

Я. Я. Рушицький, В. М. Юрчук

**КОМП'ЮТЕРНИЙ АНАЛІЗ ПОВІЛЬНИХ І ШВИДКИХ ХВИЛЬ
В КОМПОЗИТНОМУ МАТЕРІАЛІ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Гесстєрова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua*

Abstract. The new specificities of slow and fast modes of a plane wave in a composite are analyzed. The composite is modelled by the linear structural model of the elastic mixture. For the first time, the quantitative estimates of specificities of the wave modes in the concrete composites are proposed. The answers to four questions are given and commented: 1. Are the modes dispersive over the entire frequency range allowed for the mixture model? 2. What is the difference between the velocities of modes for the real composites? 3. In which frequency ranges a transition from the in-phase oscillations of the modes propagating in the separately taken component of the composite to the anti-phase ones occurs? 4. In which frequency ranges a transition from the in-phase oscillations of particles of both components of the composite to the anti-phase ones occurs? For the computer analysis, eight composites are selected for which the full set of physical constants is shown. The answers are based on the constructed 3 groups of graphs (each group contains 16 graphs for 8 selected materials) of dependencies “wavenumber – frequency”, “phase velocity – frequency”, “amplitude multipliers – frequency”.

Key words: composite material, theory of mixtures, wave modes, computer analysis.

Вступ.

Розвиток механіки композитних матеріалів радикально вплинув на деякі стереотипи класичної механіки матеріалів [13]. Це пов'язано з тим, що чітко виражена внутрішня структура композитів призвела до необхідності застосування різних структурних континуальних теорій до опису деформації. Особливо яскраво ця потреба проявилася в теорії поширення хвиль [1, 2, 3 – 5, 7, 11 – 16].

До початку наукового і промислового інтересу до композитних матеріалів в класичній механіці матеріалів розвивався стереотип про існування для кожного матеріалу певного паспорта щодо властивостей матеріалу (повного набору фізичних властивостей матеріалу). В основному це були матеріали з пружними фізичними властивостями, а стандартний паспорт включав значення густини і пружних параметрів (два для ізотропних матеріалів, п'ять для поперечно ізотропних матеріалів і так далі). Особливістю паспорта стала постійність його даних (незалежність від внутрішньої структури матеріалу).

Можна сказати, що існувала підсвідома віра в те, що матеріальні константи є річчю самі по собі (das Ding an sich за І. Кантом) і не повинні залежати від вибору моделі матеріалу.

В рамках цього стереотипу матеріали вивчалися теоретично на основі двох теорій – теорії пружності з усередненими постійними параметрами (теорія 1) і кусково-однорідної теорії пружності, в якій кожна однорідна частина матеріалу (кусок) також описується постійними параметрами (теорія 2).

Експериментальні спостереження гармонічних хвиль в композитних матеріалах показали, що довжина хвилі відіграє важливу роль у виявленні певних нових хвильових ефектів. Тут класичний стереотип перестав діяти – теорія 1 (континуальна теорія) придатна для аналізу довгих хвиль, а теорія 2 (дискретно-континуальна теорія) – коротких хвиль.

Слід нагадати, що довгі хвилі характеризуються відношенням довжини хвилі до характерної довжини внутрішньої будови матеріалу, яке складає сотні і більше разів, в той час як для коротких це відношення менше одного порядку.

Аналіз композитних матеріалів зламав цей стереотип і показав, що композити демонструють нові хвильові властивості для хвиль, які вже не довгі і ще не короткі. Це можна описати структурними континуальними теоріями, в яких характерні параметри залежать від характерного розміру внутрішньої структури матеріалу. Прикладами таких теорій є теорія енергетичної континуалізації, теорія ефективної жорсткості та теорія сумішей [13 – 15]. Термін «структурна теорія» тут використовується тому, що механічні константи цих теорій залежать від розмірів компонентів внутрішньої структури. Наприклад, зміна діаметра гранули на один порядок змінює значення констант на два-три порядки. Стандартні формули для констант композитних матеріалів показують, що вони залежать від відношення діаметрів гранули і матриці.

Фактично, ці теорії розширили коло теорій, допустимих для опису матеріалу континуумом, до значень довжин хвиль, прилеглих до короткохвильової області, характерної для дискретно-континуальної теорії (теорія кусково-однорідних матеріалів).

Особливістю цих нових теорій є те, що вони вимагають створення нових паспортів, оскільки параметри нових теорій істотно відрізняються від параметрів класичного паспорта. Наприклад, навіть густина матеріалу в теорії 1 замінюється в структурній теорії двокомпонентної суміші двома парціальними густинами.

Факт істотної відмінності між структурними теоріями композитного матеріалу відповідає відомому фізичному принципу – один і той же фізичний об'єкт може бути вивчений за допомогою різних фізичних моделей в залежності від того, яке явище в русі цього об'єкта є основною метою дослідження.

У теорії композитних матеріалів цей принцип трансформувалася наступним чином: один і той же композитний матеріал можна описати десятками різних теорій і іноді ці теорії дуже екзотичні; всі теорії будуть раціональними і доцільними в певних межах, які повинні бути ретельно зафіксовані; процедури введення таких обмежень зазвичай називають з'ясуванням меж застосовності теорій.

Мабуть, найбільш розвинутою в даний час є структурна модель двокомпонентної пружної суміші [2 – 4, 17, 18]. У цій моделі хвильові рівняння, необхідні для теоретичного аналізу, є такими, що при їх розв'язуванні знаходять, що замість класичної однієї хвилі виникають дві хвилі, які за традицією загальної теорії хвиль називають хвильовими модами. У деяких конкретних випадках композитних матеріалів було встановлено, що ці моди відповідають різним фазовим швидкостям хвиль. Точніше, мода 1 поширюється набагато повільніше, ніж мода 2. Тому використовувалися терміни «повільна мода» і «швидка мода».

Поняття повільних і швидких хвильових мод пов'язані з пружними матеріалами періодичної структури, які в свою чергу традиційно пов'язані з двокомпонентними пружними композитними матеріалами. Як зазначалося раніше, на низьких частотах або великих довжинах хвиль модель 1 (структурна модель першого порядку) є досить прийнятною моделлю деформування. На таких частотах хвилі недисперсивні і не розділяються на хвильові моди. Коли частоти збільшуються до таких значень, що довжини хвиль мають значення одного порядку або більше від характерного розміру структури матеріалу (наприклад, діаметр волокна або гранули в композитному матеріалі), хвилі стають дисперсивними і існують одночасно у вигляді двох мод.

У час інтенсивного розвитку механіки композитів недостатньо уваги приділялося специфіці хвильових мод. Можливо, деякі особливості мод варто проаналізувати

більш повно. Дане дослідження присвячене саме цій частині аналізу хвильових мод. Воно побудоване як відповідь на чотири запитання:

Запитання 1. Чи є моди однаково дисперсивними на всьому діапазоні частот, дозволеному для моделі суміші?

Запитання 2. Якою є відмінність між фазовими швидкостями повільної і швидкої мод для реальних матеріалів?

Запитання 3. В яких діапазонах частот відбуваються синфазні та антифазні коливання мод, які поширюються в одному компоненті?

Запитання 4. В яких діапазонах частот відбуваються синфазні та антифазні коливання частинок обох компонентів, в яких поширюється одна мода?

Основний науковий результат цього дослідження оснований на давніх результатах класичних експериментів Бедфорда, Драмхеллера, Лінгла і Сазерленда [2, 5, 8, 9] щодо поширення хвиль у композитних матеріалах. Для експериментів були створені зразки волокнистих композитних матеріалів «вольфрамові волокна – алюмінієва матриця». Зразки мали форму паралелепіпедів з квадратним перетином. Внутрішня структура композиту була періодичною з багаторазовими повтореннями однієї структури і мала таку особливість, що завдяки технології виготовлення більше нагадувала багатощарову конструкцію. На одному кінці зразка (на вході) збуджувалася плоска поздовжня хвиля, яка поширювалася у зразку поперек шарів, а на іншому кінці (на виході) фіксувалися хвилі, які прийшли. Результати експерименту порівнювалися з теоретичними розрахунками в рамках спеціальної дискретної моделі решітки і показали хорошу узгодженість між експериментом і теорією.

