

Зусилля і моменти для легкого заповнювача можна визначити наступним чином:

$$T_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t} \right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad T_{13}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \sigma_{13}^t dz_t; \quad M_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_t} \right) \sigma_{11}^t dz_t. \tag{1.18}$$

Рівняння коливань (1.16) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

§2. Числові результати.

Розглянуто задачу динамічного деформування тришарового сферичного куполу. В даному випадку задача розв'язувалася на просторовому інтервалі $[-\pi/2, \pi/2]$. В силу симетрії відносно вершини сфери при $\alpha = 0$ розглядався інтервал $[0, \pi/2]$. У вершині сфери присутня особливість, необхідність розкриття якої дозволила записати граничні умови при $\alpha = 0$ у наступному вигляді:

$$u_1^i = \varphi_1^i = 0; \quad 2 \frac{\partial T_{13}^i}{\partial s} - P_3(s_0, t) \delta_{2i} = \rho h \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}; \tag{2.1}$$

при $\alpha = \pi/2$ (жорстке защемлення):

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{2.2}$$

У формулах (2.1) δ_{2i} – символ Кронекера.

Зовнішнє навантаження $P_1(s, t)$ задавалося у вигляді:

$$P_1(s, t) = \begin{cases} A(1-t/T), & (0 \leq t \leq T); \\ 0, & (t > T), \end{cases} \quad (2.3)$$

де $A = 10^6$ Па; $T = R_1/c = 5 \cdot 10^{-5}$ с.

Початкові умови нульові для несучих шарів при $t = 0$:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0; \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (2.4)$$

Відповідна початково-крайова задача (1.16), (2.1) – (2.4) розв'язується за допомогою скінченно-елементного методу. Створена скінченно-елементна модель оболонки відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в тілі з потенціалом прикладених сил:

$$\Pi = E - W, \quad (2.5)$$

де E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал прикладених сил.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (2.5) набуває вигляду:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (2.6)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.7)$$

відповідають співвідношенням

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; \quad \{F\} = -\sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}.$$

Розрахунки проводилися при таких же геометричних і фізико-механічних параметрах, як і для розрахунків методом скінченних різниць тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним заповнювачем [3]:

$$E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu_j = \nu_1^1 = \nu_1^2 = 0,3; \quad \rho_1^1 = \rho_1^2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$h_1 = h_2 = 0,01 \text{ м}; \quad h_j = 2h_2; \quad R_1 = 0,3 \text{ м}; \quad F_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad h/R = 0,13.$$

Фізико-механічні параметри для легкого заповнювача наступні: $E_{1,2}/E_t = 50$;

$$E_{1,2}/E_t = 500; \quad \rho_t = 25 \text{ кг/м}^3; \quad \nu_t = 0,33.$$

Дискретні підкріплюючі ребра (паралелі) знаходились в точках

$$\alpha_k = [41 + 40(k-1)]\Delta\alpha_1, \quad k = \overline{1, 3}.$$

При застосуванні скінченно-елементного методу в моделях був використаний тривимірний об'ємний скінченний елемент, який гарантує точність і достовірність отриманих результатів [4].

Створена скінченно-елементна модель півсфери з трьома ребрами (рис. 1, а – д) включала 32240 скінченних елементів і 49680 вузлів. На всіх цих рисунках зображені поперечні перетини в площині ХZ. На рис. 1, а представлено модель півсфери з трьома ребрами і пінопластом. На рис. 1, б представлена модель пінопласту. На рис. 1, в представлено модель внутрішнього несучого шару. На рис. 1, г представлено модель трьох ребер. На рис. 1, д – зовнішнього несучого шару.