У книзі [1] показана процедура теоретичного розрахунку на основі експериментальних даних необхідного набору фізичних параметрів матеріалів зразка в межах лінійної структурної моделі двокомпонентної пружної суміші. Кожен з наборів включає сім параметрів: три густини ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{12} , один коефіцієнт зсувної взаємодії компонентів суміші β , три пружні константи $a_k = \lambda_k + 2\mu_k$, $k = 1, 2, 3$.

1. Необхідні елементи теорії двокомпонентної пружної суміші.

Теорія двокомпонентної пружної суміші, як і всі інші континуальні моделі сумішей, оснований на концепції взаємопроникних і взаємодіючих континуумів – узагальненні класичного поняття пружного континууму. Згідно з концепцією, в кожній геометричній точці (репрезентативному об'ємі) двокомпонентної суміші існують дві матеріальні частинки – представниці двох континуумів. Таким чином, реальний двокомпонентний матеріал замінюється фіктивним тілом, що складається з двох континуумів. Кожен континуум характеризується власним набором механічних параметрів – густиною $\rho_{\alpha\alpha}$, вектором зміщення $\vec{y}^{(\alpha)}$, тензорами напружень $\sigma_{ik}^{(\alpha)}$ і деформацій $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$ (тут вважається, що грецькі індекси приймають значення 1, 2, а латинські індекси – 1, 2, 3) [1]. Цим і пояснюється термін «взаємопроникні». Термін «взаємодіючі» пояснюється тим, як ці континууми взаємодіють. Лінійний підхід для пружної суміші включає в себе три різні механізми взаємодії, які описані нижче.

Ідея використання концепції взаємопроникних континуумів при вивченні проблем механіки неоднорідних середовищ дуже давня і має більш ніж столітню історію. Відзначимо, що суміші як об'єкт дослідження вперше були розглянуті в публікаціях Фіка (1855) і Стефана (1871). Поняття взаємопроникнення і взаємодії континуумів формує теоретичну основу теорій суміші. Термін «суміш» використовується як для реальних фізичних об'єктів, так і для теоретичних моделей цих об'єктів. Найбільша кількість публікацій спостерігається в тій частині механіки багатофазних сумішей, яка вивчає ґрунти, насичені газом або рідиною. Транснаціональні газові та нафтові компанії живлять інтерес наукового співтовариства до таких сумішей. Поняття сумішей було застосоване до композитних матеріалів вже в той час, коли інші види сумішей (суспензії, емульсії та інші) накопичили безліч теоретичних і експериментальних фактів.

Побудова адекватної теорії суміші композитних матеріалів була розпочата публікаціями Лемпрайєра, Бедфорда, Штерна [1, 3 – 5, 13]. Там була запропонована зсувна модель силової взаємодії між компонентами. Вони розробили інтуїтивно зрозумілу структурну одновимірну модель для шаруватих композитів. Там було спостережено, що завдяки відмінностям міжзсувних властивостей шарів між шарами-сусідами виникає сила макровзаємодії і вона прямо пропорційна різниці мікрозсувів в шарах. З точки зору феноменологічної моделі суміші це означає, що силова взаємодія між компонентами прямо пропорційна різниці зміщень компонентів $\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}$. Цей механізм за своєю фізичною природою був названий зсувним механізмом. Як виявилось, він добре описує явище геометричної дисперсії і спостерігається в хвильових процесах в композитних матеріалах. Зсувна модель демонструє високу застосовність концепції суміші до опису композитних матеріалів.

Відзначимо окремо, що явище геометричної дисперсії полягає в нелінійній залежності фазової швидкості від частоти (при цьому ця швидкість зменшується зі збільшенням частоти). Це явище характерне тільки для гармонічних хвиль. Зазначимо, що механіка матеріалів розглядає також в'язкі і конструкційні дисперсії.

Більш загальне поняття лінійної моделі пружних двофазних сумішей було запропоновано практично одночасно різними авторами. Було показано, що основна гіпотеза лінійної пружної деформації допускає тільки два механізми силової взаємодії – зсувний та інерційний.

Механізм інерційної взаємодії викликаний відмінностями в інерційних властивостях компонентів суміші. Його можна вводити формально, враховуючи компонент перехресної взаємодії в кінетичній енергії суміші в цілому. Цей механізм необхідний при описі багатьох видів сумішей і був врахований в багатьох моделях механіки неоднорідних середовищ.

Основні рівняння теорії сумішей виведені у припущенні, що для суміші справедливий закон балансу маси, імпульсу, моменту імпульсу і енергії. Слід звернути увагу на те, що для пружних сумішей рівняння балансу енергії є наслідком перших трьох груп рівнянь. Тут важливі два факти.

Факт 1. Перші три закони завжди записуються для кожного компонента окремо.

Факт 2. Теорії будь-яких сумішей поділяються на дві частини в залежності від закону збереження енергії, записаного або для кожного компонента окремо, або для суміші в цілому.

Цей поділ має важливе значення через його наслідки. У випадку «окремо» теорія використовувала фізичні константи кожного компонента, тоді як у випадку «в цілому» константи компонентів не використовуються. У першому варіанті мінус полягає в тому, що теоретичні константи можуть дуже помітно відрізнятись від реальної ситуації, плюс натомість полягає в тому, що ці константи давно представлені в довідниках. У другому варіанті мінус полягає в тому, що повний набір фізичних констант слід визначати зі спеціальних експериментів, плюс полягає в тому, що константи будуть більш-менш точно відповідати конкретному композитному матеріалу.

Запис основних рівнянь вимагає введення деяких класичних понять і символів. Нехай суміш заповнює об'єм V . Рух кожного компонента суміші описується щодо фіксованих ортогональних декартових координат. Припущення про пружний характер деформації призводить до теорії пружної суміші. Припущення про лінійність деформування і всіх інших процесів спрощує основну систему рівнянь.

Суміш як термодинамічна система описується в лінійній пружній моделі п'ятнадцятьма кінематичними параметрами: парціальними тензорами деформації $\epsilon_{ik}^{(a)}$ і векторами відносних зміщень $(u_k^{(1)} - u_k^{(2)})$. Слідуючи традиціям механіки гетерогенних середовищ, параметр називають парціальним, якщо він характеризує лише один компонент. Отже, внутрішня енергія суміші в цілому представлена як функція цих параметрів. Можна отримати кілька важливих формул для внутрішньої енергії, які є наслідками деяких термодинамічних гіпотез

$$U = U(\varepsilon_{ik}^{(1)}, \varepsilon_{ik}^{(2)}, u_k^{(1)} - u_k^{(2)}); \quad dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}^{(\alpha)}} d\varepsilon_{ik}^{(\alpha)} + \frac{\partial U}{\partial (u_k^{(1)} - u_k^{(2)})} d(u_k^{(1)} - u_k^{(2)});$$

$$\sigma_{(ik)}^{(\alpha)} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}^{(\alpha)}}; \quad R_k^{in(1)} = \frac{\partial U}{\partial (u_k^{(1)} - u_k^{(2)})}.$$