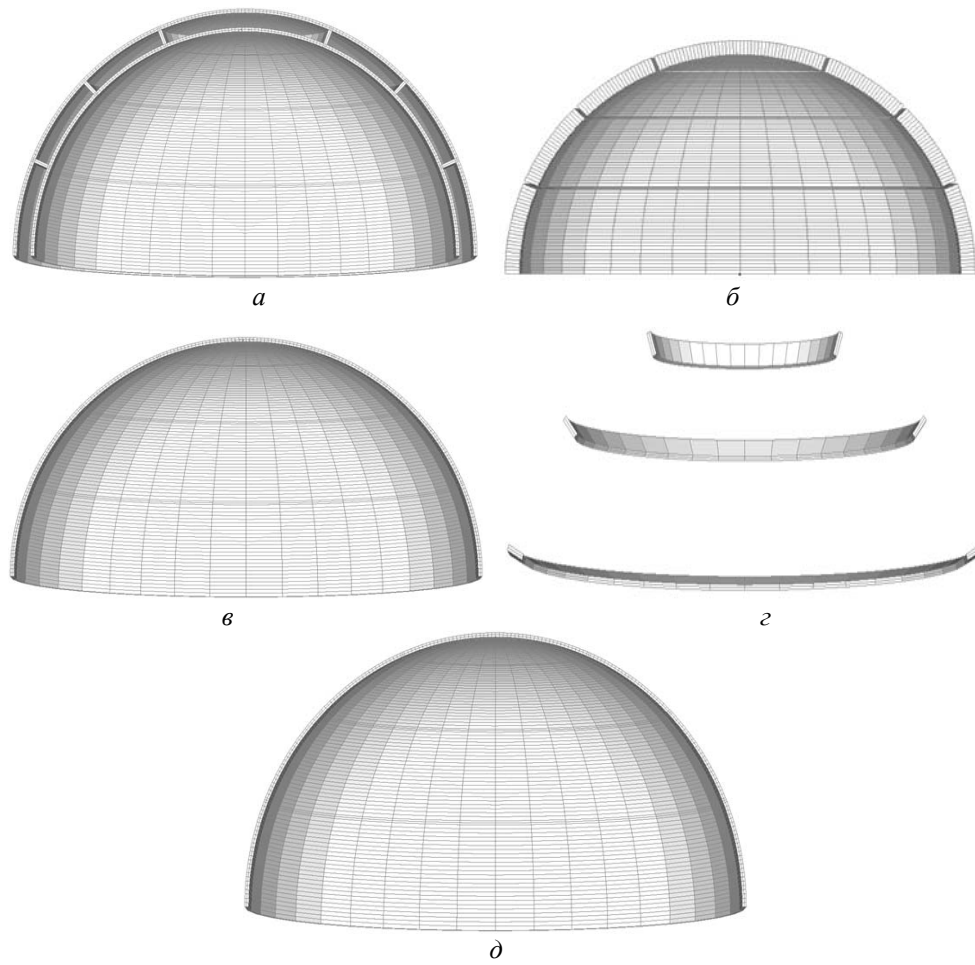


Рис. 1

Отримані числові результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану тришарової пружної структури сферичного типу в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \leq t \leq 40T$). На рис. 2 наведено залежності величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α . Тут і в подальших графіках крива 1 відповідає величині u_3^1 внутрішнього несучого шару сферичної оболонки, а крива 2 – величині u_3^2 зовнішнього несучого шару сферичної оболонки в момент часу $t = 1,92T$ (час досягнення мак-

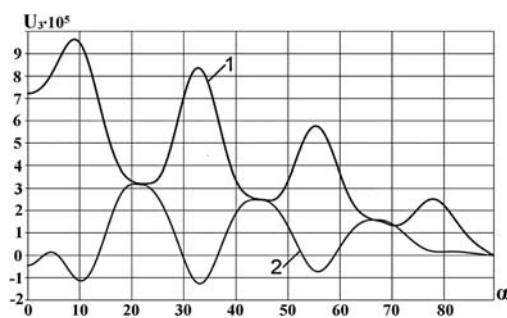


Рис. 2

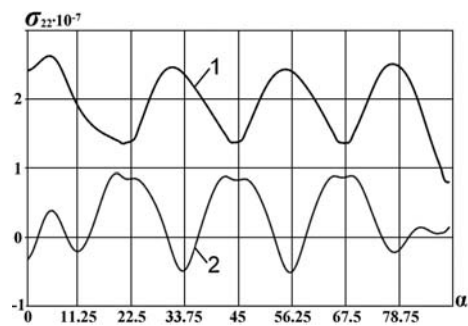


Рис. 3

симального значення величин $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$). Легкий заповнювач відсутній. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. З представлено графічного матеріалу можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величин $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ за просторовою координатою. Перша власна частота конструкції становить 1441 Гц.