Конститутивні рівняння в лінійній теорії двофазної ізотропної пружної суміші враховують вплив деформацій обох компонентів на напруження одного і на основі вищенаведених формул мають вигляд

$$\sigma_{ik}^{(\alpha)} = \lambda_\alpha \varepsilon_{mm}^{(\alpha)} \delta_{ik} + 2\mu_\alpha \varepsilon_{ik}^{(\alpha)} + \lambda_3 \varepsilon_{mm}^{(\delta)} \delta_{ik} + 2\mu_3 \varepsilon_{ik}^{(\delta)} \quad (\alpha, \delta = 1, 2; \alpha + \delta = 3). \quad (1)$$

Основні рівняння лінійної ізотропної теорії пружної суміші виводяться у вигляді взаємозв'язаної системи з шести рівнянь, які розглядаються як деяке узагальнення класичних рівнянь Ляме

$$\begin{aligned} & \mu_\alpha \Delta \bar{u}^{(\alpha)} + (\lambda_\alpha + \mu_\alpha) \text{grad div } \bar{u}^{(\alpha)} + \mu_3 \Delta \bar{u}^{(\delta)} + (\lambda_3 + \mu_3) \text{grad div } \bar{u}^{(\delta)} + \\ & + (-1)^\alpha \beta (\bar{u}^{(\delta)} - \bar{u}^{(\alpha)}) = \rho_{\alpha\alpha} \ddot{u}^{(\alpha)} - (-1)^\alpha \rho_{12} (\ddot{u}^{(\alpha)} - \ddot{u}^{(\delta)}) \quad (\alpha, \delta = 1, 2; \alpha + \delta = 3), \end{aligned} \quad (2)$$

або

$$\begin{aligned} & \mu_1 \Delta \bar{u}^{(1)} + (\lambda_1 + \mu_1) \text{grad div } \bar{u}^{(1)} + \mu_3 \Delta \bar{u}^{(2)} + (\lambda_3 + \mu_3) \text{grad div } \bar{u}^{(2)} + \beta (\bar{u}^{(1)} - \bar{u}^{(2)}) = \\ & = \rho_{11} \ddot{u}^{(1)} + \rho_{12} (\ddot{u}^{(1)} - \ddot{u}^{(2)}); \\ & \mu_2 \Delta \bar{u}^{(2)} + (\lambda_2 + \mu_2) \text{grad div } \bar{u}^{(2)} + \mu_3 \Delta \bar{u}^{(1)} + (\lambda_3 + \mu_3) \text{grad div } \bar{u}^{(1)} - \beta (\bar{u}^{(1)} - \bar{u}^{(2)}) = \\ & = \rho_{22} \ddot{u}^{(2)} - \rho_{12} (\ddot{u}^{(1)} - \ddot{u}^{(2)}). \end{aligned}$$

Рівняння (1), (2) містять шість незалежних пружних констант λ_k, μ_k , дві парціальні густини ρ_{11}, ρ_{22} , одну константу зсувної взаємодії між компонентами суміші β і коефіцієнт інерційної взаємодії ρ_{12} . В цілому цей варіант теорії суміші характеризується десятьма константами.

Відзначимо ще раз, що взаємодія між компонентами суміші описується в лінійній теорії трьома механізмами, які вводяться в лінійну теорію з використанням феноменологічних міркувань. Сили взаємодії представлені у вигляді суми двох сил, які характеризують зміну кінетичної і внутрішньої енергій внаслідок взаємодії компонентів. Обидва механізми – зсувний і інерційний – описані вище. Зсувний механізм представлений в рівнянні (2) доданком $(-1)^\alpha \beta (\bar{u}^{(\delta)} - \bar{u}^{(\alpha)})$, а інерційний – доданком $(-1)^\alpha \rho_{12} (\ddot{u}^{(\alpha)} - \ddot{u}^{(\delta)})$. Третій механізм полягає у перехресному впливі деформацій одного компонента на напруження іншого компонента. Він відображається в конститутивних рівняннях (1).

Якщо обмежити аналіз плоскими хвилями в двофазній пружній ізотропній суміші і розглянути невелике спрощення щодо напрямку руху хвиль (нехай хвилі рухаються в напрямку осі абсцис), то вектори парціальних зміщень залежатимуть тільки від двох змінних: координати x_1 і часу t

$$\bar{u}^{(\alpha)} \equiv \{u_k^{(\alpha)}(x_1, t)\} \quad (3)$$

і рух хвиль описується наступними лінійними хвильовими рівняннями [1, 6, 7]

$$(\rho_{\alpha\alpha} - \rho_{\alpha\delta})u_{1,tt}^{(\alpha)} - (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)u_{1,11}^{(\alpha)} + \beta u_1^{(\alpha)} + \rho_{\alpha\delta}u_{1,tt}^{(\delta)} - (\lambda_3 + 2\mu_3)u_{1,11}^{(\delta)} - \beta u_1^{(\delta)} = 0; \quad (4)$$

$$(\rho_{\alpha\alpha} - \rho_{\alpha\delta})u_{m,tt}^{(\alpha)} - \mu_\alpha u_{m,11}^{(\alpha)} + \beta u_m^{(\alpha)} + \rho_{\alpha\delta}u_{m,tt}^{(\delta)} - \mu_3 u_{m,11}^{(\delta)} - \beta u_m^{(\delta)} = 0 \quad (m = 2, 3). \quad (5)$$

Кожна з трьох систем (4), (5) являє собою систему з двох взаємозв'язаних рівнянь і описує поширення одного типу хвиль – поздовжних, поперечних горизонтальних, поперечних вертикальних.

Рівняння (4), (5) можуть бути записані в інваріантній щодо типу хвилі формі

$$(\rho_{\alpha\alpha} - \rho_{\alpha\delta})u_{m,tt}^{(\alpha)} - a_\alpha^{(k)}u_{k,11}^{(\alpha)} + \beta u_k^{(\alpha)} + \rho_{\alpha\delta}u_{m,tt}^{(\delta)} - a_3^{(k)}u_{k,11}^{(\delta)} - \beta u_k^{(\delta)} = 0 \quad (6)$$

$$(a_m^{(1)} = \lambda_m + 2\mu_m, \quad a_m^{(2)} = a_m^{(3)} = \mu_m),$$

або

$$(\rho_{11} - \rho_{12})u_{m,tt}^{(1)} - a_1^{(k)}u_{k,11}^{(1)} + \beta u_k^{(1)} + \rho_{12}u_{m,tt}^{(2)} - a_3^{(k)}u_{k,11}^{(2)} - \beta u_k^{(2)} = 0;$$

$$\rho_{12}u_{m,tt}^{(1)} - a_3^{(k)}u_{k,11}^{(1)} - \beta u_k^{(1)} + (\rho_{22} - \rho_{12})u_{m,tt}^{(2)} - a_2^{(k)}u_{k,11}^{(2)} + \beta u_k^{(2)} = 0.$$

Тут слід зазначити, що при переході до аналізу поперечно ізотропних і ортотропних сумішей плоскі хвилі в напрямку осей симетрії описуються подібними за структурою хвильовими рівняннями, в яких всі вісім параметрів пов'язані з вибраною віссю.