На рис. 3 введеному масштабі наведено залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α . Крива 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішнього несучого шару сферичної оболонки, а крива 2 – величині σ_{22}^2 зовнішнього несучого шару сферичної оболонки в момент часу $t = 1,92 T$ (час досягнення максимального значення величин $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$). Легкий заповнювач відсутній.

Точки зближення кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представлено графічного матеріалу, можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величин $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$. Перша власна частота конструкції – 1441 Гц.

На рис. 4 введеному масштабі наведено залежності величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α . Крива 1 відповідає величині u_3^1 внутрішнього несучого шару сферичної оболонки, а крива 2 – величині u_3^2 зовнішнього несучого шару сферичної оболонки в момент часу $t = 1,53 T$ (час досягнення максимального значення величин $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$). Відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності легкого заповнювача $E_{1,2}/E_t = 50$. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Графічний матеріал також візуально дозволяє визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величин u_3^1 і u_3^2 за кутовою координатою α . Перша власна частота конструкції – 1516 Гц.

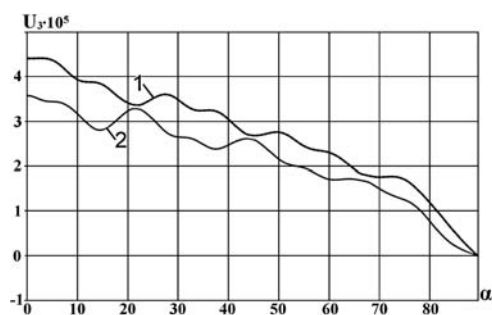


Рис. 4

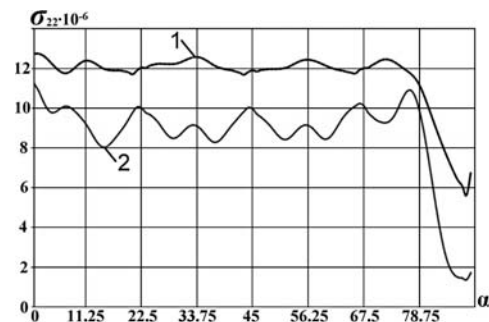


Рис. 5

На рис. 5 введеному масштабі наведено залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α . $E_{1,2}/E_t = 50$. Крива 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішнього несучого шару сферичної оболонки, а крива 2 – величині σ_{22}^2 зовнішнього несучого шару сферичної оболонки в момент часу $t = 1,53 T$ (час досягнення максимального значення величин

$\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$). З цього рисунку також візуально можна визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 за просторовою координатою α . Перша власна частота конструкції – 1516 Гц.

На рис. 6 введеному масштабі наведено залежності величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α . Крива 1 відповідає величині u_3^1 внутрішнього несучого шару сферичної оболонки, а крива 2 – величині u_3^2 зовнішнього несучого шару сферичної оболонки в момент часу $t = 1,6T$ (час досягнення максимального значення величин $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$). $E_{1,2}/E_t = 500$. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Графічний матеріал на цьому рисунку також візуально дозволяє визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величини $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ за просторовою координатою α . Перша власна частота конструкції – 1492 Гц.