Система (6) має розв'язок у вигляді гармонічних коливань

$$u_m^{(\alpha)}(x_1, t) = A_{om}^{(\alpha)} e^{-i(k_\alpha^{(m)}x - \omega t)} + l(k_\delta^{(m)})A_{om}^{(\delta)} e^{-i(k_\delta^{(m)}x - \omega t)}, \quad (7)$$

або

$$\begin{pmatrix} u_m^{(1)}(x_1, t) \\ u_m^{(2)}(x_1, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l(k_2^{(m)}) \\ l(k_1^{(m)}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{om}^{(1)} e^{-i(k_1^{(m)}x - \omega t)} \\ A_{om}^{(2)} e^{-i(k_2^{(m)}x - \omega t)} \end{pmatrix},$$

в якому кількість хвиль слід знайти з рівняння

$$k_\alpha^{(m)} M_1^{(m)} k^4 - 2M_2^{(m)} k^2 \omega^2 + M_3^{(m)} \omega^4 = 0;$$

$$M_1^{(m)} = a_1^{(m)} a_2^{(m)} - (a_3^{(m)})^2; \quad M_3^{(m)} = \rho_{11} \rho_{22} - (\rho_{11} + \rho_{22}) \left[(\beta/\omega^2) + \rho_{12} \right]; \quad (8)$$

$$2M_2^{(m)} = a_1^{(m)} \rho_{11} + a_2^{(m)} \rho_{22} - (a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + 2a_3^{(m)}) \left[(\beta/\omega^2) + \rho_{12} \right],$$

коефіцієнти $l(k_\alpha^{(m)})$ матриць розподілу амплітуд $\begin{pmatrix} 1 & l(k_2^{(m)}) \\ l(k_1^{(m)}) & 1 \end{pmatrix}$ вираховуються за

алгебраїчною формулою

$$l(k_1^{(m)}) = \left\{ - \left[a_3^{(m)} (k_1^{(m)})^2 - \beta + \rho_{12} \omega^2 \right] / \left[a_1^{(m)} (k_1^{(m)})^2 + \beta - (\rho_{11} - \rho_{12}) \omega^2 \right] \right\};$$

$$l(k_2^{(m)}) = \left\{ - \left[a_2^{(m)} (k_2^{(m)})^2 + \beta - (\rho_{22} - \rho_{12}) \omega^2 \right] / \left[a_3^{(m)} (k_2^{(m)})^2 - \beta + \rho_{12} \omega^2 \right] \right\}. \quad (9)$$

Покажемо тут п'ять ключових особливостей.

1. Кожна хвиля (хвиля в першому чи другому компоненті суміші) має дві моди з різними хвильовими числами $k_\alpha^{(m)}$ (тут α фіксує номер моди і m – тип хвилі).

2. Відмінність між хвильовими числами ідентична відмінності між фазовими швидкостями мод $v_\alpha^{(m)} = \omega / k_\alpha^{(m)}$: мода 1 – повільна, а мода 2 – швидка. В експерименті швидка мода приходить на вихід зразка раніше, а повільна – пізніше.

3. Обидві моди є суттєво дисперсивними хвилями, оскільки хвильові числа залежать від частоти суттєво нелінійно.

4. Суміш фільтрує одну з мод і така мода не існує для низьких частот. Точніше, вона перетворюється з біжучої гармонічної хвилі в гармонічну хвилю, що швидко затухає, починаючи з частоти $\omega_{cut}^* = \sqrt{\beta(\rho_{11} + \rho_{22}) / [\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}(\rho_{11} + \rho_{22})]}$, названої частотою відсікання або частотою запирання. Відзначимо, що ця частота не залежить від пружних констант суміші (композитного матеріалу).

5. У кожній компоненті суміші існують дві моди з різними амплітудами, які суттєво залежать від частоти, що дозволяє перепомповувати енергію з однієї моди в іншу зі зміною частоти.

Мода 1 в компоненті 1 суміші є біжучою хвилею і визначається з точністю до амплітуди

$$u_1^{(1)}(x_1, t) = A_{o1}^{(1)} e^{-i(k_1^{(1)} x_1 - \omega t)}. \quad (10)$$

Мода 1 у компоненті 2 схожа на моду (10) з тією особливістю, що має додатковий множник в амплітуді, який залежить від властивостей суміші, частоти та хвильового числа

$$u_1^{(2)}(x_1, t) = l(k_1^{(2)}) u_1^{(1)}(x_1, t). \quad (11)$$

Мода 2 в компоненті 2 суміші є біжучою хвилею і визначається з точністю до амплітуди.

$$u_2^{(2)}(x_1, t) = A_{o1}^{(2)} e^{-i(k_1^{(2)} x_1 - \omega t)}. \quad (12)$$

Мода 2 в компоненті 1 подібна на моду (12) з тією особливістю, що вона має додатковий множник в амплітуді, який залежить від властивостей суміші, частоти і хвильового числа

$$u_2^{(1)}(x_1, t) = l(k_1^{(1)}) u_2^{(2)}(x_1, t). \quad (13)$$

Таким чином, чотири хвилі в суміші характеризуються двома довільними амплітудами.

Слід зазначити, що при побудові теорії сумішей стосовно композитних матеріалів на деякі інші особливості мод увага не була звернена. Зокрема, це стосувалося коефіцієнтів розподілу амплітуд по модах. Згодом в публікаціях [8,9] була проаналізована згадувана вище аналогія між коливаннями зв'язаних маятників і коливаннями частинок суміші (коливаннями компонентів суміші чи компонентів композитного матеріалу при поширенні в матеріалі поздовжніх плоских хвиль). Виявилось, що можливість синфазних та антифазних коливань шарів шаруватого композитного матеріалу може бути потрактована як можливість розшарування (деламінації) у внутрішній структурі матеріалу. Фактично, був спостережений новий механізм пошкодження композитного матеріалу. У публікаціях [8, 9] основна увага була зосереджена саме на цьому механізмі і деякі питання якісного і кількісного характеру не отримали відповідей.

Варто теж тут зазначити, що теорія сумішей продовжує розвиватися і в наш час як стосовно побудови ускладнених моделей деформування матеріалів, так і стосовно нових інженерних задач [6, 8 – 10, 12, 17 – 19].

Далі розглянемо випадок поперечної хвилі і перейдемо до аналізу трьох запитань, поставлених раніше щодо особливостей хвильових мод.

2. Запитання 1. Чи є моди однаково дисперсивними на всьому діапазоні частот дозволеному для моделі суміші?

Для відповіді виберемо вісім конкретних композитних матеріалів, до опису деформації яких застосовується вищенаведена теорія сумішей:

M1. Волокнистий матеріал «вольфрамові волокна – алюмінієва матриця», об'ємний вміст волокон 0,022.

M2. Волокнистий матеріал «вольфрамові волокна – алюмінієва матриця», об'ємний вміст волокон 0,221.

M3. Гранульований матеріал «сталеві гранули – полістиролова матриця», об'ємний вміст гранул 0,20.

M4. Гранульований матеріал «мідні гранули – молібденова матриця», об'ємний вміст гранул 0,20.

M5. Гранульований матеріал «вольфрамові гранули – молібденова матриця», об'ємний вміст гранул 0,40.

M6. Гранульований матеріал «мідні гранули – полістиролова матриця», об'ємний вміст гранул 0,40.

M7. Гранульований матеріал «вольфрамові гранули – мідна матриця», об'ємний вміст гранул 0,60.

M8. Гранульований матеріал «вольфрамові гранули – алюмінієва матриця», об'ємний вміст гранул 0,20.

Для аналізу плоских поперечних хвиль в матеріалах M1 – M8 потрібно знати конкретні значення 7 параметрів: $a_1, a_2, a_3, \beta, \rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{12}$.

Щоб відповісти на питання про специфіку дисперсії мод, розглянемо побудовані для матеріалів M1 – M8 графіки залежності «хвильові числа і фазові швидкості обох мод – частота». Ці графіки показано на рис. 1, 2. Послідовність рисунків відповідає послідовності матеріалів (наприклад, рис. 1, *a* – *жс* відповідають матеріалам від M1 до M8, відповідно).

Слід нагадати до речі, що хвиля не дисперсивна, якщо її фазова швидкість постійна і відповідні хвильові числа лінійно залежать від частоти. При цьому графік «фазова швидкість – частота» паралельний абсцисі (осі частоти), а графік «хвильове число – частота» – пряма лінія, яка нахилена під певним кутом до лінії абсцис. Тому області, де ці графіки відрізняються від прямих або горизонтальних ліній, можна розглядати як області дисперсії хвиль. Нагадаємо, що графіки «хвильові числа – частота» загальноприйняті в теорії гармонічних хвиль, тому що вони цілком прийнятні для характеристики цих хвиль.

У табл. 1 показані фізичні константи для матеріалів M1 – M8.

Таблиця 1

матеріал	a_1 10 ¹⁰ [Па]	a_2 10 ¹⁰ [Па]	a_3 10 ¹⁰ [Па]	β 10 ¹⁵ [Н/м ⁴]	ρ_{11} 10 ³ [кг/м ³]	ρ_{22} 10 ³ [кг/м ³]	ρ_{12} 10 ³ [кг/м ³]
M1	0,640	0,290	0,080	1,620	0,420	2,640	-1,900
M2	2,820	1,150	1,250	5,950	4,180	1,900	-0,650
M3	0,108	0,3202	0,1298	0,0613	0,156	0,084	0
M4	1,096	38,29	6,260	2,570	0,179	0,816	0
M5	0,895	0,225	0,2812	0,224	0,756	0,612	0
M6	0,295	0,263	0,3812	0,0424	0,357	0,063	0
M7	3,390	1,898	2,428	7,390	0,536	0,756	0
M8	1,211	10,38	3,660	0,0613	0,378	0,216	0

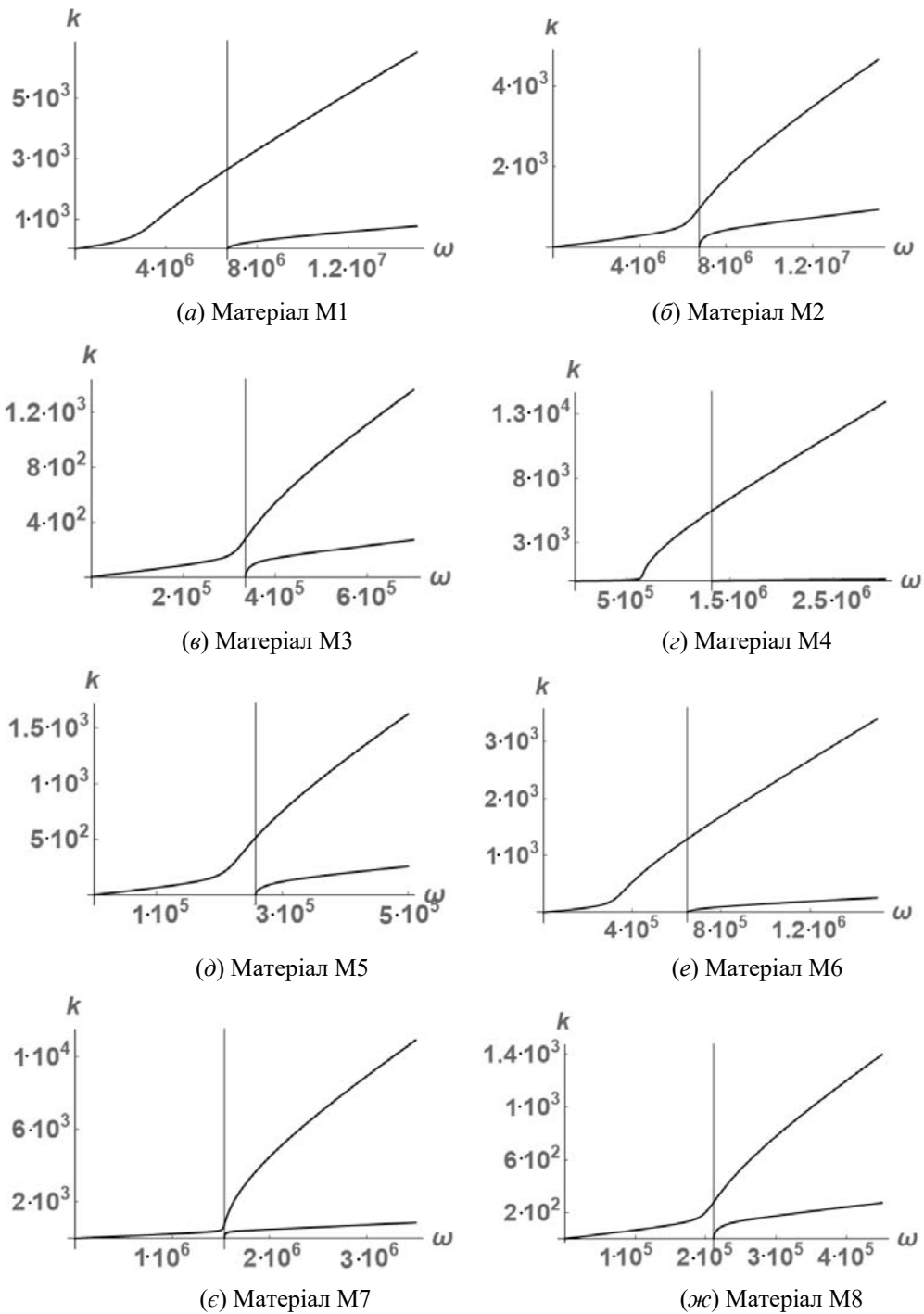


Рис. 1

На рис. 1 показані залежності хвильових чисел від частоти для обох мод (верхня лінія для моди 1, нижня лінія для моди 2). Лінії-графіки на рис. 1, а – ж є показовими у тому розумінні, що ці лінії є прямими для більшості значень частот. Вони стають вигнутими лише в якійсь порівняно вузькій частотній зоні, розташованій зліва від частоти замикання ω_{cut} моди 2, або, для деяких матеріалів, при певній наближеності зліва до частоти ω_{cut} .

Таким чином, відповідь на питання 1 є такою, що моди дисперсивні лише для деякого вузького частотного діапазону.

Тоді виникає наступне запитання: чи є сильною дисперсія для всіх досліджуваних матеріалів і чи є області дисперсії відносно подібними?

На це питання можна більш повно відповісти, проаналізувавши наступні вісім графіків залежності фазових швидкостей від частоти для обох мод (нижня лінія для моди 1, верхня лінія для моди 2), які показано на рис. 2.