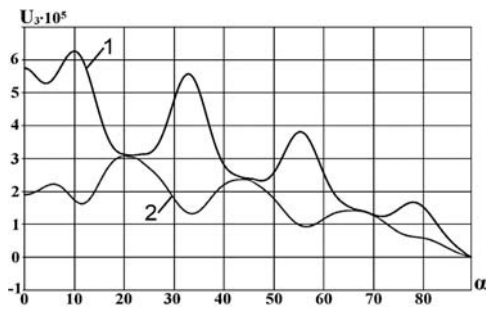


Рис. 6

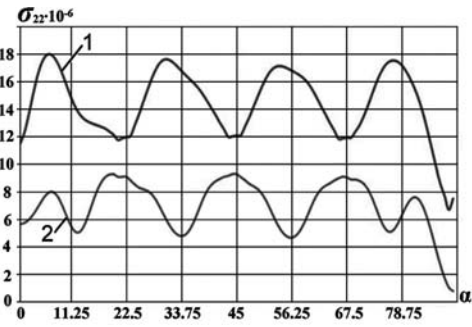


Рис. 7

На рис. 7 введеному масштабі наведено залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α . Крива 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішнього несучого шару сферичної оболонки, а крива 2 – величині σ_{22}^2 зовнішнього несучого шару сферичної оболонки в момент часу $t = 1,6T$ (час досягнення максимального значення величин $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$). Відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності легкого заповнювача $E_{1,2}/E_t = 500$. Аналіз графічного матеріалу дозволяє визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величини σ_{22}^1 і σ_{22}^2 за просторовою координатою. Перша власна частота конструкції – 1492 Гц.

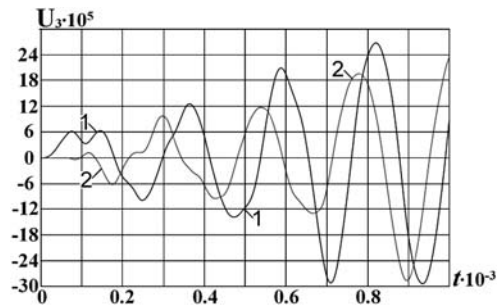


Рис. 8

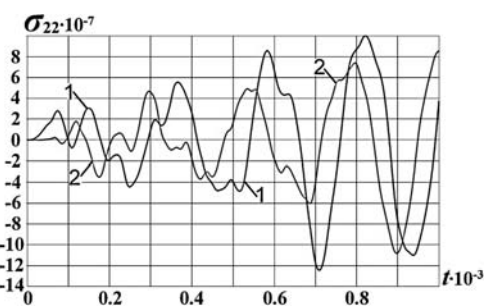


Рис. 9

На рис. 8 приведено залежності величин нормальних прогинів в серединних поверхнях внутрішнього $u_3^1(1)$ і зовнішнього $u_3^2(2)$ несучих шарів, а на рис. 9 – нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ від часу симетричної тришарової сферичної оболонки з дискретно-симетричним заповнювачем у її вершині при дії імпульсного навантаження. Легкий заповнювач відсутній. Індексом 1 позначені величини внутрішнього несучого шару, індексом 2 – зовнішнього несучого шару.

Зауважимо, що графіки на рис. 8 і 9 добре узгоджуються з відповідними графіками, наведеними в роботі [14].

Висновки.

В статті для тришарових сферичних оболонок застосовано незалежні статичні і кінематичні гіпотези Тимошенка для кожного шару. Це збільшило порядок системи розв'язувальних рівнянь коливань тришарових структур з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем, але дало можливість більш детально дослідити динамічні процеси в таких оболонках. З проведених розрахунків методом скінченних елементів випливає, що геометричні і фізико-механічні параметри шарів оболонки значно впливають на кількісні і якісні характеристики коливань в тришарових сферичних оболонках. Враховуючи, що вихідна задача є багатопараметричною (в різні моменти часу t кінематичні та силові параметри приймають різні значення за координатою s), в подальшому будемо розглядати залежності вихідних величин в моменти часу досягнення ними максимальних значень.

В симетричній тришаровій сферичній оболонці без пінопласту максимальні прогини внутрішнього несучого шару u_3^1 дорівнюють $9,6 \cdot 10^5$ м, а в тришаровій оболонці з пінопластом $E_{1,2}/E_t = 50$ вони зменшуються в 2,18 рази і перша власна частота збільшується в порівнянні з тришаровою сферичною оболонкою без пінопласту на 5,2%. В тришаровій сферичній оболонці з пінопластом $E_{1,2}/E_t = 500$ максимальні прогини u_3^1 зменшуються в 1,52 рази і перша власна частота збільшується в порівнянні з тришаровою сферичною оболонкою без пінопласту на 3,5%.