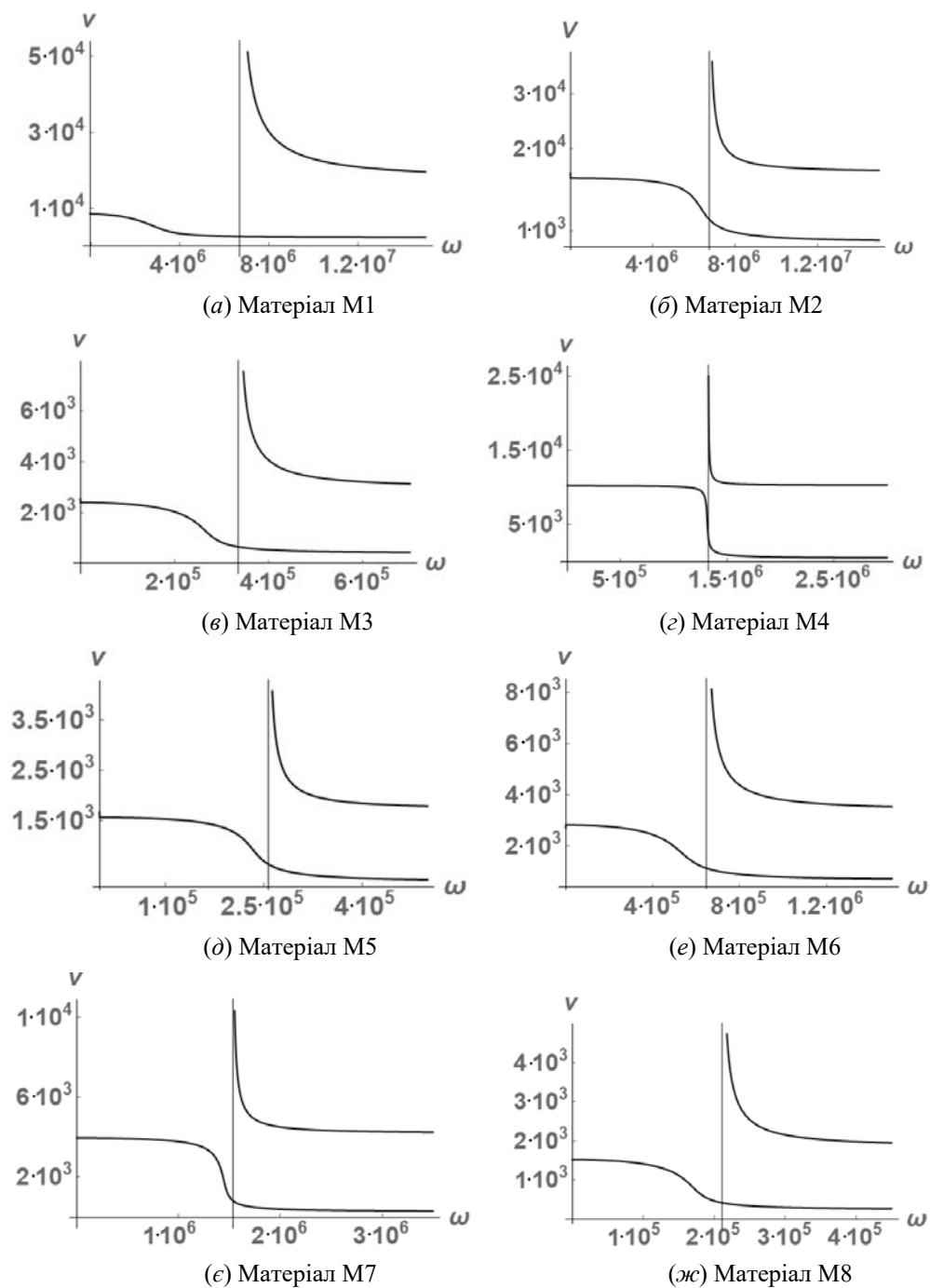


Рис. 2

Якщо розуміти ступінь дисперсивності моди як ступінь різкої зміни кривизни графіка фазової швидкості в заданій області зміни частоти, то мода 1 не дисперсивна для низьких частот. Однак, поняття низьких частот для кожного матеріалу різне. Відомо, що у теорії гармонічних хвиль концепція дисперсії хвиль пов'язана з поняттям довгих і коротких хвиль, тобто з поняттям довжини хвилі. Оскільки довгі хвилі добре описані структурною моделлю першого порядку (теорія пружності з усередненими пружними константами), з усіх графіків рис. 2 випливає, що теорія суміші не повинна використовуватися для опису поширення гармонічних хвиль з великими довжинами хвиль.

Доцільність застосування теорії суміші виявляється саме для хвиль з довжинами, при яких пряма лінія на графіку «фазова швидкість – частота» вигинається. Початок таких спотворень на рис. 2, *a – ж* показує, що внутрішня структура композитного матеріалу (значення діаметра гранули або волокна) вже впливає на поширення хвиль. Як відомо, дисперсія в композитних матеріалах при пружній деформації має геометричне походження (використовується термін «геометрична дисперсія»). Тому близькість частоти, при якій мода 1 вже починає бути дисперсивною, до частоти запирання є важливою характеристикою.

Тільки один з проаналізованих матеріалів (рис. 2, *з*) показує значну близькість. Це означає, що так ніби в цьому випадку спостерігається новий хвильовий ефект – для дуже широкого діапазону частот, починаючи з дуже малих частот приблизно до половини частоти запирання (поява моди 2), мода 1 не є дисперсивною або виявляє дисперсію зовсім незначно. Так, область істотної дисперсії моди 1 розташовується в діапазоні частот, де моди 2 поки не існує.

Ще однією важливою характеристикою дисперсії мод є частота запирання ω_{cut} . Перш за все, починаючи з ω_{cut} , з'являється мода 2. Ця мода спочатку дуже дисперсивна і продовжує бути дисперсивною на частотах, де мода 1 вже не є такою. Ця специфіка моди 2 зустрічається практично у всіх вивчених тут матеріалах (крім матеріалу М5). Звернемо увагу тут ще раз, що мода 1, як правило, дисперсивна в області до частоти запирання і меншою мірою в області справа від цієї частоти.

3. Запитання 2. Якою є відмінність між фазовими швидкостями повільної і швидкої мод для реальних матеріалів?

Відповідь слід шукати, аналізуючи графіки залежності «фазова швидкість – частота» (рис. 2). Але спочатку необхідно проаналізувати поняття коротких хвиль в теорії суміші. Тут існує обмеження зверху, яке полягає в тому, що короткі хвилі з довжиною, яка більша за порядок амплітуди, ніж характерний розмір внутрішньої структури композитного матеріалу, не можуть вивчатися в рамках моделі суміші. Тому для кожного з матеріалів М1 – М8 доводиться розраховувати граничне значення частоти, знаючи розмір діаметра волокна або гранули. Такі значення і відповідні значення діаметрів і довжин хвиль наведені в табл. 2. У цій таблиці також показано співвідношення v_2/v_1 – швидкості моди 2 до швидкості моди 1.

Таблиця 2

Параметр	М1	М2	М3	М4	М5	М6	М7	М8
діаметр волокна чи гранули, 10^{-3} м	13,3	13,4	37,8	9,30	37,6	31,6	5,30	3,80
максимальна довжина хвилі, 10^{-4} м	13,34	13,46	37,82	9,35	37,67	31,64	5,38	3,85
критична частота, 10^7 Гц	1,10	1,40	0,07	0,30	0,05	0,14	0,35	0,04
співвідношення швидкостей v_2/v_1	9,30	4,98	7,40	22,07	5,45	4,85	14,1	7,21

Значення критичної частоти з табл. 2 дають найнижчі значення відношення v_2/v_1 швидкості моди 2 до швидкості моди 1. Як видно з рис. 2, це відношення вище для менших значень частоти. Значення v_2/v_1 дає необхідну інформацію про те, наскільки швидшою моди 1 є мода 2. В середньому мода 2 в десять і більше разів швидша моди 1.

4. Запитання 3. В яких діапазонах частот відбуваються синфазні та антифазні коливання мод, які поширюються в одному компоненті?

Для відповіді необхідно використати теоретичний розв'язок (7), який показує внесок повільної і швидкої мод в хвильовий рух першого і другого компонентів суміші-матеріалу. Йдеться про явище синфазних і антифазних коливань для повільної і швидкої мод в окремо взятому компоненті. При цьому частота в обох мод є однією і тією ж. Синфазність коливань свідчить, що амплітуди в обох модах мають однаковий знак і сумісне одночасне коливання за обома модами підсилює спільну амплітуду коливань, тоді як антифазність – послаблює. Особливість такого явища полягає у тому, що воно можливе лише для помірних і більше частот $\omega > \omega_{cut}$, при яких існує мода 2.

Для відповіді на запитання 3 побудовані графіки залежності множників $l(k_\alpha)$ обох мод і матеріалів М1 – М8 від частоти.

Беручи до уваги отримані графіки, відповідь на запитання 3 про синфазні і антифазні коливання для повільних і швидких мод в окремо взятому компоненті дозволяє два варіанти. Відзначимо, що це явище полягає в наступному спостереженні: згідно з розв'язком (7), хвильовий рух в компоненті завжди є суперпозицією двох хвиль – повільної і швидкої мод.

Варіант 1 допускає, що повільна і швидка моди в окремо взятому компоненті композитного матеріалу (крім М4) коливаються антифазно. Варіант 2 пов'язаний з матеріалом М4, який необхідно прокоментувати окремо: для моди 1 існує інший (на відміну від вказаного в табл. 2) тип критичної частоти – це частота $\tilde{\omega}_{crit}$, при значенні якої амплітуда моди 1 змінює знак.

Ця критична частота для більшості вивчених матеріалів (рис. 3, *a – в* та 3, *д – ж*) є меншою частотою запирання і це відповідає варіанту 1: графіки рис. 3 свідчать, що ці коливання є антифазними для всіх частот з області існування моди 2 $\omega > \omega_{cut}$. Можна сказати, що це спостереження є сподіваним.

Варіант 2 відповідає матеріалу М4. Він показує певний новий несподіваний факт – критична частота $\tilde{\omega}_{crit}$ є більшою частотою запирання $\omega_{cut} < \tilde{\omega}_{crit}$.

Тобто, існує деякий вузький діапазон частот, що межують справа з частотою запирання, де повільна і швидка моди коливаються синфазно. Такий факт можна трактувати як новий хвильовий ефект: збільшення спільної максимальної амплітуди коливань в окремо взятому компоненті.

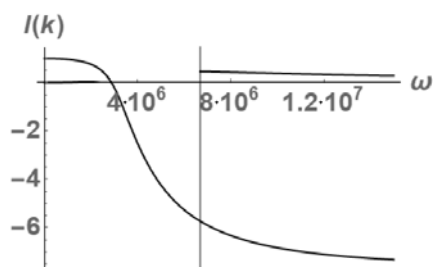
5. Запитання 4. В яких діапазонах частот відбуваються синфазні та антифазні коливання частинок обох компонентів, в яких поширюється одна мода?

Тут виникає необхідність розділити запитання про синфазні – антифазні коливання частинок двох компонентів суміші на два: 4.1. Запитання про це явище для повільної моди в обох компонентах. 4.2. Запитання про таке явище для швидкої моди в обох компонентах. Перш за все, в діапазоні частот менше частоти запирання моди 2 немає сенсу порівнювати дві моди, адже там швидкої моди не існує.

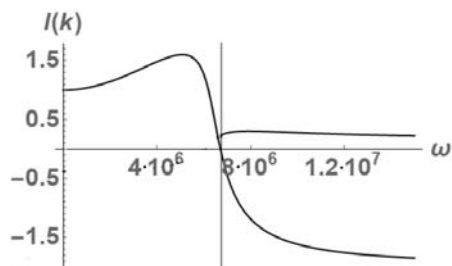
Отже, беручи до уваги отримані графіки залежності амплітудних множників $l(k_\alpha)$ від частоти для матеріалів М1 – М8 (рис. 3), слід з'ясувати для запитань 4.1 та 4.2, в яких областях частот коливання перебувають в фазі або антифазі.

Запитання 4.1 пов'язане з коментарем про перетин осі частот кривою $l(k_\alpha)$. Це відповідає рівності нулеві чисельника з виразу (9)

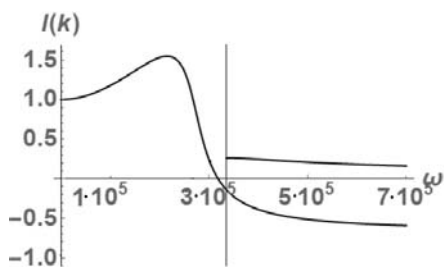
$$a_3^{(m)} (k_1^{(m)})^2 - \beta + \rho_{12} \omega^2 = 0 \rightarrow \tilde{\omega}_{crit} = \sqrt{\left[\beta - a_3^{(m)} (k_1^{(m)})^2 \right] / \rho_{12}} .$$



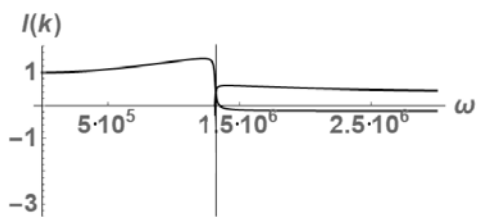
(a) Матеріал M1



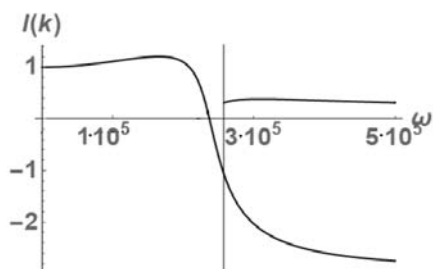
(б) Матеріал M2



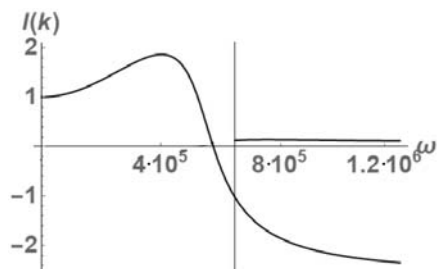
(в) Матеріал M3



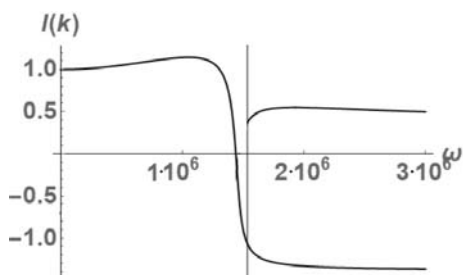
(г) Матеріал M4



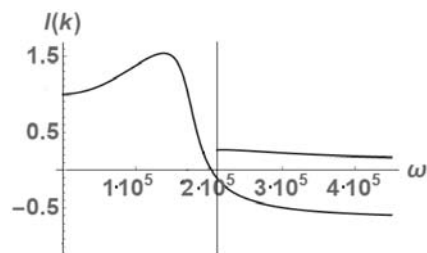
(д) Матеріал M5



(е) Матеріал M6



(є) Матеріал M7



(ж) Матеріал M8

Рис. 3

Показана вище зміна значень амплітуди з додатних на від'ємні вказує на те, що амплітуда повільної моди стає від'ємною для всіх частот, починаючи з $\bar{\omega}_{crit}$. Значення є критичним, оскільки повільна мода існує в даному випадку тільки в компоненті 1, при цьому вона відсутня у компоненті 2. Отже, для всіх досліджуваних матеріалів (крім M4) в безпосередній близькості від цього значення частоти існує замість чотирьох хвиль тільки одна хвиля у вигляді повільної моди в компоненті 1. Більш важливим фактом є те, що коливання повільної моди в компонентах 1 та 2 композитного матеріалу відбуваються синфазно в діапазоні $(0, \bar{\omega}_{crit})$ і антифазно в діапазоні

$\omega > \tilde{\omega}_{crit}$. Всі графіки (крім M4) рис. 3 показують, що зміна знаку повільної моди відбувається в діапазоні частот, де швидкої моди ще не існує.

Також слід звернути увагу на ту специфіку повільної моди, коли її початкова (для дуже малих частот) амплітуда в компоненті 1 постійна і далі вона значно збільшується в порівнянні з початковою (від 10% до 100%) в діапазоні частот від дуже малих до значень, які становлять близько 75% від значення частоти запирання.

Відповідь на запитання 4.2 слід починати зі спостереження, що всі графіки (крім M4) рис. 3 показують, що швидка мода завжди характеризується позитивними значеннями амплітудного множника. Це можна прокоментувати як спостереження, що швидка мода в обох компонентах композитного матеріалу завжди коливається синфазно.

Ситуацію, коли значення амплітуди моди в одному компоненті позитивне і негативне в іншому, було прокоментоване в публікаціях [9,10]. Якщо рух двох частинок взаємодіючих компонентів композитного матеріалу відбувається антифазно, тоді це явище можна трактувати як механізм внутрішнього розшарування (деламінації) композитного матеріалу.