В симетричній тришаровій сферичній оболонці без пінопласту максимальні прогини зовнішнього несучого шару u_3^2 дорівнюють $3,2 \cdot 10^5$ м, а в тришаровій оболонці з пінопластом $E_{1,2}/E_t = 50$ вони збільшуються на 12,5%. В тришаровій сферичній оболонці з пінопластом $E_{1,2}/E_t = 500$ максимальні прогини u_3^2 залишаються майже незмінними в порівнянні з тришаровою оболонкою без пінопласту.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено динаміку тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при нестационарних навантаженнях. Для аналізу оболонкових елементів пружної структури була використана модель теорії оболонок і стержнів Тимошенка за незалежних статичних і кінематичних гіпотез для кожного шару. Рівняння руху тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким армованим ребрами заповнювачем при осесиметричному імпульсному навантаженні отримано згідно варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Числові результати характеру коливань тришарової пружної структури отримано методом скінченних елементів. Досліджено вплив геометричних і фізико-механічних параметрів симетричних шарів оболонки на її динамічну поведінку при осесиметричному внутрішньому імпульсному навантаженні і виявлені нові механічні ефекти.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динаміка, тришарова сферична оболонка, дискретно-симетричний легкий заповнювач, армуючі ребра, нестационарне навантаження, напружено-деформований стан, механічні явища.

1. *Лычев С.А., Сайфутдинов Ю.Н.* Динамика трехслойной непологой сферической оболочки // Механика предельного состояния. Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 2007. № 2. – С. 54 – 90.
2. *Лычев, С.А, Сидоров Ю.А.* Нестационарные колебания трехслойных сферических оболочек с кратным спектром // Изв. вузов. Строительство. – 2001. – № 4. – С. 31 – 39.
3. *Орленко С.П.* Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем // Доп. НАН України. – 2020. – № 3 – С. 19 – 27.
4. *Рычков С.П.* Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran.– Москва: ДМК Пресс, 2013.– 784 с.
5. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
6. *Успехи механики:* (под общей редакцией А.Н. Гузя): в 6-ти томах. Т.3. *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек. – Киев: «А.С.К.», 2007. – С. 141 – 175.
7. *Frostig Y., Thomsen O.T.* Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**. – P. 1697 – 1724.
8. *Hause T., Librescu L.* Postbuckling of anisotropic flat and doubly-curved sandwich panels under complex loading conditions // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, N 23. – P. 3007 – 3027.
9. *Hause T., Librescu L.* Dynamic response of doubly-curved anisotropic sandwich panels impacted by blast loadings // Int. J. Solids Struct. – 2007. – **44**, N 20. – P. 6678 – 6700.
10. *Hohe J., Librescu L.* Nonlinear theory for double-curved anisotropic sandwich shells with cross-compressed cores // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**, N 5. – P. 1059 – 1088.
11. *Kheirikhah M.M., Khalili S.M.R., Malekzadeh Fard K.* Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory // European J. of Mechanics A/Solids. – 2011. – **31** – P. 54 – 66.
12. *Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Skosarenko Yy.V., Kotenko K.E.* Stress-Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core under Nonstationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 4. – P. 395 – 404.
13. *Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamics of Inhomogeneous Shell Systems under Nonstationary Loading (Survey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 481 – 537.
14. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S. P.* Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution Under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 22 – 32.
15. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Orlenko S.P.* Numerical Simulation of the Dynamics of Spherical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Ribs Under a Shockwave // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 5. – P. 590 – 598.
16. *Lugovyi P.Z., Orlenko S.P.* Effect of the Asymmetry of Cylindrical Sandwich Shells on Their Stress-Strain State under Non-Stationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 5. – P. 543 – 553.
17. *Malekzadeh Fard K., Livani M., Veisi A., Gholami M.* Improved high-order bending analysis of double curved sandwich panels subjected to multiple loading conditions // Latin American J. Solids Struct. – 2014. – **11**. – P. 1591 – 1614.
18. *Meish V.F., Shtantsel S E.* Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 12. – P. 1501 – 1507.
19. *Mueller W., Grigorenko Y.M., Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G.* Mechanics of Anisotropic Heterogeneous Shells: Fundamental Relations for Different Models. From book «Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory : General Theory and Applications of Classical Theory». Volume 1. (electronic resource). 2016.
20. *Shul'ga N.A., Meish V.F.* Forced Vibration of Three-Layered Spherical and Ellipsoidal Shells under Axisymmetric Loads // Mechanics of Composite Materials. – 2003. – **39**, N 5. – P. 439 – 446.

Надійшла 30.11.2021

Затверджена до друку 19.07.2022