Висновки.

Сформульовано нові факти про хвилі в композитах. Вперше запропоновано кількісний опис і оцінку специфіки повільної і швидкої хвильових мод в ряді реальних композитних матеріалів. Відповіді даються на чотири запитання про специфіку поширення плоских поздовжніх хвильових мод в композитах, які описуються теоретично структурною моделлю двокомпонентної пружної суміші. Це відповіді на запитання:

1. Чи є моди однаково дисперсивними на всьому діапазоні частот, дозволеному для моделі суміші? 2. Якою є відмінність між фазовими швидкостями повільної і швидкої мод для реальних матеріалів? 3. В яких діапазонах частот відбуваються синфазні та антифазні коливання мод, які поширюються в одному компоненті? 4. В яких діапазонах частот відбуваються синфазні та антифазні коливання частинок обох компонентів, в яких поширюється одна мода?

Відповіді на сформульовані запитання про моди базуються на побудованих трьох групах графіків (кожна група містить 16 графіків для обох мод в 8-и вибраних матеріалах залежностей «число хвиль – частота», «фазова швидкість – частота», «амплітудні множники – частота»).

Основна відповідь на запитання 1 основана на графіках групи 1 і є такою, що моди дисперсні тільки для якоїсь досить невеликої області частот. Графіки групи 2 дають більш конкретну інформацію: повільна мода не дисперсивна для низьких частот (область малих частот приблизно займає половину площі на проміжку від нуля до частоти запирання) і для кожного матеріалу поняття низьких частот відрізняється; повільна мода сильно дисперсивна у вузькій області, розташованій в лівій частині частоти запирання, і в меншій мірі на деякій відстані справа від цієї частоти; швидка мода спочатку дуже дисперсивна і продовжує бути дисперсивною на частотах, де повільна мода вже не є такою.

Відповідь на запитання 2 впливає з аналізу графіків групи 2 і значень частоти, яка є граничною для моделі суміші і відповідає найменшому значенню відношення швидкості швидкої моди до швидкості повільної; це відношення надає необхідну інформацію про те, наскільки швидше повільної моди є швидка мода; в середньому швидка мода в десять і більше разів швидше повільної.

Для відповіді на запитання 3 використовується теоретичний розв'язок, який показує внесок повільної і швидкої мод у хвильовий рух окремо взятого компоненту композиту. Отримана відповідь показує певний новий несподіваний факт – критична частота є більшою частоти запирання. Тобто, для деяких вузьких діапазонів частот, що сусідять праворуч з частотою запирання, обидві моди коливаються синфазно. Такий факт можна трактувати як новий хвильовий ефект: збільшення спільної максимальної амплітуди коливань в окремо взятому компоненті.

Відповідь на запитання 4 про синфазні та антифазні коливання частинок двох компонентів суміші розділено на дві. Перша відповідь стосується повільної моди в обох компонентах: коливання повільної моди в компонентах 1 та 2 композитного матеріалу відбуваються синфазно в діапазоні до певної критичної частоти і антифазно в

діапазоні після цієї частоти. Всі графіки (крім М4) рис. 3 показують, що зміна знаку повільної моди відбувається в діапазоні частот, де швидкої моди ще не існує.

Друга відповідь є такою: всі графіки (крім М4) рис. 3 показують, що швидка мода завжди характеризується позитивними значеннями амплітудного множника. Це означає, що швидка мода в обох компонентах композитного матеріалу завжди коливається синфазно.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Проаналізовано нові особливості повільної і швидкої мод плоскої поздовжньої хвилі в композитному матеріалі. Композит описується лінійною структурною моделлю пружної суміші. Вперше запропоновано кількісні оцінки специфіки хвильових мод в реальних композитах. Даються відповіді на чотири запитання: 1. Чи є моди однаково дисперсивними на всьому діапазоні частот, дозволеному для моделі суміші? 2. Якою є відмінність між фазовими швидкостями повільної і швидкої мод для реальних матеріалів? 3. В яких діапазонах частот відбуваються синфазні та антифазні коливання мод, які поширюються в одному компоненті? 4. В яких діапазонах частот відбуваються синфазні та антифазні коливання частинок обох компонентів, в яких поширюється одна мода? Для чисельного аналізу вибрано 8 композитів, для яких представлено повний набір фізичних постійних. Відповіді базуються на побудованих 3-х групах графіків (кожна група містить 16 графіків для 8 вибраних матеріалів) залежностей «хвильове число – частота», «фазова швидкість – частота», «амплітудні множники – частота».

КЛЮЧОВІ СЛОВА: композитний матеріал, теорія суміші, хвильові моди, комп'ютерний аналіз.

1. *Руцицкий Я.Я.* Элементы теории смеси (Elements of the theory of mixtures). – Киев: Наукова думка, 1991. – 160 с.
2. *Руцицкий Я.Я., Цурпал С.И.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
3. *Bedford A., Drumheller D.S.* Introduction to Elastic Wave Propagation. – New York: John Wiley, 1994. – 832 p.
4. *Bedford A., Drumheller D.S.* Theories of immiscible and structured mixtures // *Int. J. Engng. Sci.* – 1983. – **21**, N 8. – P.863 – 960.
5. *Bedford A., Drumheller D.S., Sutherland H.J.* On modelling the dynamics of composite materials. In: *Mechanics Today*, vol.3. – USA: Pergamon Press, 1976. – P. 1 – 104.
6. *Chen X., Thornton S.F., Pao W.* Mathematical model of coupled dual chemical osmosis based on mixture-coupling theory // *Int. J. Engng. Sci.* – 2018. – **129**. – P. 145 – 155.
7. *Engelbrecht J.* Questions about Elastic Waves. – Berlin: Springer, 2015. – 123p.
8. *Guz I.A., Rushchitsky J.J.* Theoretical Description of a Delamination Mechanism in Fibrous Micro- and Nanocomposites // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 10. – P. 1129 – 1136.
9. *Guz I.A., Rushchitsky J.J.* Theoretical and computer modelling of debonding mechanisms in fibrous micro- and nano-composites // *Proc. of the ICF11*, March 20 – 25, 2005, Turin, Italy. – Rush1 – 6.
10. *Klisch S.M., Lotz J.C.* A Special Theory of Biphasic Mixture and Experimental Results for Human Annulus Tested in Confined Compression // *J. Biomechanical Engng. ASME.* – 2000. – **122**, N 4. – P. 181 – 182.
11. *Lempiere B.* Ultrasound and Elastic waves: Frequently Asked Questions. – New York: Academic Press, 2002. – 146 p
12. *Ma Y., Chen X.H.* An extension of Biot's theory with molecular influence based on mixture coupling theory. Mathematical model // *Int. J. Solids Struct.* – 2020. – **191 – 192**. – P. 76 – 86.
13. *Rushchitsky J.J.* Foundations of Mechanics of Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 276 p.
14. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
15. *Rushchitsky J.J.* Theory of Waves in Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011. – 270 p.
16. *Rushchitsky J.J.* Interaction of waves in solid mixtures // *Appl. Mech. Rev.* – 1999. – **52**, N 2. – P. 35 – 74.
17. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* On the Evolution of a Plane Harmonic Wave in a Nonlinear Elastic Composite Material Modeled by a Two-Phase Mixture // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 2. – P. 172 – 183.
18. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Analogies between the Classical Problem on the Oscillation of Bodies and the Nonclassical Problem on the Propagation of Plane Waves // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, N 4. – P. 386 – 394.
19. *Vromans A.J., Muntean A., Van de Ven F.* A mixture theory-based concrete corrosion model coupling chemical reactions, diffusion and mechanics // *Pacific J. of Mathem. for Industry* – 2018. – **10**, N 5. – P. 1 – 21.

Надійшла 29.12.2021

Затверджена до друку 19.07.2022